Calcolo delle probabilità e Statistica
laurea triennale in Ingegneria, a.a. 2021-22
Prima prova di valutazione in itinere
Durata della prova 2 h

Punteggi: 1) $3 + 2 + 3$; **2)** $4 + 4 + 4 + 5 + 5$.
Totale = 30.

1. In una prova per l'esame di CPS, ogni candidato deve svolgere un quesito scelto a caso tra tre proposti: il primo è un problema sulla v.a. di Poisson, il secondo sulla v.a. binomiale, e il terzo sulla v.a. geometrica. Supponiamo che, in base alla difficoltà degli argomenti, la probabilità di eseguire in modo corretto il primo quesito sia 0.5, quella di eseguire in modo corretto il secondo sia 0.6, mentre la probabilità di eseguire in modo corretto il terzo quesito sia 0.3 . Calcolare:
(i) la probabilità che un candidato superi la prova;
(ii) la probabilità che abbia svolto il quesito sulla v.a. geometrica, sapendo che ha superato la prova;
(iii) la probabilità di superare la prova, dato che non ha scelto il quesito sulla v.a. di Poisson.

2. Si consideri la v.a. bidimensionale discreta $(X, Y) \in \{-1, 0, 1\} \times \{0, 1\}$ con densità:

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } (x, y) = (0, 0),\ (x, y) = (-1, 1),\ (x, y) = (1, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y; si tratta di distribuzioni note?
(ii) Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$, $E(Y^2)$ e $cov(X, Y)$; X e Y sono v.a. stocasticamente indipendenti?
(iii) Si lancia 300 volte una moneta, truccata in modo che la probabilità che esca Testa in ciascun lancio sia $p = P(Y = 1) \cdot 10^{-2}$; se N rappresenta il numero di Teste uscite, calcolare approssimativamente $P(N > 1)$.
(iv) Siano W e V v.a. indipendenti, con la stessa distribuzione geometrica di parametro $p = P(Y = 1)$; trovare la distribuzione di $Z = \min(W, V)$ e calcolare $P(W/2 \geq V)$.
(v) Se W e V sono le v.a. del punto (iv), calcolare $P(W + V \leq 3|V = 1)$.

Soluzioni della prima prova di esonero di CPS a.a. 2021/2022

1. Indichiamo con A l'evento che il candidato supera la prova e con Q_i l'evento che il candidato scelga il quesito $i \in \{1,2,3\}$.
(i) Per il teorema delle probabilità totali, si ha:

$$P(A) = P(A|Q_1)P(Q_1) + P(A|Q_2)P(Q_2) + P(A|Q_3)P(Q_3)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{3}{10}\right) = \frac{7}{15} = 0.4666667\ .$$

(ii) per il teorema di Bayes:

$$P(Q_3|A) = \frac{P(A|Q_3)P(Q_3)}{P(A)} = \frac{0.3 \cdot \frac{1}{3}}{7/15} = \frac{3}{14} = 0.2142857\ .$$

(iii) Occorre calcolare $P(A|Q_1^C)$; risulta:

$$P(A|Q_1^C) = \frac{P(A \cap Q_1^C)}{P(Q_1^C)};$$

siccome $A \cap Q_1^C = A \cap (Q_2 \cup Q_3) = (A \cap Q_2) \cup (A \cap Q_3)$, si ha:

$$P(A \cap Q_1^C) = P(A|Q_2)P(Q_2) + P(A|Q_3)P(Q_3).$$

Quindi:

$$P(A|Q_1^C) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}\right) / (2/3)$$

$$= \frac{9}{20} = 0.45\ .$$

2. (i) Si ha:

$$P(X=-1, Y=0) = 0,\ \ P(X=-1, Y=1) = 1/3;$$

$$P(X=0, Y=0) = 1/3,\ \ P(X=0, Y=1) = 0;$$

$$P(X=1, Y=0) = 0,\ \ P(X=1, Y=1) = 1/3.$$

Allora:

$$P(X=-1) = P(X=-1, Y=0) + P(X=-1, Y=1) = 0 + 1/3 = 1/3;$$

$$P(X=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) = 1/3 + 0 = 1/3;$$

$$P(X=1) = P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) = 0 + 1/3 = 1/3.$$

Pertanto, X è uniformemente distribuita in $\{-1, 0, 1\}$. Inoltre:

$$P(Y=0) = P(X=-1, Y=0) + P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) = 0 + 1/3 + 0 = 1/3;$$

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= P(X=-1, Y=1) + P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1) \\ &= 1/3 + 0 + 1/3 = 2/3. \end{aligned}$$

Pertanto, Y ha distribuzione di Bernoulli di parametro $p = 2/3$.
(ii) Si ha:

$$E(X) = (-1) \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 = 0, \ E(Y) = p = 2/3;$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot 1/3 + 0^2 \cdot 1/3 + 1^2 \cdot 1/3 = 2/3,$$

$$E(Y^2) = var(Y) + E^2(Y) = p(1-p) + p^2 = p = 2/3.$$

Per calcolare la covarianza di (X, Y) occorre prima calcolare la media di $Z = XY$; osserviamo che Z può assumere valori nell'insieme $\{-1, 0, 1\}$ con probabilità:

$$P(Z = -1) = P(X = -1, Y = 1) = 1/3,$$

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + P(X=-1, Y=0) + P(X=1, Y=0) \\ &= 1/3 + 0 + 0 + 0 = 1/3, \ P(Z=1) = P(X=1, Y=1) = 1/3. \end{aligned}$$

Quindi, anche Z è uniformemente distribuita in $\{-1, 0, 1\}$, per cui $E(XY) = E(Z) = 0$.
Dunque $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$.
Però X e Y non sono indipendenti, poiché, ad esempio

$$1/3 = P(X=1, Y=1) \neq P(X=1)P(Y=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

(iii) La v.a. N ha distribuzione binomiale di parametri $(300, \frac{2}{3} \cdot 10^{-2})$; per l' approssimazione di Poisson, si ha $P(N > 1) \approx P(U > 1)$, dove $U \sim \ Poisson(\lambda)$, con $\lambda = np = 300 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^{-2} = 2$; quindi $P(N > 1) \approx 1 - P(U = 0) - P(U = 1) = 1 - 3e^{-2}$.
(iv) Se $Z = \min(W, V)$, risulta, per l'indipendenza di W e V :

$$P(Z > n) = P(W > n, V > n) = P(W > n)P(V > n)$$

$$= P(W + 1 > n + 1)P(V + 1 > n + 1) = \left[(1 - 2/3)^{n+1}\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{n+1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1};$$

quindi $P(Z > n) = P(Z + 1 > n + 1) = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$, per cui $Z + 1$ ha distribuzione geometrica modificata di parametro $8/9$, ovvero Z ha distribuzione geometrica di parametro $8/9$.
Si ha, per l'indipendenza di W e V :

$$P(W/2 \geq V) = P(W \geq 2V) = \sum_{k=0}^{\infty} P(U \geq 2k)P(V = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{3k} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{27}\right)^{k} = \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{26} = \frac{9}{13} \ .$$

(Abbiamo usato il fatto che che $W + 1$ ha distribuzione geometrica modificata e quindi $P(W \geq 2k) = P(W > 2k - 1) = P(W + 1 > 2k) = (1/3)^{2k}$)
(v) Si ha:

$$P(W + V \leq 3 | V = 1) = \frac{P(W + V \leq 3, V = 1)}{P(V = 1)} = \frac{P(W \leq 2) P(V = 1)}{P(V = 1)}$$

$$= P(W \leq 2) = P(W = 0) + P(W = 1) + P(W = 2) = \frac{2}{3}(1 + 1/3 + 1/9) = \frac{26}{27} = 0.9629630 \ .$$