

Esercizi per casa su aspettazione condizionale

1. Provare che, per ogni v.a. X integrabile:

$$\text{Var}[E(X|\mathcal{G})] \leq \text{Var}(X)$$

dove, come di consueto, $\text{Var}(Z) = E(Z - E(Z))^2 = E(Z^2) - E^2(Z)$.

[Suggerimento: utilizzare la disug. di Jensen: se ϕ è una funzione convessa tale che $\phi(X) \in L^1(\Omega, P)$, allora $\phi(E(X|\mathcal{G})) \leq E(\phi(X)|\mathcal{G})$].

2. Siano \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 due σ -algebre. Se $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, e X è integrabile, abbiamo già visto che:

$$E[E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1] = E(X|\mathcal{G}_1) \quad \text{q.c.}$$

Provare anche che:

$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \Rightarrow E[E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2] = E(X|\mathcal{G}_1) \quad \text{q.c.}$$

ovvero, prendendo la doppia media condizionale in qualsiasi ordine, torna sempre la media condizionale rispetto alla σ -algebra più piccola.