Esercizi su leggi Gaussiane

1. Siano X e Y v.a. indipendenti e con distribuzione normale standard. Trovare le densità di $(X, X+Y)$ e $(X, X\sqrt{2})$. Mostrare che queste due variabili aleatorie bidimensionali hanno le stesse distribuzioni marginali.

2. Siano X_1 e $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ e indipendenti. Posto $Y_1 = X_1 - X_2$ e $Y_2 = X_1 + X_2$, mostrare che Y_1 e Y_2 sono indipendenti. E se fosse $Y_1 = \frac{1}{2}X_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}X_1,\ Y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$?

3. (trasformata di Laplace di un vettore Gaussiano)
Si consideri in $\mathbb{R}^n$ il vettore aleatorio Gaussiano $X \sim \mathcal{N}(b, C)$, ovvero con vettore delle medie b e matrice di covarianza C; mostrare che $\forall \theta \in \mathbb{R}^n$

$$E(e^{<\theta,X>}) = e^{<\theta,b>} e^{\frac{1}{2}<C\theta,\theta>}$$

4. Sia $x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, trovare la densità di $Y = e^X$ (legge lognormale). Calcolare inoltre i momenti di Y.

5. Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Calcolare $E(e^{tX^2}),\ t > 0$.

6. Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. Gaussiane m-dimensionali tali che $X_n \sim \mathcal{N}(b_n, \Gamma_n)$. Supponiamo che, per $n \to \infty$, $b_n \to b$ e $\Gamma_n \to \Gamma$. Mostrare che X_n converge in legge ad un vettore Gaussiano di legge $\mathcal{N}(b, \Gamma)$.

7. (esempio di v.a. Gaussiane la cui legge congiunta non è Gaussiana - *ciò accade poiché X e Y non sono indipendenti*).
Siano X, Z v.a. indipendenti con $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $P(Z = 1) = P(Z = -1) = \frac{1}{2}$. Sia $Y = XZ$. Mostrare che:
(i) $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$
(ii) $X + Y$ non ha distribuzione normale
(iii) Il vettore aleatorio (X, Y) non è normale.

Soluzioni degli Esercizi su leggi Gaussiane

1. Il vettore aleatorio $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, I)$.
(i)

$$(X, X+Y)^T = A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\begin{pmatrix} X \\ X+Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, AIA^T)$$

Ma

$$\Gamma' = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e $det(\Gamma') = 1$. La densità di $(X, X+Y)$ è:

$$g(\mathbf{y}) = g(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi \cdot 1}\exp(-\frac{1}{2} < (\Gamma')^{-1}(\mathbf{y}), \mathbf{y} >)$$

oppure:

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(y_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(y_1-m_1)(y_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$$

Da

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov(Y_1, Y_2) \\ cov(Y_1, Y_2) & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

si ottiene $\sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 2,\ cov(Y_1, Y_2) = 1$;

$$\rho = \frac{cov(Y_1, Y_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ m_1 = m_2 = 0.$$

Allora:

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}\sqrt{1/2}}\cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{1}{2\cdot(1/2)}\left[y_1^2 - \sqrt{2}\frac{y_1 y_2}{\sqrt{2}} + \frac{y_2^2}{2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\{-(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2/2)\}$$

e risulta:

$$Y_1 \sim \mathcal{N}(0, 1),\ Y_2 \sim \mathcal{N}(0, 2).$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} X \\ \sqrt{2}X \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$BB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Siccome $det(BB^T) = 0$, il vettore aleatorio $(X, \sqrt{2}X)$ non ha densità. Però, le marginali di $(X, \sqrt{2}X)$ hanno leggi $\mathcal{N}(0,1)$ e $\mathcal{N}(0,2)$, essendo $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 2$; stavolta, $\rho = \frac{\sqrt{2}}{1 \cdot \sqrt{2}} = 1$. Chiaramente, sia nel caso (i) che (ii), le componenti **non** sono indipendenti, essendo $\rho \neq 0$.

2. (i) Si ha:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, AIA^T)$$

$$\Gamma' = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi $\rho = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 2$. Dunque, Y_1 e Y_2 sono indipendenti ed hanno legge Gaussiana di parametri $(0, 2)$.
(ii) Si ha:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma' = BB^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, I)$$

Notare che B è una matrice ortogonale, cioè $B^{-1} = B^T$, ovvero $B^T B = BB^T = I$, precisamente B rappresenta una *rotazione* antioraria di $\pi/3$.
Ricordiamo che una rotazione antioraria di un angolo θ è rappresentata da:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ detB = 1$$

Una rotazione oraria di un angolo θ è rappresentata da:

$$B' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ detB' = 1$$

3. Poniamo:

$$\phi(\theta) = E\left(e^{i<\theta,\mathbf{X}>}\right) \text{ funzione caratteristica}$$

$$\psi(\theta) = E\left(e^{<\theta,\mathbf{X}>}\right) \text{ trasformata di Laplace}$$

Risulta $\psi(\theta) = \phi(-i\theta)$. Siccome per $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{b}, C)$ vale

$$\phi(\theta) = e^{i<\theta,\mathbf{b}>} e^{-\frac{1}{2}<C\theta,\theta>},$$

allora:

$$\psi(\theta) = \phi(-i\theta) = e^{<\theta,\mathbf{b}>} e^{-\frac{1}{2}<C(-i\theta),-i\theta>}$$

Ma:

$$< C(-i\theta), -i\theta >= (-i)(-i) < C\theta, \theta >= - < C\theta, \theta >$$

per cui la trasformata di Laplace del vettore Gaussiano $X \sim N(\mathbf{b}, C)$ è:

$$\psi(\theta) = e^{<\theta,\mathbf{b}>} e^{\frac{1}{2}<C\theta,\theta>}$$

4. Se $Y = e^X$, si ha per $y > 0$, $P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y)$. Derivando, si ottiene la densità di Y :

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \cdot \frac{1}{y}$$

da cui:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Si ha poi:

$$\psi(t) = E\left(e^{tY}\right) = \int_o^{+\infty} e^{ty} f_Y(y) dy$$

e $E(Y^k) = \psi^{(k)}(0)$.
Oppure, si può procedere nel modo seguente:

$$E(Y^k) = E\left(\left(e^X\right)^k\right) = E\left(e^{kX}\right) = \psi_X(k)$$

che, per l' Esercizio 3, è uguale a:

$$e^{\mu k} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}$$

Dunque, per $k = 1$ si ottiene:

$$E(Y) = e^{\mu k} e^{\frac{1}{2}\sigma^2} = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

Per $k = 2$ si ottiene:

$$E(Y^2) = e^{2\mu} e^{\frac{1}{2}\cdot 4\sigma^2} = e^{2(\mu+\sigma^2)}$$

Infine:

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = e^{2(\mu+\sigma^2)} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{(2\mu+\sigma^2)}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

5. Si ha:

$$E\left(e^{tX^2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

La funzione integranda si può scrivere come:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2\sigma^2 t x^2\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[x^2(1 - 2\sigma^2 t) - 2\mu x + \mu^2]\}$$

L'integrale, chiaramente, diverge se $1 - 2\sigma^2 t \leq 0$, ovvero $t \geq \frac{1}{2\sigma^2}$. Se invece $t < \frac{1}{2\sigma^2}$:

$$[\quad] = \left(x\sqrt{1-2\sigma^2 t} - \frac{\mu}{\sqrt{1-2\sigma^2 t}}\right)^2 - \frac{2\sigma^2\mu^2 t}{1-2\sigma^2 t}$$

e quindi

$$E\left(e^{tX^2}\right) = e^{-\frac{2\sigma^2\mu^2 t}{1-2\sigma^2 t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x\sqrt{1-2\sigma^2 t} - \frac{\mu}{\sqrt{1-2\sigma^2 t}}\right)^2} dx$$

Effettuando la sostituzione $x\sqrt{1-2\sigma^2 t} = y$, si trova che l'integrale vale $1/\sqrt{1-2\sigma^2 t}$ ed infine:

$$E\left(e^{tX^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-2\sigma^2 t}} e^{-\frac{2\sigma^2\mu^2 t}{1-2\sigma^2 t}},\ t < \frac{1}{2\sigma^2}$$

6. Per il Teorema di Levy, la convergenza in legge equivale alla convergenza delle funzioni caratteristiche. Si ha:

$$\phi_{X_n}(\theta) = e^{i<\theta,\mathbf{b}_n>} e^{-\frac{1}{2}<\Gamma_n\theta,\theta>}$$

che, per $n \to \infty$, tende a

$$e^{i<\theta,\mathbf{b}>} e^{-\frac{1}{2}<\Gamma\theta,\theta>} = \phi_X(\theta),$$

con $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{b}, \Gamma)$. Pertanto, X_n converge in legge ad $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{b}, \Gamma)$.

7. (i) Si ha:

$$P(Y \leq t) = P(XZ \leq t) = P(XZ \leq t, Z = 1) + P(XZ \leq t, Z = -1)$$

$$= P(X \leq t, Z = 1) + P(-X \leq t, Z = -1) =$$

(per l'indipendenza di X e Z)

$$= P(X \leq t)P(Z = 1) + P(X \geq -t)P(Z = -1) = \frac{1}{2}[P(X \leq t) + P(X \geq -t)] =$$

$$= \frac{1}{2}[\Phi(t) + 1 - \Phi(-t)] = \frac{1}{2}[\Phi(t) + 1 - (1 - \Phi(t))] = \frac{1}{2}[2\Phi(t)] = \Phi(t) = P(X \leq t) = \Phi(t)$$

(qui $\Phi(t)$ è la funzione di distribuzione della v.a. Gaussiana standard.)
Dunque, anche $Y \sim N(0,1)$.
(ii) Calcoliamo la funzione caratteristica di $X+Y$; si ha:

$$\phi_{X+Y}(t) = E\left(e^{it(X+Y)}\right) = E\left(e^{it(X+XZ)}\right) = E\left(e^{itX(1+Z)}\right) =$$

$$= E\left(e^{itX(1+Z)}\mathbf{1}_{\{Z=1\}}\right) + E\left(e^{itX(1+Z)}\mathbf{1}_{\{Z=-1\}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}E\left(e^{2itX}\right) + \frac{1}{2}E\left(e^{0\cdot itX}\right) = \frac{1}{2}\phi_X(2t) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-2t^2} + \frac{1}{2}\ .$$

Questa **non** è la funzione caratteristica di una v.a. normale, che è del tipo $e^{i\mu t}e^{\sigma^2 t^2/2}$.
(iii) Il vettore aleatorio (X,Y) non può essere Gaussiano: se lo fosse $X+Y$ sarebbe normale, essendo, ad esempio, $X+Y$ la prima marginale di

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

e considerato il fatto che una trasformazione lineare di un vettore Gaussiano è ancora un vettore Gaussiano, come pure lo sono le sue componenti.