Alcuni Teoremi sulle funzioni continue e uniforme continuità

Teorema 0.
Una funzione $f(x)$ è continua in x_0 se e solo se per ogni sucessione $\{x_n\} \subset dom(f)$ con $x_n \to x_0 \in dom(f)$, risulta $f(x_n) \to f(x_0)$.

(Non è altro che il Teorema *ponte* per i limiti, scritto per funzioni contiunue, cioè tenendo conto che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$).

Teorema 1. (della permanenza del segno)
Se $f(x)$ è continua in x_0 e $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno $I(x_0)$ t.c. $\forall x \in I(x_0)$ risulta $f(x) > 0$. Se $f(x_0) < 0$, allora esiste un intorno di x_0 ove $f(x) < 0$.

Dim. Dalla defizione di continuità segue che $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno $I(x_0)$ t.c. se $x \in I(x_0)$ risulta

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

Se $f(x_0) > 0$, basta scegliere $\varepsilon = f(x_0)/2$ e la parte sinistra della doppia disuguaglianza di sopra fornisce $f(x) > f(x_0)/2 > 0$ $\forall x \in I(x_0)$.
Se $f(x_0) < 0$, scegliendo $\varepsilon = -f(x_0)/2$, la parte destra della doppia disuguaglianza di sopra fornisce $f(x) < f(x_0)/2 < 0$ $\forall x \in I(x_0)$. ∎

Teorema 2. (degli zeri)
Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) = 0$.

Dim. (i) $f(a) > 0,\ f(b) < 0$.
Consideriamo l'insieme $A = \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}$ (cioé l'insieme di tutte le $x \in [a, b]$ per cui $f(x) > 0$). Poniamo $x_0 = \sup A$; mostriamo che $f(x_0) = 0$. Infatti, se fosse $f(x_0) > 0$, per il Teorema della permanenza del segno esisterebbe un intorno I di x_0 ove $f(x) > 0$; in particolare, nella parte destra dell'intorno, cioé a destra del $\sup A$, sarebbe $f(x) > 0$, e questo contraddice la definizione di $\sup$.
Analogamente, se fosse $f(x_0) < 0$, sempre per il Teorema della permanenza del segno esisterebbe un intorno I di x_0 ove $f(x) < 0$; in particolare, nella parte sinistra dell'intorno, cioé nell'interno di A sarebbe $f(x) > 0$, e questo contraddice la definizione dell'insieme A.
(ii) $f(a) < 0,\ f(b) > 0$.
Consideriamo la funzione $g(x) = -f(x)$ anch'essa continua in $[a, b]$. La funzione $g(x)$ soddisfa le ipotesi di (i) per cui esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $g(x_0) = 0$, il che implica anche ovviamente $f(x_0) = 0$. ∎

Osservazione Il Teorema 2 afferma che esiste uno zero di $f(x)$ (un punto in cui il grafico di $f(x)$ attraversa l'asse delle ascisse). Se la funzione $f(x)$ non è monotona in $[a, b]$, esso non è necessariamente unico. Infatti, se $f(x)$ ha comportamento oscillante in $[a, b]$ nelle stesse ipotesi del Teorema, $f(x)$ si può annullare più di una volta. Mentre, se la funzione è ad esempio decrescente (caso (i)), una volta azzeratasi, dovendo continuare a decrescere fino a raggiungere $f(b) < 0$, non può più azzerarsi in $[a, b]$.

Teorema 3. (dei valori intermedi)
Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$, siano $x_1 < x_2$ due punti di $[a, b]$, e t è un numero reale tale che $f(x_1) < t < f(x_2)$; allora esiste $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tale che $f(\bar{x}) = t$.

Dim. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - t$ che è anch'essa continua in $[x_1, x_2]$. Si ha $g(x_1) = f(x_1) - t < 0$ (poiché $f(x_1) < t$) e $g(x_2) = f(x_2) - t > 0$ (poiché $f(x_2) > t$). Dunque la funzione $g(x)$ soddisfa alle ipotesi del Teorema degli zeri relativamente all'intervallo $[x_1, x_2]$ e si conclude che esiste $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $g(x_0) = 0$, ovvero $f(x_0) = t$. ∎

Osservazione Il Teorema 3 afferma che una funzione continua assume esattamente tutti i numeri compresi tra due valori assunti, ovvero che l'immagine di un intervallo $[a, b]$ è a sua volta un intervallo.

Teorema 4. (di Weierstrass)
Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$; allora esistono il massimo ed il minimo assoluto di $f(x)$ in $[a, b]$.

Dim. Intanto $J = f([a, b])$ è un intervallo per il Teorema dei valori intermedi. Per dimostrare il Teorema di Weierstrass, basta provare che (i) J è limitato; (ii) J è chiuso. Infatti da (i) segue che $\Lambda = \sup J < +\infty$ e $\lambda = \inf J > -\infty$. Siano ora α_n una successione a valori in J, decrescente e convergente a λ e β_n una successione a valori in J, crescente e convergente a Λ. Per la (ii) J risulta chiuso, qundi i due limiti λ e Λ devono appartenere a J, per cui esistono $\max J = \sup J = \Lambda$ e $\min J = \inf J = \lambda$, ovvero il massimo e minimo assoluti di $f(x)$ in $[a, b]$.

Proviamo allora (i) e (ii).
(i) *J è limitato.*
Supponiamo che J non è limitato (per esempio superiormente), allora esiste una successione $\{y_n\} \subset J$ con $y_n \to +\infty$. In corrispondenza di y_n esiste una successione $\{x_n\} \subset [a, b]$ tale che $y_n = f(x_n)$; siccome $\{x_n\}$ è limitata, da essa si può estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ convergente ad un certo $\bar{x} \in [a, b]$ (poiché $[a, b]$ è chiuso). D'altra parte, essendo $f(x)$ continua, segue che $y_{k_n} = f(x_{k_n}) \to f(\bar{x}) = \bar{y} \in J$. Dunque, esiste una sottosuccessione di $\{y_n\}$ convergente ad un elemento di J. Ciò è assurdo, poichè da una successione divergente non si può estrarre alcuna sottosuccessione convergente.
Se J non è limitato inferiormente, si procede in modo analogo, prendendo una successione $\{y_n\}$ divergente a $-\infty$.
(ii) *J è chiuso.*
Sia $\{y_n\} \subset J$ con $y_n \to \bar{y}$; occorre mostrare che $\bar{y} \in J$. In corrispondenza di $\{y_n\}$ esiste $\{x_n\} \subset [a, b]$ tale che $y_n = f(x_n)$. Siccome $\{x_n\}$ è limitata (per (i)), esiste una sua sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ convergente ad un certo $\widehat{x} \in [a, b]$ (essendo $[a, b]$ chiuso). Poichè f è continua, risulta $f(x_{k_n}) = y_{k_n} \to f(\widehat{x}) = \widehat{y} \in J = f([a, b])$. Per l'unicità del limite, deve aversi $\bar{y} = \widehat{y} \in J$. ∎

Uniforme continuità

Definizione 1 Sia $E \subset \mathbb{R}$; una funzione $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *uniformemente contina* in E se per ogni $\epsilon > 0$ si può determinare in sua corrispondenza un numero $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, dipendente solo da ϵ e tale che per ogni coppia di punti $x, x_0 \in E$ con $|x - x_0| < \delta$ risulta $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Osservazione 1
La differenza tra questa definizione e quella di funzione continua in x_0 è che la continuità richiede che il δ scelto in corrispondenza di $\epsilon > 0$ possa dipendere, oltre che da ϵ, anche da x_0. Inoltre, la uniforme continuità implica la continuità, mentre non è vero il viceversa. Per illustrare ciò, consideriamo i seguenti esempi.

Esempio 1
$f(x) = x^2$ è uniformemente continua in $E = (0, 1)$.
Infatti, fissato $\epsilon > 0$, risulta, per $x, x_0 \in (0, 1)$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < 2|x - x_0|$$

Dunque, imponendo che $2|x - x_0| < \epsilon$, risulta $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ non appena $|x - x_0| < \delta < \epsilon/2$ (per esempio, basta prendere $\delta = \delta(\epsilon) = \epsilon/4$.) Osserviamo che il δ trovato dipende solo da ϵ, è indipendente da $x_0 \in (0, 1)$.

Esempio 2
$f(x) = \frac{1}{x}$ non è uniformemente continua in $E = (0, 1)$ (nonostante sia ivi continua).
Sia $a > 0$, cominciamo col mostrare che f è uniformemente continua in $(a, 1)$, ma questa proprietà viene perduta quando si fa tendere a a zero. Dunque, per $x, x_0 > a > 0$, si ha:

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{xx_0} < \frac{|x - x_0|}{a^2}$$

e quindi $|1/x - 1/x_0| < \epsilon$ non appena $|x - x_0| < \delta < \epsilon a^2$, per esempio $\delta = \epsilon a^2/2$. Pertanto f risulta niformemente continua in $(a, 1)$.
Se ora, però, facciamo tendere a a zero, si ottiene che $\delta < \epsilon a^2 \to 0$, ovvero risulta $\delta = 0$; ciò significa che siamo impossibilitati a trovare un δ dipendente solo da ϵ e **positivo** per cui valga laproprietà. Ne segue che f non è uniformemente continua in $(0, 1)$. Il motivo risiede essenzialmente nel fatto che, per $x \to 0^+$, $f(x)$ diverge a $+\infty$ (c' è l' asintoto verticale); pertanto, se x e x_0 sono prossimi a 0, anche prendendoli molto vicini tra loro, la differenza delle immagini risulterà grande. Per far in modo che tale differenza sia piccola, dovremmo prendere $\delta = 0$, cioé $x = x_0$.

Osservazione 2
L'uniforme continuità di una funzione f in un insieme dipende dall'insieme stesso: f può essere uniformemente continua in un insieme, e non uniformemente continua in un altro (vedi esempio precedente).

Osservazione 3
La continuità uniforme di $f(x)$ in un insieme E equivale a dire che, per ogni fissato $\epsilon > 0$, è possibile trovare un numero $\delta > 0$ e partizionare E mediante un numero finito di intervallini $I_k,\ k = 1, \ldots, n$, di lunghezza δ, in modo che in ciascuno di questi intervallini l'oscillazione di f sia minore di ϵ, ovvero risulti $\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f < \epsilon$.

Definizione 2
Sia $E \subset \mathbb{R}$; una funzione $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice Lipschtziana in E se esiste $L > 0$ tale che $\forall x_1, x_2 \in E$ risulta $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$.

Osservazione 4
Dire che f è Lipschtziana in E significa dire che $\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|} < L$, ovvero che i rapporti incrementali di f sono limitati. Quindi, se f è derivabile, esistendo finiti i limiti dei rapporti incrementali, questi sono sicuramente limitati, per cui una funzione derivabile in E è sicuramente Lipschtziana in E. Bastando però la limitatezza dei rapporti incrementali (e non essendo necessaria l'esistenza del limite), risulta per esempio Lipschtziana la funzione $|x|$ (anche se essa non è derivabile in $x = 0$).

Osservazione 5
Se f è Lipschtziana in E, allora è uniformemente continua in E; infatti per $\epsilon > 0$ e $x_1, x_2 \in E$, si ha $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ non appena $|x_1 - x_2| < \epsilon/L$ e quindi si può prendere ad esempio $\delta = \epsilon/(2L)$.

Definizione 3
Sia $E \subset \mathbb{R}$; una funzione $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice Holderiana in E di ordine $\alpha \in (0, 1)$ se esiste $L > 0$ tale che $\forall\ x_1, x_2 \in E$ risulta $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|^\alpha$.

Esempio 3
Come è facile verificare $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|}$, ovvero $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ è Holderiana di esponente $1/2$ (qui $L = 1$). Analogamente, se $0 < \gamma < 1,\ f(x) = x^\gamma$ è Holderiana di ordine γ.

Osservazione 6
Se f è Holderiana di ordine α in E, allora è uniformemente continua in E; infatti per $\epsilon > 0$ e $x_1, x_2 \in E$, si ha $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ non appena $|x_1 - x_2|^\alpha < \epsilon/L$ e quindi si può prendere ad esempio $\delta = [\epsilon/(2L)]^{1/\alpha}$.

Teorema (Heine-Cantor)
Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$, allora essa è ivi uniformemente continua.

Dim. Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua in $[a, b]$. Allora, dovrebbe esistere $\epsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono due numeri $u, v \in [a, b]$ con $|u-v| < \delta$ e $|f(u)-f(v)| \geq \epsilon$. Scegliendo successivamente $\delta = 1,\ 1/2,\ 1/3, \ldots$ si verrebbero a costruire due successioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ a valori in $[a, b]$, tali che $|u_n - v_n| < 1/n$ e

$$|f(u_n) - f(v_n)| \geq \epsilon \qquad (*)$$

Siccome le successioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ sono limitate, esistono sottosuccessioni $\{u_{k_n}\}$ e $\{v_{k_n}\}$ convergenti, diciamo, rispettivamente a $\bar{u}$, $\bar{v} \in [a, b]$ (essendo $[a, b]$ chiuso i limiti di successioni a valori in $[a, b]$ non possono stare fuori di esso). Ma $\bar{u} = \bar{v}$; infatti $|\bar{u} - \bar{v}| \leq |\bar{u} - u_{k_n}| + |u_{k_n} - v_{k_n}| + |v_{k_n} - \bar{v}|$ e ognuno dei tre valori assoluti si può rendere arbitrariamente piccolo per n definitivamente grande, poichè $u_{k_n} \to \bar{u}$, $v_{k_n} \to \bar{v}$ e $|u_n - v_n| < 1/n$; dunque deve essere $|\bar{u} - \bar{v}| = 0$, cioè $\bar{u} = \bar{v}$.
Siccome f è continua, risulta:

$$\lim_{n\to\infty} |f(u_{k_n}) - f(v_{k_n})| = |f(\bar{u}) - f(\bar{u})| = 0$$

che contraddice (*). La contraddizione deriva dall'aver supposto che f non sia uniformemente continua, per cui concludiamo che f è uniformemente continua. $\blacksquare$