Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica A.A. 2020/21
Processi stocastici e analisi di serie temporali

PROVA DI ESONERO SUI PROCESSI DI MARKOV
1 Dicembre 2020

Punteggi: **1**: $1+4+1+2+1+1$; **2**: 4×2.5; **3**: 6×1.66; totale $= 30$.

Esercizio 1. Sia

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

e si consideri la CM omogenea X_n su $E = \{1, 2, 3\}$ con matrice delle probabilità di transizione P.
(i) Classificare gli stati della CM e trovare eventuali stati periodici, specificandone il periodo.
(ii) Scrivere esplicitamente la matrice delle probabilità di transizione in n passi, P^n, per ogni intero positivo n.
(iii) Trovare la distribuzione iniziale $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ della CM, sapendo che $\mu_2 = 1/4$ e che $P(X_2 = 2) = 1/3$.
(iv) Trovare la/e distribuzione/i invariante/i e quella stazionaria, se esiste.
Dire, giustificando la risposta, se è ben definito il tempo T_i di primo ritorno nello stato $i \in \{1, 2, 3\}$ e se esso ha media finita; in tal caso, calcolare $[E(T_1)]^3 - [E(T_2) - E(T_3)]^2$.
(v) Trovare il minimo valore di n per cui $\left| p_{32}^{(n)} - \frac{1}{3} \right| < 10^{-4}$.
(vi) Stimare, per k grande, $P\left(X_{7^k} = 2,\ X_{7^k-2} = 1\right)$. Si tratta di una probabilità inferiore o maggiore al 12%?

Esercizio 2. Si consideri una coda $M/M/n$ ove gli arrivi avvengono in accordo con un processo di Poisson N_t con intensità $\lambda = 1$ e il tempo di servizio ha distribuzione esponenziale di parametro $\mu = 1/2$. Sia $X(t)$ il numero di clienti presenti nel sistema al tempo $t \geq 0$. Discutere l'esistenza della distribuzione stazionaria π.
(i) Trovare il numero minimo n di serventi, in modo che il tempo medio W che un cliente trascorre nel sistema, in regime stazionario, sia minore o uguale a $\frac{26}{9}$.
(ii) Per il valore di n trovato, calcolare il tempo medio W_c che un cliente trascorre in coda, il numero medio L_c di clienti in coda, ed il numero medio di clienti presenti nel sistema, in regime stazionario.
(iii) Quanto vale π_0, ovvero la probabilità che, in regime stazionario, siano presenti zero clienti nel sistema? E π_1?
(iv) Si consideri un processo di Poisson omogeneo $Z(t)$ con intensità λ, che parte da $Z(0) = 2$. Sapendo che $P(Z(1) = 3) = 3e^{-3}$, trovare la distribuzione del primo istante, τ, in cui $Z(\tau) = 5$, e calcolare $E[(\tau)^2]/[E(\tau) + 1]$.

Esercizio 3. Si consideri la CM a tempo continuo, omogenea, con spazio degli stati

$E = \{1,2,3\}$ e avente per generatore la matrice:

$$Q = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & -a & b \\ a-b & b & -a \end{pmatrix}$$

con $a \geq b \geq 0$.
(i) Detto R_i il tempo residuo di permanenza nello stato i, si sa che $P(R_2 \leq 1) = 1 - e^{-2}$; trovare a e b, e verificare che $E(R_1) + 1/E(R_2) + E(R_3) = 9/2$.
(ii) Trovare la/e distribuzione/i invariante/i e, se esiste, quella stazionaria π, per la CM associata a Q con i valori di a e b trovati.
(iii) Calcolare approssimativamente le probabilità di transizione $p_{ij}(t)$ al tempo $t = 0.01$.
(iv) Posto $V = \min(R_1, R_3)$, calcolare $E(V)$ e $E(V^2)$.
(v) Calcolare le probabilità di transizione $\widehat{p}_{ij}$ della CM a tempo discreto "accelerata", ottenuta trascurando il tempo di permanenza nei vari stati e trovare la distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$ associata a questa CM. C'è differenza tra $\widehat{\pi}$ e π? In caso affermativo, spiegarne il motivo.
(vi) Calcolare $\lim_{n\to\infty}\{|\widehat{p}_{ij}^{(n)} - \widehat{\pi}_j| \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\}$.

Processi stocastici e analisi di serie temporali a.a. 2020/21
Soluzioni della prova di esonero 1 Dicembre 2020

1. **(i)** Come si vede facilmente, gli stati sono tutti ricorrenti e formano un'unica classe; non vi sono stati periodici poichè sia P^2 che P^3 sono strettamente positive, ed essendo 2 e 3 primi tra loro, segue che nessun stato è periodico.
(ii) Gli autovalori di P sono: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1/3,\ \lambda_3 = 0$.
Dunque, $\forall\ (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ si ha:

$$p_{ij}^{(n)} = A_{ij} + B_{ij} \cdot (1/3)^n + C_{ij} \cdot 0^n = A_{ij} + B_{ij} \cdot (1/3)^n,\ n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Per ogni valore di i e j, sostituendo in (1) $n = 1$ e $n = 2$, servendosi del fatto che

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/9 & 4/9 & 1/3 \\ 4/9 & 2/9 & 1/3 \end{pmatrix} > 0,$$

si ottengono nove semplici sistemi lineari di due equazioni nelle incognite A_{ij} e B_{ij}, le cui soluzioni forniscono i valori di A_{ij} e $B_{ij},\ i, j \in \{1, 2, 3\}$. Si trova pertanto:

$$P^n = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 - (1/3)^n & 1/3 + (1/3)^n & 1/3 \\ 1/3 + (1/3)^n & 1/3 - (1/3)^n & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Utilizzando la matrice P^2 e sapendo che $\mu_2 = 1/4$, si trova:

$$P(X_2 = 2) = \sum_{h=1}^{3} \mu_h p_{h2}^{(2)} = \frac{\mu_1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2\mu_3}{9}.$$

Imponendo che $P(X_2 = 2) = 1/3$ e mettendo a sistema con l'equazione $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, ovvero $\mu_1 + \mu_3 = \frac{3}{4}$, si ottiene un sistema nelle incognite μ_1 e μ_3 che, risolto, fornisce infine

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

(iv) La matrice P è regolare (essendo $P^2 > 0$) e bistocastica, per cui esiste la distribuzione stazionaria ed è quella uniforme sull' insieme degli stati, ovvero $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$.
Siccome la CM è ergodica, il tempo T_i di primo ritorno nello stato $i \in \{1, 2, 3\}$ è ben definito ed ha media finita; inoltre, risulta $E(T_i) = 1/\pi_i = 3$, per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$.
Dunque $[E(T_1)]^3 - [E(T_2) - E(T_3)]^2 = 3^3 - 0 = 27$.
(v) Si ha:

$$\left|p_{32}^{(n)} - \frac{1}{3}\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

e, affinché tale quantità sia minore di 10^{-4} deve essere $-n \ln 3 < -4 \ln 10$, ovvero $n > 4 \ln 10 / \ln 3 = 8.38$, da cui segue $n \geq 9$.
(vi) Si ha:

$$P(X_{7^k} = 2,\ X_{7^k-2} = 1) = P(X_{7^k} = 2 | X_{7^k-2} = 1) P(X_{7^k-2} = 1)$$

e, per l'omogeneità tale quantità è uguale a:

$$p_{12}^{(2)} \cdot P(X_{7^k-2}=1) = \frac{1}{3} \cdot P(X_{7^k-2}=1)$$

che, per k grande, vale approssimativamente $\frac{1}{3} \cdot \pi_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = 0.1111 < 0.12$. Dunque, si tratta di una probabilità di poco inferiore al 12%.

2. (i) Ricordiamo le formule valevoli per una coda M/M/n, con $\rho = \lambda/\mu < n$:

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{\pi_0}{k!}\rho^k, & k \le n \\ \frac{\pi_0 \rho^k}{n! n^{k-n}}, & k \ge n+1 \end{cases}$$

$$\pi_0 = \Big[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\Big]^{-1}$$

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}\Big[\frac{\pi_0 \rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2}\Big].$$

Nel nostro caso, risulta $\lambda = 1$ e $\mu = 1/2$, per cui $\rho = \lambda/\mu = 2$; la condizione per l'esistenza della distribuzione stazionaria è $\rho < n$, pertanto deve essere $n \ge 3$.
Si tratta allora di trovare $n \ge 3$ in modo che risulti $W = \frac{26}{9}$. Conviene procedere per tentativi;
per $n = 3$ si ha

$$\pi_0 = \Big[\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{k!} + \frac{2^4}{3!(3-2)}\Big]^{-1} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

e

$$W = 2 + \Big[\frac{\pi_0 \cdot 2^4}{2!(3-2)^2}\Big],$$

che risulta essere proprio uguale a $\frac{26}{9}$. Quindi, bastano $n = 3$ serventi per fare in modo che $W \le \frac{26}{9}$.
(ii) Si ha dalla teoria:

$$L_c = \frac{\rho^n \pi_0}{n!} \cdot \frac{\rho/n}{(1-\rho/n)^2}$$

e, in questo caso $L_c = \frac{8}{9}$. Inoltre, dalle relazioni di Little, si ha $L = \lambda W = 1 \cdot W = \frac{26}{9}$; ancora, si ha $W_c = W - 1/\mu = \frac{26}{9} - 2 = \frac{8}{9}$.
(iii) π_0 è stato già calcolato; per π_1, si ha:

$$\pi_1 = \rho\pi_0 = 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

(iv) Poniamo $N_t = Z(t) - 2$; N_t risulta essere un processo di Poisson standard di parametro λ con $N_0 = 0$. Si ha, per $k = 0, 1, \ldots$:

$$P(Z(t) = k) = P(N_t = k-2) \text{ e } P(N_t = h) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^h}{h!} \ .$$

Risulta $P(Z(1) = 3) = P(N_1 = 1) = \lambda \cdot e^{-\lambda}$; uguagliando a $3 \cdot e^{-3}$, si trova $\lambda = 3$.

L'istante τ in cui $Z(t)$ vale 5 per la prima volta è l'istante del terzo salto per N_t, ed ha distribuzione $\Gamma(3,3)$. Pertanto, ricordando che per una v.a. U con distribuzione $\Gamma(\alpha,\gamma)$ risulta $E(U)=\alpha/\gamma$, $Var(U)=\alpha/\gamma^2$, e $E(U^2)=Var(U)+E^2(U)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma^2}$, si ottiene infine $E[(\tau)^2]/[E(\tau)+1]=2/3$.

3. (i) I tempi residui R_i di permanenza negli stati sono v.a. esponenziali indipendenti, di parametro $-q_{ii}$; precisamente R_1 ha densità esponenziale di parametro $1/2$, R_2 ed R_3 hanno densità esponenziale di parametro a. Quindi, $P(R_2 \le 1)=1-e^{-a}$ e, uguagliando a $1-e^{-2}$, si ottiene $a=2$, e quindi deve essere $b=1$.
Inoltre $E(R_1)+1/E(R_2)+E(R_3)=2+2+1/2=9/2$. Pertanto la matrice Q è:

$$Q=\begin{pmatrix}-1/2 & 0 & 1/2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

(ii) La distribuzione invariante π è soluzione dell'equazione $\pi Q=0$, con la condizione $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$, da cui si ottiene:

$$\pi=\left(\frac{2}{3},\,\frac{1}{9},\,\frac{2}{9}\right),$$

La distribuzione trovata è anche stazionaria; infatti, dal successivo punto (iii), si ottiene che $P(0.01)>0$. Quindi $P(t)$ è regolare. Alternativamente, per verificarlo si può utilizzare il fatto che gli autovalori di Q non nulli sono $\gamma_2=-3/2$ e $\gamma_3=-3$ (quindi distinti e tutti negativi) per concludere che gli autovalori $\lambda_i=e^{\gamma_i t}$ di $P(t)$, escluso $\lambda_1=1$, sono distinti ed hanno modulo strettamente minore di 1.
(iii) Si ha:

$$P(h)=Id+hQ+o(h)\quad \text{per } h\to 0$$

Pertanto, si ottiene (il calcolo è stato effettuato con SCILAB):

$$P(0.01)\approx\begin{pmatrix}0.95 & 0.02 & 0.04\\ 0.09 & 0.82 & 0.08\\ 0.09 & 0.08 & 0.82\end{pmatrix}$$

(iv) R_1 è una v.a. esponenziale di parametro $1/2$, mentre R_3 è una v.a. esponenziale di parametro 2, e sono indipendenti tra loro; ricordando che il minimo tra due v.a. esponenziali indipendenti di parametro λ e μ è esponenziale di parametro $\lambda+\mu$, si ottiene che V è esponenziale di parametro $5/2$. Quindi $E(V)=2/5$ e $E(V^2)=Var(V)+E^2(V)=4/25+4/25=8/25$.
(v) La CM discreta "accellerata" ha probabilità di transizione $\widehat{p}_{ij}=q_{ij}/(-q_{ii})$, per $i\neq j$, e $\widehat{p}_{ij}=0$ per $i=j$; pertanto:

$$\widehat{P}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

che è regolare, essendo $\widehat{P}^4>0$, e quindi esiste la distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$. Inoltre, il minimo elemento di $\widehat{P}^4$ è $\alpha=1/8$. La distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$ si ottiene risolvendo l'equazione $\widehat{\pi}\widehat{P}=\widehat{\pi}$, da cui si ricava:

$$\widehat{\pi}=\left(\frac{1}{3},\,\frac{2}{9},\,\frac{4}{9}\right)\neq\pi.$$

In realtà, la CM a tempo continuo originaria e quella "accelerata" non hanno lo stesso comportamento, in quanto i tempi medi di permanenza nei tre stati non sono tutti uguali tra loro (sono rispettivamente 2, 1/2 e 1/2) e quindi la CM spende diverse frazioni di tempo soggiornando nei diversi stati. Se tali tempi medi fossero stati uguali, le due catene avrebbero evidenziato lo stesso comportamento all'equilibrio; comunque, si può osservare che per entrambe le CM la probabilità di trovarsi nello stato 3 ad un tempo infinito è il doppio di quella di trovarsi nello stato 2.
(vi) Gli autovalori di $\widehat{P}$ sono $\widehat{\lambda}_1 = 1,\ \widehat{\lambda}_2 = \widehat{\lambda}_2 = -1/2$. Dal Teorema ergodico risulta

$$|\widehat{p}_{ij}^{(n)} - \widehat{\pi}_j| \approx \text{cost}|1/2|^n, \text{ per } n \to \infty.$$

Dunque:

$$\lim_{n\to\infty} \{|\widehat{p}_{ij}^{(n)} - \widehat{\pi}_j| \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\} = \lim_{n\to\infty} \text{cost} \cdot \frac{1}{3^n} = 0.$$