Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

Seconda prova di valutazione in itinere - 13 Giugno 2025
A.A. 2024-2025

Durata della prova 2 h
Punteggi: 1) $5+5+5+5$; **2)** $5+5$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Per $c>0$, sia
$$f(x,y) = c(y^2 - x^2)e^{-y} \cdot \mathbf{1}_E(x,y),$$
con $E = \{(x,y) : -y \le x \le y,\ y \ge 0\}$.

(i) Determinare la costante c in modo che f sia la densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) e in tal caso calcolare $P(|X| \le Y)$.

(ii) Trovare le densità marginali di X e Y.

(iii) Calcolare $Cov(X,Y)$. Le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti?

(iv) Trovare la densità congiunta del vettore aleatorio $(U,V) = (X, 2Y)$.

Esercizio 2 Per collegare un motore di un veicolo alla trasmissione si utilizza un certo tipo di frizione, la cui durata è una v.a. con distribuzione esponenziale di media 100 mesi. Ogni volta che la frizione si rompe, viene immediatamente sostituita con un altra, identica. Se si suppongono indipendenti tra di loro le durate delle diverse frizioni e trascurabili i tempi necessari per le sostituzioni, utilizzando l'approssimazione normale calcolare:

(i) la probabilità che, utilizzando 50 frizioni, un veicolo possa circolare per almeno 3000 mesi e non più di 6000;

(ii) il numero di frizioni che si dovranno utilizzare affinché un veicolo possa circolare per non meno di 5000 ore con una probabilità di almeno 0.95.

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2024-25

Soluzioni della seconda prova di valutazione in itinere - 13 Giugno 2025

Esercizio 1 (i) Si ha:

$$\int\int_E e^{-y}(y^2-x^2)dxdy = \int_0^{+\infty} e^{-y}dy \int_{-y}^{y}(y^2-x^2)dx = \cdots = 8.$$

Pertanto, deve essere $c = 1/8$. Il supporto E di $f(x,y)$ si può scrivere come $E = \{(x,y) : |x| \le y\}$.

Pertanto $P(|X| \le Y) = P((X,Y) \in E) = 1$.

(ii) Si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

Consideriamo prima il caso $x \ge 0$; allora

$$f_X(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{8}(y^2-x^2)e^{-y}dy = \cdots = \frac{1}{4}e^{-x}(x+1),\ x \ge 0.$$

Se $x \le 0$:

$$f_X(x) = \int_{-x}^{+\infty} \frac{1}{8}(y^2-x^2)e^{-y}dy = \cdots = -\frac{1}{4}e^{x}(x-1).$$

Dunque:

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}e^x(x-1) & \text{se } x \le 0 \\ \frac{1}{4}e^{-x}(x+1) & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

Come si vede, $f_X(x)$ è una funzione pari.

Si ha:

$$f_Y(y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{8}(y^2-x^2)e^{-y}dx = \cdots = \frac{1}{6}y^3e^{-y},\ y \ge 0.$$

(iii) Risulta $E(X) = 0$, poiché $f_X(x)$ è pari, mentre

$$E(Y) = \frac{1}{6}\int_0^{+\infty} y \cdot y^3 e^{-y}dy = \cdots = 4.$$

Inoltre

$$E(XY) = \frac{1}{8}\int\int_E e^{-y}xy(y^2-x^2)dxdy = \int_0^{+\infty} ye^{-y}dy \int_{-y}^{y} x(y^2-x^2)dx = 0$$

perché per ogni $y > 0$ fissato, la funzione della variabile x, $g(x) = x(y^2-x^2)$, è una funzione dispari. Pertanto $Cov(XY) = 0$. Ciononostante X ed Y non sono indipendenti.

(iv) Se $(U,V) = (X, 2Y)$, ovvero $X = U$ e $Y = V/2$, deve essere $V = 2Y \ge 2|X|$ e $V \ge 0$. La matrice Jacobiana della trasformazione inversa risulta

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e $det(J) = 1/2$.

Allora:

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2}f(u, v/2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}(v^2/4 - u^2)e^{-v/2}\cdot \mathbf{1}_E(u, v/2)$$
$$= \frac{1}{64}(v^2-4u^2)e^{-v/2}\cdot \mathbf{1}_F(u,v),$$

ove $F = \{(u,v) : v \ge 2|u|,\ v \ge 0\} = \{(u,v) : -v/2 \le u \le v/2,\ v \ge 0\}$.

Esercizio 2 Sia X la durata di una generica frizione e λ il parametro della legge esponenziale seguita da X. Per formule note si ha $100 = E[X] = 1/\lambda,\ VarX = 1/\lambda^2$, da cui $\lambda = 10^{-2}$ e $VarX = 10^4$.

(i) Per $i = 1, 2, \ldots 50$, sia X_i la durata dell' i-esima frizione. Il tempo totale di funzionamento di un veicolo è dato evidentemente da $S_{50} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}$. Si chiede di calcolare $P(3000 \leq S_{50} \leq 6000)$, cioé $P(S_{50} \leq 6000) - P(S_{50} < 3000)$. Posto $\mu = E[X_i]$ e $\sigma^2 = Var(X_i)$, dai dati si ricava $\mu = 10^2$ e $\sigma^2 = 10^4$. Dato che le X_i sono indipendenti, hanno la stessa legge e media e varianza finita (e $n = 50$ è abbastanza grande) si può applicare la formula dell' approssimazione normale, fornita dal TLC:

$$P(S_{50} \leq 6000) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq \frac{6000 - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}}\right) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq \frac{6000 - 5000}{100\sqrt{50}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq 1.41\right) \approx \Phi(1.41) = 0.921$$

ove Φ denota la f.d.d. di una v.a. normale standard; analogamente:

$$P(S_{50} \leq 3000) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq \frac{3000 - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}}\right) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq \frac{3000 - 5000}{100\sqrt{50}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq -2.83\right) \approx \Phi(-2.83) = 1 - \Phi(2.83) = 1 - 0.997 = 0.003$$

Dunque, la probabilità cercata è uguale a $0.921 - 0.003 = 0.918$.

(ii) Sia n il numero di frizioni necessarie e, per $i = 1, 2\ldots, n$ sia X_i la durata dell'i-esima frizione. In modo analogo al punto precedente, si osserva che il tempo totale di funzionamento di un veicolo è dato da $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, e si chiede che risulti $P(S_n \geq 5000) \geq 0.95$ Dalla formula dell'approssimazione normale, si ottiene

$$P(S_n \geq 5000) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{5000 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{50 - n}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \Phi((50 - n)/\sqrt{n}) = \Phi(-(50 - n)/\sqrt{n})$$

Dovrà dunque essere

$$\Phi((n - 50)/\sqrt{n}) \geq 0.95$$

D'altra parte, $0.95 = \Phi(1.65)$, pertanto, essendo Φ crescente, deve aversi

$$\frac{n - 50}{\sqrt{n}} \geq 1.65$$

Risolvendo rispetto a n la disuguaglianza precedente, si ricava $\sqrt{n} \geq 7.94$ da cui $n \geq 63.02$, e dunque $n \geq 64$.