SVOLGERE GLI ESERCIZI 1.51, 1.24, 1.25, 1.26, 1.28, 1.45, 1.47, 1.50

▷ **Esercizio 1.51** (prova d'esame del 13/09/2004)
Supponiamo di avere una moneta truccata in modo che la probabilità che esca testa (T) in ogni lancio è $\frac{1}{4}$ (e quindi la probabilità che esca croce (C) in ogni lancio è $\frac{3}{4}$). Si lanci tale moneta 4 volte.
(i) Calcolare la probabilità che esca testa esattamente 2 volte.
(ii) Calcolare la probabilità che esca testa almeno una volta.
(iii) Calcolare la probabilità che si abbia la sequenza (T, C, T, C) esattamente in quest'ordine.

Soluzione
Se X è il numero di teste ottenute, allora X ha distribuzione binomiale di parametri $n = 4$ e $p = \frac{1}{4}$.
(i) La probabilità richiesta è:

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{54}{256} \cong 0.2109 \ .$$

(ii) La probabilità richiesta è:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 =$$

$$= 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256} \cong 0.6835 \ .$$

(iii) Siccome gli esiti dei singoli lanci della moneta sono indipendenti, se indichiamo con $R_i, \ R = T, C$ il risultato della i-esima estrazione, $i = 1, \ldots, 4$, la probabilità richiesta è:

$$P(T_1 \cap C_2 \cap T_3 \cap C_4) = P(T_1)P(C_2)P(T_3)P(C_4) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{256} \cong 0.0351 \ .$$

▷ **Esercizio 1.24** (prova in itinere a.a. 2000/01)
(i) Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Da essa vengono effettuate 2 estrazioni senza rimpiazzo. Qual è la probabilità che i due numeri estratti siano consecutivi?
(ii) Rispondere al quesito (i), nel caso che le estrazioni avvengano con rimpiazzo.
(iii) Rispondere ai quesiti (i) e (ii), nel caso che l'urna contenga 900 palline, numerate da 1 a 900.

Soluzione

(i) Lo spazio degli eventi è $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2),\ \omega_i = 1, \ldots, 5,\ \omega_1 \neq \omega_2\}$. La cardinalità di Ω è $\#\Omega = 25 - 5 = 20$. Indichiamo con A l'evento "i due numeri estratti sono consecutivi" e denotiamo con A_i l'evento $\{\omega_i = i\}$; allora:

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup (A \cap A_3) \cup (A \cap A_4) \cup (A \cap A_5) \qquad (*)$$

dove l'unione è disgiunta. Se $i = 2, 3, 4$, risulta:

$$A \cap A_i = \{\omega : \omega = (\omega_i, \omega_{i-1}),\ \textit{oppure}\ \omega = (\omega_i, \omega_{i+1})\}$$

e quindi $P(A \cap A_i) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$. Se invece $i = 1$ oppure $i = 5$, $A \cap A_i$ è composto da un solo elemento, per cui $P(A \cap A_i) = \frac{1}{20}$. Pertanto, sostituendo in $(*)$, si ottiene:

$$P(A) = 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4\ .$$

Un altro modo di procedere è quello di scrivere esplicitamente l'evento A :

$$A = \{(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,2),\ (3,4),\ (4,3),\ (4,5),\ (5,4)\}\ .$$

Da qui si ricava come prima che

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}\ .$$

(ii) Siccome ora le estrazioni sono con rimpiazzo, lo spazio degli eventi è $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2),\ \omega_i = 1, \ldots, 5\}$, ammettendo anche coppie formate da elementi uguali. Si ha ora $\#\Omega = 25$, mentre $\#A$ è sempre uguale a 8, per cui:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{8}{25} = 0.32\ .$$

(iii) Se le estrazioni sono senza rimpiazzo, risulta

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2),\ \omega_i = 1, \ldots, 900,\ \omega_1 \neq \omega_2\},$$

e $\#\Omega = 900 \cdot 899$. Indicando sempre con A_i l'evento $\{\omega_i = i\}$, si ha come prima che $A \cap A_i$ ha cardinalità 2 per $i = 2, 3, \ldots, 899$ e cardinalità 1 per $i = 1$ oppure $i = 900$. Pertanto

$$P(A) = 898 \cdot \frac{2}{900 \cdot 899} + 2 \cdot \frac{1}{900 \cdot 899} = \frac{1}{450} = 0.00222\ldots 2\ldots = 0.00\bar{2}\ .$$

Se le estrazioni avvengono con rimpiazzo, analogamente al caso (ii), $\#\Omega = 900^2$. La cardinalità di A è sempre la stessa e dalla formula precedente si ricava $\#A = 2 \cdot 898 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot 899$. Quindi:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2 \cdot 899}{900^2} \cong 0.002219\ .$$

Come si vede, questo risultato differisce di pochissimo da quello relativo alle 2 estrazioni senza rimpiazzo da un'urna con 900 palline; infatti, siccome 900 è abbastanza grande, i risultati delle estrazioni, anche se effettuate senza rimpiazzo, divengono "quasi" indipendenti, e dunque "paragonabili" ad estrazioni con rimpiazzo.

▷ **Esercizio 1.25**
(i) In quanti modi si può formare una commissione di 3 uomini e 2 donne scelti fra 7 uomini e 5 donne?
(ii) Una volta che sia stata scelta e formata la commissione, qual è la probabilità che una persona esterna indovini la sua composizione?

Soluzione
(i) I 3 uomini possono essere scelti tra i 7 uomini in $\binom{7}{3}$ modi, e le 2 donne possono essere scelte tra le 5 donne in $\binom{5}{2}$ modi. Quindi la commissione si può scegliere in $\binom{7}{3}\binom{5}{2} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 350$ modi.
(ii) La probabilità cercata è ovviamente 1/350 .

▷ **Esercizio 1.26** (prova in itinere a.a. 2000/01)
Un giocatore gioca ogni settimana al lotto l'ambo $\{1, 90\}$ su una singola ruota.
(i) Qual è la probabilità di vincere in una singola estrazione?
~~(ii) In media quanti tentativi sono necessari per vincere?~~
(iii) Qual è la probabilità di vincere almeno una volta nelle prime 100 estrazioni?

Soluzione
(i) Consideriamo dapprima un'urna contenente $r+b$ palline numerate, divise in due gruppi: r del primo gruppo e b del secondo gruppo (per esempio, il primo gruppo potrebbe contenere palline rosse e il secondo bianche). Se effettuiamo n estrazioni di palline dall'urna, senza rimpiazzo, come noto dalla distribuzione ipergeometrica, la probabilità di estrarre esattamente k palline del primo grup-
po (e $n-k$ del secondo gruppo) è:

$$\frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}} \qquad (*)$$

Per risolvere il nostro problema, supponiamo di dividere i 90 numeri del lotto in due gruppi, mettendo nel primo i numeri 1 e 90, e nel secondo gli altri 88; l'evento "fare ambo" si può identificare con l'evento di ottenere, in 5 estrazioni senza rimpiazzo dall'urna contenente le 90 palline numerate, due numeri del primo gruppo. Sostituendo in $(*)$, $n = 5$, $k = 2$, $r =$

2, $b = 88$, si ottiene che la probabilità cercata è:

$$\frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{2}{9 \cdot 89} \cong 0.0025 \ .$$

(ii) Siccome i risultati delle estrazioni successive sono indipendenti, possiamo modelizzare la nostra situazione mediante uno schema successo–insuccesso in diverse prove indipendenti, in cui la probabilità del successo in ogni singola prova è $p \doteq 0.0025$ (e dell'insuccesso $1 - p = 0.9975$).
Siamo interessati all'istante T di primo successo che, come noto, è una v.a. di legge geometrica modificata (i.e. $T - 1$ ha legge geometrica) di parametro p, ovvero:

$$P(T = k) = p(1 - p)^{k-1}, \ k = 1, 2, \ldots$$

Dall'Esercizio 1.20 segue che la media di T è $\frac{1}{p}$ che è dunque uguale a $\frac{1}{0.0025} = 400$.
(iii) In uno schema successo–insuccesso di n prove indipendenti, il numero X dei successi è una v.a. con legge binomiale di parametri n e p, ovvero la probabilità che si abbiano esattamente k successi, con $k = 0, 1, \ldots, n$ è:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Pertanto la probabilità che si abbiano esattamente 0 successi in 100 estrazioni è $(1-p)^{100} \cong 0.778$. Da qui segue che la probabilità cercata è circa $1 - 0.778 = 0.222$.

▷ **Esercizio 1.28** (prova d'esame del 23/07/2001)
Un'urna contiene 90 palline numerate da 1 a 90, che vengono estratte una dopo l'altra senza rimpiazzo.
(i) Qual è la probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero minore o uguale di 60?
(ii) Qual è la probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero dispari?

Soluzione
(i) Dividendo le palline dell'urna in due gruppi: quelle da 1 a 60, e quelle da 61 a 90, occorre trovare la probabilità che in $n = 10$ estrazioni senza rimpiazzo, esattamente $k = 10$ palline risultino appartenenti al primo gruppo. Dunque, per la distribuzione ipergeometrica, il valore cercato è:

$$p \doteq \frac{\binom{60}{10}\binom{30}{0}}{\binom{90}{10}} = 0.013 \ .$$

(ii) I numeri dispari tra 1 e 90 sono esattamente 45; pertanto, utilizzando nuovamente la distribuzione geometrica, la probabilità cercata è:

$$p \doteq \frac{\binom{45}{10}\binom{45}{0}}{\binom{90}{10}} = 5.57 \cdot 10^{-4}.$$

▷ **Esercizio 1.45** (prova d'esame del 24/09/2003)
Una scatola contiene 6 bottoni: uno verde, 2 neri e 3 grigi. Si estraggono dalla scatola tre bottoni senza rimpiazzo.
(i) Qual è la probabilità che venga fuori un bottone verde?
(ii) Qual è la probabilità che venga estratto un bottone verde, sapendo che il verde non è uscito nelle prime due estrazioni?
(iii) Sapendo che nelle tre estrazioni è venuto fuori il bottone verde, qual è la probabilità che il verde non sia uscito nelle prime due estrazioni?

Soluzione
(i) Se A denota l'evento che venga fuori un bottone verde, utilizzando la distribuzione ipergeometrica si ha:

$$P(A) = \frac{\binom{1}{1}\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{2}\ .$$

(ii) Sia B l'evento che il bottone verde non è uscito nelle prime due estrazioni. Se il bottone verde non è uscito nelle prime due estrazioni, sono rimasti 4 bottoni, di cui 1 verde e 3 non verdi. La probabilità che esca il bottone verde nella terza estrazione, sapendo che il verde non è uscito nelle prime due estrazioni, è $P(A|B) = 1/4$.
(iii) Sempre utilizzando la distribuzione ipergeometrica, si ha:

$$P(B) = \frac{\binom{1}{0}\binom{5}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{3}\ .$$

Per la formula di Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3}\ .$$

▷ **Esercizio 1.47** (prova in itinere a.a. 2003/04)
Vengono estratte 4 carte senza reinserimento da un mazzo di carte napoletane. Se A è l'evento "ciascuna delle 4 carte estratte è un asso" e B è l'evento "delle 4 carte estratte una sola è un asso",
(i) calcolare $P(A)$ e $P(B)$.
~~(ii) Sia $X_i = 1$ se l'i-esima carta estratta è un asso, $X_i = 0$ altrimenti. Le variabili X_1 e X_2 sono indipendenti?~~
(iii) Rispondere ai quesiti (i) e (ii) nel caso che le estrazioni vengano effettuate con reinserimento.

Soluzione
(i) Sia X il numero di assi ottenuti in 4 estrazioni senza reinserimento; le carte del mazzo possono dividersi in due gruppi: gli assi (in numero di 4) e le rimanenti carte (in numero di 36.) Allora X conta il numero di elementi del primo gruppo usciti in $n = 4$ estrazioni senza reinserimento, dunque X è una v.a ipergeometrica e, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$, si ha:

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{36}{4-k}}{\binom{40}{4}} .$$

Abbiamo allora:

$$P(A) = P(X = 4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{36}{0}}{\binom{40}{4}} = 1.09 \cdot 10^{-5}.$$

$$P(B) = P(X = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{36}{3}}{\binom{40}{4}} = 0.3125 .$$

(ii) X_1 e X_2 non sono indipendenti, infatti:

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_1 = 1) = \frac{3}{39} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{130} .$$

Inoltre:

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{10},\ P(X_2 = 1) =$$
$$= P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0) =$$
$$= \frac{3}{39} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{39} \cdot \frac{9}{10} = \frac{13}{130} = \frac{1}{10} .$$

Dunque:

$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \neq \frac{1}{130} = P(X_1 = 1, X_2 = 1).$$

(iii) Se le estrazioni vengono effettuate con reinserimento, allora X è binomiale di parametri $n = 4$ e $p = 1/10$, cioè $X \sim B(4, 1/10)$. Dunque:

$$P(A) = P(X = 4) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^0 = 1 \cdot 10^{-4}.$$

$$P(B) = P(X = 1) = \binom{4}{1}\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 2.916 \cdot 10^{-1}.$$

In questo caso, essendo le estrazioni con reinserimento, due qualsiasi eventi legati ad estrazioni diverse sono indipendenti. Da ciò segue che X_1 e X_2 sono indipendenti, cioè

$$P(X_1 = h, X_2 = k) = P(X_1 = h)P(X_2 = k), \quad h, k \in \{0, 1\}.$$

▷ **Esercizio 1.50** (prova d'esame del 15/07/2004)
Per assemblare un sistema, si prendono a caso 6 componenti da una cassa contenente 20 componenti usati. Il sistema montato funziona solo se tra i 6 componenti impiegati quelli guasti non sono più di 2 (ovvero quelli funzionanti sono ≥ 4). Se nella cassa vi erano 15 componenti efficienti e 5 guasti, qual è la probabilità che il sistema funzioni?

Soluzione
Sia X il numero di componenti funzionanti tra i 6 estratti; allora X è una v.a. con distribuzione ipergeometrica di parametri 15, 5 e 6. Dunque, per $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$$P(X = k) = \frac{\binom{15}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{20}{6}}$$

e la probabilità richiesta è:

$$P(X \geq 4) = \frac{\binom{15}{4}\binom{5}{2} + \binom{15}{5}\binom{5}{1} + \binom{15}{6}\binom{5}{0}}{\binom{20}{6}} = 0.8687\ .$$