

### Esercizi per casa N. 3

Sia  $B_t$  un moto Browniano standard continuo.

1. Si consideri il processo  $X(t) = x + B_t$ , con  $x \in [-a, b]$ ,  $a, b > 0$  e sia

$$\tau(x) = \inf\{t > 0 : X(t) \notin (a, b)\}$$

Calcolare  $E(\tau(x))$  e  $P(X(\tau(x)) = -a)$ ,  $P(X(\tau(x)) = b)$ .

2. Si consideri il processo  $Y(t) = x + B_t - \frac{t}{2}$ , con  $x \in [a, b]$  e sia

$$\tau(x) = \inf\{t > 0 : Y(t) \notin (a, b)\}$$

Calcolare  $P(Y(\tau(x)) = a)$  e  $P(Y(\tau(x)) = b)$ .

[Sugg.: si usi il fatto che  $M_t = e^{B_t - t/2 + x}$  è una martingala e si proceda, usando il teorema di arresto, come nel caso dell'istante di uscita del MB da una striscia, naturalmente applicando il tutto a  $M_t$ , visto che  $P(Y(\tau(x)) = a) = P(M_{\tau(x)} = e^a)$ .]