Esercizi su equazioni differenziali stocastiche e teorema di Girsanov (con soluzioni)

1. *Moto Browniano geometrico*
Per $r, \sigma > 0$, si consideri l'EDS lineare con coeff. costanti:

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t,\ X_0 = x_0$$

Si tratta dell'equazione di *Black and Scholes* per l'andamento del prezzo di uno stock.
(i) Provare che la soluzione esplicita è:

$$X_t = x_0 e^{(r-\sigma^2/2)t} e^{\sigma B_t}$$

(ii) Dedurre che $\ln X_t$ è un moto Browniano con drift.
(iii) Dedurre che X_t ha legge log-normale.

2.
(i) Si mostri che l'EDS:

$$dX_t = b(t)X_t dt + \sigma(t) dB_t,\ X_0 = x_0$$

ha soluzione esplicita:

$$X_t = x_0 e^{\Lambda(t)} + e^{\Lambda(t)} \int_0^t e^{-\Lambda(s)} \sigma(s) dB_s$$

dove $\Lambda(t) = \int_0^t b(s)ds$.
(ii) Mostrare che la soluzione X_t è un processo Gaussiano e calcolarne media e varianza.

3. Si consideri l'EDS (*modello di Vasicek in Finanza per l'evoluzione di tassi d'interesse*):

$$dZ_t = \alpha(Z_t - \beta)dt + \sigma dB_t,\ Z_0 = z_0 \tag{1}$$

(i) Mostrare che, se $\alpha = -\lambda$, la (1) si può ricondurre a (*equazione di Langevin e processo di OrnsteinUhlenbeck*):

$$dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dB_t,\ X_0 = x_0 \tag{2}$$

(ii) Provare che la soluzione esplicita dell' EDS (2) è:

$$X_t = e^{-\lambda t}\left[x_0 + \int_0^t \sigma e^{\lambda s} dB_s\right]$$

(iii) Mostrare che X_t è un processo Gaussiano con media $E(X_t) = e^{-\lambda t} x_0$ e funzione di covarianza

$$Cov(X_s, X_t) = \frac{\sigma^2}{2\lambda}\left(e^{\lambda(s-t)} - e^{-\lambda(s+t)}\right),\ \text{per } s \leq t$$

(iv) Sia $\tilde{B}_t$ un moto Browniano (eventualmente diverso da B_t) e si consideri il processo:

$$U_t = e^{-\lambda t} \left[x_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2\lambda}} B\left(e^{2\lambda t} - 1\right) \right]$$

Mostrare che U_t e X_t hanno la stessa legge.

4. Il modello di *Cox-Ingersoll-Ross (CIR) per l'evoluzione di tassi d'interesse* è descritto dall' EDS:

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t \vee 0}\; dB_t \;, x_0 = x_0$$

Si noti che $\sqrt{x}$ non è Lipschitziana e dunque non è soddisfatta la condizione usuale per l'unicità della soluzione; comunque, la soluzione esiste ed è unica, per un teorema di Ikeda e Watanabe, essendo $\sqrt{x}$ una funzione Holderiana di esponente $\frac{1}{2}$. Inoltre, si può dimostrare che la soluzione X_t è non negativa per ogni $t \geq 0$. In generale, non è possibile trovarne la forma esplicita; provare però che, se $\sigma = 1,\; a = 2\beta$ e $b = \frac{1}{8\beta}$, allora riulta $X_t = Y_t^2$, dove Y_t è un processo di Ornstein - Uhlenbeck soddisfacente l'EDS $dY_t = -\beta Y_t dt + \frac{1}{2} dB_t,\; Y_0 = \sqrt{x_0}$

5. (*Ponte Browniano*)
Sia $\widetilde{B}_t = B_t - tB_1,\; 0 \leq t \leq 1$, dove B_t è un MB standard.
(i) Mostrare che $\widetilde{B}_t$ è un processo Gaussiano centrato, indipendente da B_1, con covarianza $E(\widetilde{B}_s\widetilde{B}_t) = s(1-t)$ per $0 \leq s \leq t$.
(ii) Sia X_t la soluzione dell' EDS

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + dB_t,\; 0 \leq t \leq 1,\; X_0 = 0$$

Mostrare che X_t e $\widetilde{B}_t$ hanno la stessa legge.

6. Si consideri l'EDS:

$$dX(t) = \frac{1}{2}\sigma(X(t))\sigma'(X(t))dt + \sigma(X(t))dB_t,\; X(0) = 0$$

con $\sigma(\cdot) \geq 0$. Mostrare che, se l'integrale $v(x) \doteq \int_0^x \frac{1}{\sigma(r)}dr$ è convergente, allora $X(t) = v^{-1}(B_t)$.

7. Per $a \geq 0, b > 0$ sia $X(t)$ la soluzione dell'EDS:

$$dX(t) = (a + bX(t))dt + \sqrt{X(t) \vee 0}\; dB_t \;, X(0) = x_0 \geq 0$$

Il processo $X(t)$ risulta essere non negativo per ogni $t \geq 0$. Se $b = 0$ e $a = \frac{1}{4}$, l'EDS diventa:

$$dX(t) = \frac{1}{4}dt + \sqrt{X(t) \vee 0}\; dB_t \;, X(0) = x_0$$

Mostrare che, in tal caso, la soluzione esplicita è $X(t) = \frac{(B_t + 2\sqrt{x_0})^2}{4}$

8. *(Processo tipo Wright & Fisher)*
Il processo $X(t)$ che è soluzione dell'EDS:

$$dX(t) = (a + bX(t))dt + \sqrt{X(t)(1 - X(t)) \vee 0}\; dB_t,\; X(0) = x_0 \in [0, 1]$$

con $a \geq 0$ e $a + b \leq 0$ rimane nell' intervallo $[0, 1]$ per ogni $t \geq 0$. Questa EDS è usata nel modello di Wright-Fisher in genetica di popolazioni ed in certi modelli stocastici per l'attività neuronale. Mostrare che, se $a = \frac{1}{4}$ e $b = -\frac{1}{2}$, la soluzione esplicita è $X(t) = \sin^2(B_t/2 + \arcsin\sqrt{x_0})$.

9. Si consideri il processo X_t soluzione dell'EDS $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$ e sia $Y_t = v(X_t)$, dove $v(x) = \int^x \frac{1}{\sigma(z)}dz$. Mostrare che l'EDS per X_t si trasforma nell'EDS per Y_t con coeff. di diffusione uguale a 1 e drift $\Big[b(x)/\sigma(x) - \sigma'(x)/2\Big]_{x=v^{-1}(y)}$.

10. Si consideri il processo:

$$X_t = a + \int_0^t f(s)dB_s$$

dove f è una funzione deterministica con $\int_0^t f^2(s)ds < +\infty,\ \forall t > 0$. Se $\tilde{B}_t$ è un MB, posto $\rho(t) = \int_0^t f^2(s)ds$, mostrare che X_t ha la stessa legge di $a + \tilde{B}_{\rho(t)}$.

11. Sia B_t un MB e $T < 1$. Mostrare che, posto

$$Z_T = \frac{1}{\sqrt{1-T}} e^{-\frac{B_T^2}{2(1-T)}}$$

e $dQ = Z_T dP$, allora rispetto a Q, B_t è un ponte Browiano per $t \leq T$.

12. Provare che la densità del tempo di primo passaggio del MB con drift, $\mu t + B_t$, attraverso la barriera b è:

$$f_\mu(t) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(b-\mu t)^2}{2t}}$$

13. Sia $\mathbf{X}_t = (X(t), Y(t))$ soluzione dell' EDS:

$$\begin{cases} dX(t) = -\frac{1}{2}X(t) - Y(t)dB_t \\ dY(t) = -\frac{1}{2}Y(t) + X(t)dB_t \\ X(0) = 0, Y(0) = 1 \end{cases}$$

Se $Z_t = (X(t))^2 + (Y(t))^2$, trovare l'EDS soddisfatta da Z_t. Qual è la legge di Z_1?

Soluzioni

1. (i) Posto $Y_t = \ln(X_t)$, per la formula di Itô si ottiene:

$$dY_t = \left(\frac{1}{X_t} r X_t - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}\sigma^2 X_t^2\right) dt + \frac{1}{X_t}\sigma X_t dB_t =$$

$$= (r - \sigma^2/2)dt + \sigma dB_t$$

(ii) Posto $\mu = (r - \sigma^2/2)$, integrando si ottiene:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \mu ds + \sigma \int_0^t dB_s = \ln(x_0) + \mu t + \sigma B_t$$

ovvero Y_t è un moto Browniano con drift μ che parte da $\ln(x_0)$ all'istante $t = 0$.
(iii) Per (ii) $Y_t = \ln(X_t)$ ha distribuzione normale di media $\ln(x_0) + \mu t$ e varianza $\sigma^2 t$, ovvero $X_t = e^{Y_t}$ ha distribuzione log-normale.

2. (i) Si potrebbe seguire un procedimento analogo a quello che si usa per trovare la soluzione di un' eq. diff. ordinaria lineare. Più semplicemente, limitiamoci a verificare che

$$X_t \doteq x_0 e^{\Lambda(t)} + e^{\Lambda(t)} \int_0^t e^{-\Lambda(s)}\sigma(s)dB_s$$

è soluzione della nostra EDS. Si ha: $d\left(x_0 e^{\Lambda(t)} + e^{\Lambda(t)} \int_0^t e^{-\Lambda(s)}\sigma(s)dB_s\right) = x_0 b(t)e^{\Lambda(t)}dt + b(t)e^{\Lambda(t)}dt \int_0^t e^{-\Lambda(s)}\sigma(s)dB_s + e^{\Lambda(t)}e^{-\Lambda(t)}\sigma(t)dB_t = b(t)X_t dt + \sigma(t)dB_t$ ovvero l' EDS è verificata.
(ii) Siccome l'integrale stocastico di una funzione deterministica è, come funzione dell'estremo di integrazione, un processo Gaussiano, X_t risulta Gaussiano. Ovviamente $E(X_t) = e^{\Lambda(t)}x_0$. Calcoliamo ora la covarianza, per $u \le t$:

$$Cov(X_u, X_t) = E\left[\left(e^{\Lambda(u)}\int_0^u e^{-\Lambda(s)}\sigma(s)dB_s\right)\left(e^{\Lambda(t)}\int_0^t e^{-\Lambda(s)}\sigma(s)dB_s\right)\right] =$$

$$= e^{\Lambda(u)+\Lambda(t)}E\left[\left(\int_0^t \mathbf{1}_{[0,u]}(s)e^{-\Lambda(s)}\sigma(s)dB_s\right)\left(\int_0^t e^{-\Lambda(s)}\sigma(s)dB_s\right)\right] =$$

$$= e^{\Lambda(u)+\Lambda(t)}\left[\int_0^u e^{-2\Lambda(s)}\sigma^2(s)ds\right]$$

3. (ii) Posto $V_t = X_t e^{\lambda t}$, dalla formula di Itô si ottiene:

$$dV_t = (\lambda X_t e^{\lambda t} + e^{\lambda t}(-\lambda X_t) + \frac{1}{2}\cdot 0 \cdot \sigma^2)dt + e^{\lambda t}\sigma dB_t = e^{\lambda t}\sigma dB_t$$

Quindi $V_t = V_0 + \int_0^t \sigma e^{\lambda s} dB_s$, da cui:

$$X_t = e^{-\lambda t}\left[X_0 + \int_0^t \sigma e^{\lambda s} dB_s\right] = e^{-\lambda t} x_0 + \int_0^t \sigma e^{-\lambda(t-s)} dB_s$$

(iii) X_t è un processo Gaussiano, con media $E(X_t) = e^{-\lambda t} x_0$; calcoliamo la varianza. Si ha:

$$Var(X_t) = E\left[\left(\int_0^t \sigma e^{-\lambda(t-s)} dB_s\right)^2\right] = \int_0^t \left(\sigma e^{-\lambda(t-s)}\right)^2 ds =$$

$$= \sigma^2 e^{-2\lambda t}\left[\frac{e^{2\lambda s}}{2\lambda}\right]_0^t = \frac{\sigma^2}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda t})$$

Per la covarianza si ha $(u \leq t)$:

$$Cov(X_u, X_t) = E\left[\left(\int_0^u \sigma e^{-\lambda(u-s)} dB_s\right)\left(\int_0^t \sigma e^{-\lambda(u-s)} dB_s\right)\right] =$$

$$= E\left[\left(\int_0^t \mathbf{1}_{[0,u]}(s) \sigma e^{-\lambda(u-s)} dB_s\right)\left(\int_0^t \sigma e^{-\lambda(u-s)} dB_s\right)\right] =$$

$$= \int_0^t \mathbf{1}_{[0,u]}(s) \sigma^2 e^{-\lambda(u-s)} e^{-\lambda(t-s)} ds = \sigma^2 e^{-\lambda(u+t)} \int_0^u e^{2\lambda s} ds =$$

$$= \frac{\sigma^2 e^{-\lambda(u+t)}}{2\lambda}(e^{2\lambda u} - 1) = \frac{\sigma^2}{2\lambda}(e^{\lambda(u-t)} - e^{-\lambda(u+t)})$$

(iv) Essendo X_t e U_t entrambi Gaussiani, basta mostrare che hanno la stessa media e la stessa varianza. Invero, $E(U_t) = e^{-\lambda t} x_0 = E(X_t)$ e $Var(U_t) = \frac{\sigma^2}{2\lambda} e^{-2\lambda t} Var(B(e^{2\lambda t} - 1)) = \frac{\sigma^2}{2\lambda} e^{-2\lambda t}(e^{2\lambda t} - 1) = \frac{\sigma^2}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda t}) = Var(X_t)$.

4. Per i particolari valori dei parametri, l'EDS per X_t diviene $dX_t = (\frac{1}{4} - 2\beta X_t)dt + \sqrt{x} dB_t$. Ora, se Y_t è un processo di O-U verificante l'EDS $dY_t = -\beta Y_t + \frac{1}{2} dB_t$, $Y_0 = \sqrt{x_0}$, posto $Z_t = f(X_t) = Y_t^2$, per la formula di Itô si ha:

$$dZ_t = \left(2Y_t(-\beta Y_t) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}\right) dt + 2Y_t \cdot \frac{1}{2} dB_t = \left(\frac{1}{4} - 2\beta Y_t^2\right) dt + Y_t dB_t =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 2\beta Z_t\right) dt + \sqrt{Z_t} dB_t$$

e quindi Y_t^2 verifica l'EDS del modello CIR.

5. (i) Per $t_1, \dots, t_n \leq 1$, la legge di $(\widetilde{B}_{t_1}, \dots, \widetilde{B}_{t_n})$ è Gaussiana, dato che è funzione lineare di $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}, B_1)$; dunque, $\widetilde{B}_t$ è un processo Gaussiano (centrato, visto che $E(B_t - tB_1) = 0$). Si ha poi, per $s \leq t$: $E(\widetilde{B}_s \widetilde{B}_t) = E(B_s B_t) + stE(B_1^2) - sE(B_t B_1) - tE(B_s B_1) =$

$s - st = s(1-t)$. Dunque, $Var(\widetilde{B}_t) = t(1-t)$. Inoltre $cov(\widetilde{B}_t, B_1) = cov(B_t, B_1) - tcov(B_1, B_1) = t - t = 0$.
(ii) L' EDS ha soluzione (per l'esercizio 2): $X_t = (1-t)x_0 + (1-t)\int_0^t \frac{dB_t}{1-t} = (1-t)\int_0^t \frac{dB_t}{1-t}$, dato che $X_0 = x_0 = 0$. Dunque X_t è un processo Gaussiano di media 0 e covarianza, per $s \le t:\ E(X_s X_t) = (1-s)(1-t)E\left(\int_0^s \frac{dB_u}{1-u} \cdot \int_0^t \frac{dB_u}{1-u}\right) = (1-s)(1-t)\int_0^s \frac{1}{(1-u)^2}du = s(1-t)$. Pertanto X_t ha stessa media e varianza di $\widetilde{B}_t$, ovvero ha la stessa legge del Ponte Browniano.

6. Per mostrare che $X_t = v^{-1}(B_t)$, visto che $v(0) = 0$, basta verificare che $v(X_t) = B_t$, ovvero che $dv(X_t) = dB_t$, e questo segue subito dalla formula di Itô applicata alla funzione $v(x)$, tenendo conto dell'espressione di dX_t.

7. Basta verificare che $2\sqrt{X_t} = B_t + 2\sqrt{x_0}$. Il fatto che $d(2\sqrt{X_t}) = dB_t$, segue subito dalla formula di Itô applicata alla funzione $2\sqrt{x}$, e perciò $2\sqrt{X_t} = B_t + cost$. Il valore della costante si determina, ponendo $t = 0$.

8. Come nei due esercizi precedenti, basta verificare che $2 \arcsin \sqrt{X_t} = B_t + 2 \arcsin \sqrt{x_0}$. Il fatto che $d(2 \arcsin \sqrt{X_t}) = dB_t$, segue subito dalla formula di Itô applicata alla funzione $2 \arcsin \sqrt{x}$, e perciò $2 \arcsin \sqrt{X_t} = B_t + cost$. Il valore della costante si determina, ponendo $t = 0$.

9. Applicando la f. di Itô alla funzione $v(x)$, si ottiene (visto che $v'(x) = 1/\sigma(x)$):

$$dv(X_t) = \left(b(x)/\sigma(x) - \frac{1}{2}\sigma'(x)\right) dt + dB_t$$

da cui segue subito il risultato.

10. Siccome X_t è uguale ad una costante + l'integrale stocastico di una funzione deterministica, esso è un processo Gaussiano. La media è $E(X_t) = a$, la varianza è $Var(X_t) = \int_0^t f^2(s)ds = \rho(t)$. Ma queste sono anche la media e la varianza di $a + \tilde{B}_{\rho(t)}$, dunque quest'ultimo processo e X_t hanno la stessa legge.

11. Per l'esercizio 5, il ponte Browniano è soluzione dell'EDS:

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + dB_t,\ X_0 = 0$$

Ricordiamo il seguente:

Teorema di Girsanov
Sia X_t soluzione dell'EDS $dX_t = \sigma(X_t)dB_t$, ove B_t è un MB. Supponiamo che $E(\exp(c\ (b(X_t)/\sigma(X_t))^2)) \le c'$, per qualche costante c e c',e poniamo:

$$Z_t = \exp\left[\int_0^t \frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)}dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)}\right)^2 ds\right]$$

(ciò assicura che Z_t è una martingala). Sia Q la misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ di densità Z_T rispetto a P (cioè $Q(A) = E[\mathbf{1}_A Z_t], A \in \mathcal{F}$). Allora,

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \frac{b(X_t)}{\sigma(X_t)} ds$$

è un MB rispetto a Q, e inoltre il processo X_t è soluzione dell'EDS:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)d\tilde{B}_t \; 0 \leq t \leq T$$

∎

Per il Teorema di Girsanov, B_t risulta un ponte Browniano rispetto alla misura di probabilità $Q = Z_T dP$, dove:

$$Z_T = \exp\left(-\int_0^T \frac{B_s}{1-s} dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{B_s^2}{(1-s)^2} ds\right)$$

Siccome $dB_s^2 = 2B_s dB_s + ds$ (si verifica subito con la f. di Itô), allora:

$$d\left(\frac{B_s^2}{1-s}\right) = dB_s^2 \cdot \frac{1}{1-s} + B_s^2 d\left(\frac{1}{1-s}\right) =$$

$$= \frac{2B_s dB_s}{1-s} + \frac{ds}{1-s} + B_s^2 \cdot \frac{1}{(1-s)^2} ds$$

Di qui, si ottiene:

$$\frac{B_s dB_s}{1-s} = \frac{1}{2}\left[d\left(\frac{B_s^2}{1-s}\right) - \frac{ds}{1-s} - B_s^2 \cdot \frac{1}{(1-s)^2} ds\right]$$

e quindi:

$$\int_0^T \frac{B_s dB_s}{1-s} = \frac{1}{2}\Big[\frac{B_s^2}{1-s}\Big]_0^T + \frac{1}{2}\ln(1-T) - \frac{1}{2}\int_0^T B_s^2 \cdot \frac{1}{(1-s)^2} ds$$

Infine, sostituendo nell'espressione di Z_T qui sopra, si ottiene:

$$Z_T = \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{B_T^2}{1-T} - \frac{1}{2}\ln(1-T) + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{B_s^2}{(1-s)^2} ds - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{B_s^2}{(1-s)^2} ds\right] =$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\ln(1-T) - \frac{B_T^2}{2(1-T)}\right] = \frac{1}{\sqrt{1-T}} \exp\left(-\frac{B_T^2}{2(1-T)}\right)$$

che coincide con la formula data nel testo dell'esercizio.

12. Posto $Z_t = \exp(\mu B_t - \frac{1}{2}\mu^2 t)$, essa è una martingala; per il Teorema di Girsanov, se $dQ = Z_t dP$, risulta che $\tilde{B}_t = B_t - \mu t$ è un MB rispetto a Q. Dunque, $B_t = \tilde{B}_t + \mu t$ è MB con drift μ rispetto a Q. Si osservi che $Q(A) = E[\mathbf{1}_A Z_t],\ A \in \mathcal{F}$.

Quindi il MB di partenza B_t risulta un MB con drift μ, rispetto ad un'altra misura di probabilità, Q, su Ω.
Sia ora $T_b = \inf\{t > 0 : B_t = b\}$; sull'insieme $\{T_b \leq t\}$ risulta $Z_{t\wedge T_b} = Z_{T_b}$. Allora:

$$Q(T_b \leq t) = E_P[\mathbf{1}_{\{T_b\leq t\}} Z_t] = E_P[\mathbf{1}_{\{T_b\leq t\}} E(Z_t|\mathcal{F}^W_{t\wedge T_b}] =$$

$$= E_P[\mathbf{1}_{\{T_b\leq t\}} Z_{t\wedge T_b}] = E_P[\mathbf{1}_{\{T_b\leq t\}} Z_{T_b}] =$$

$$= E_P[\mathbf{1}_{\{T_b\leq t\}} \exp(\mu b - \mu^2 T_b/2)] = \qquad (*)$$

$$= \int_0^t \exp(\mu b - \mu^2 s/2) P(T_b \in ds)$$

Osservazioni
(I) Si è usato il Teorema di arresto per la martingala Z_t: se $\tau_1,\ \tau_2$ sono tempi di arresto q.c. limitati con $\tau_1 \leq \tau_2$, allora $E(Z_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = Z_{\tau_1}$. Precisamente, si è preso $\tau_1 = t \wedge T_b \leq t$ e $\tau_2 = t$; entrambi sono q.c. finiti, poiché T_b lo è.
(II) Abbiamo usato che $E[\mathbf{1}_A Z_t] = E[\mathbf{1}_A E(Z_t|\mathcal{F}_s)],\ s \leq t$. Infatti, si sa che $E[Z_t] = E[E(Z_t|\mathcal{F}_s)],\ s \leq t$, ma è vera anche l'identità di sopra, visto che $\mathbf{1}_A$ può valere solo 0 oppure 1.

Siccome (si veda l' esercizio 5 del foglio sul moto Browniano, e si noti che nella formula là trovata si può sostituire a con $|a|$, visto che $-B_t$ ha la stessa legge di B_t) :

$$P(T_b \in ds) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-b^2/2s} ds,$$

derivando l'espressione sopra trovata per $Q(T_b \leq t)$, si ottiene la densità di T_b rispetto alla misura Q, ovvero la densità del tempo di primo passaggio del MB con drift μ attraverso la barriera b :

$$Q(T_b \in dt) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-(b-\mu t)^2/2t} dt$$

Passando al limite per $t \to +\infty$ in (*), si ottiene:

$$Q[T_b < \infty] = E_P[e^{\mu b - T_b \mu^2/2}] = e^{\mu b} E_P[e^{-\mu^2 T_b/2}]$$

Siccome la trasformata di Laplace di T_b è

$$E_P(e^{-\lambda T_b}) = e^{-|b|\sqrt{2\lambda}},\ \lambda > 0$$

si ottiene:

$$Q[T_b < \infty] = e^{(\mu b - |\mu b|)}$$

Pertanto, se $\mu \neq 0$, il BM con drift raggiunge la barriera $b \neq 0$ con probabilità 1 se e solo se μ e b hanno lo stesso segno, altrimenti la densità sopra trovata è "difettiva " nel senso che $Q[T_b < \infty] < 1$, ovvero $Q[T_b = +\infty] > 0$.

13. Il drift è:

$$b(x,y) = (b_1(x,y), b_2(x,y)) = (-\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}y)$$

Il coeff. di diffusione è:

$$\sigma(x,y) = (\sigma_1(x,y), \sigma_2(x,y)) = (-y, x)$$

$$a(x,y) = \sigma(x,y)\sigma^*(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$$

Per una funzione $f(x,y) \in C^2$, la formula di Itô si scrive:

$$df(X(t),Y(t)) = \Big[\frac{\partial f}{\partial X}(X,Y)b_1(X,Y) + \frac{\partial f}{\partial Y}(X,Y)b_2(X,Y) +$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(X,Y)a_{11}(X,Y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}(X,Y)a_{12}(X,Y) + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(X,Y)a_{22}(X,Y)\Big)\Big]dt +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial X}(X,Y)b_1(X,Y)dB_t + \frac{\partial f}{\partial Y}(X,Y)b_2(X,Y)dB_t$$

Se $f(X,Y) = X^2 + Y^2$, sostituendo $b(x,y)$ e $a(x,y)$, e tenendo conto che le derivate miste sono nulle, si ottiene:

$$d(X^2(t) + Y^2(t)) =$$

$$= \left[2X(-\frac{1}{2}X) + 2Y(-\frac{1}{2}Y) + \frac{1}{2}(2y^2 + 2x^2)\right] dt + 2X(-Y)dB_t + 2YXdB_t = 0$$

Pertanto, q.c. risulta $Z_t = X^2(t) + Y^2(t) = costante = X^2(0) + Y^2(0) = 1, \ \forall t \geq 0$.