

Esercizi su densità congiunte

1. Siano X, Y e Z tre v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in $[0, 1]$. Trovare la densità della v.a. $W = X + Y + Z$.

2. Un punto è scelto a caso nel piano con densità :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$$

Sia $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ la distanza del punto scelto dall'origine. i) Trovare la legge di Z ; ii) qual è la probabilità che il punto si trovi fuori del cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1?

3. Sia Y una v.a. con legge esponenziale di parametro ξ , ove ξ è una v.a. con legge Gamma di parametri α e λ . Qual è la legge di Y ? Esiste finita $E(Y)$? in caso affermativo, quanto vale? Qual è la densità condizionale di ξ dato $Y = y$? Quanto vale, infine, $E(\xi|Y = y)$?

4. Sia (X, Y) un vettore aleatorio di densità congiunta $f(x, y)$. Calcolare la densità della v.a. $Z = X + Y$.

5. Sia (X, Y) un vettore aleatorio di densità congiunta $f(x, y)$. Calcolare la densità della v.a. $Z = Y/X$.

6. Sia (X, Y) un vettore aleatorio di densità congiunta $f(x, y)$. Calcolare la densità della v.a. $Z = XY$.

7. Siano X e Y indipendenti di leggi $\Gamma(\alpha, \lambda)$ e $\Gamma(\beta, \mu)$, rispettivamente. Trovare la legge di $Z = \frac{X}{X+Y}$.

8. Siano $X, Y \sim N(0, 1)$ e indipendenti. Trovare la legge di $Z = \frac{X^2}{X^2+Y^2}$.

9. Siano X e Y v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro λ . Trovare la legge di $Z = \frac{X}{X+Y}$.

10. Siano $X, Y \sim Exp(\lambda)$ e indipendenti. Trovare la legge di $Z = \frac{X^2}{X^2+Y^2}$.

11. Siano $X \sim N(0, 1)$ e $Y = X + W$, dove $W \sim N(0, \sigma^2)$ ed è indipendente da X . Calcolare: i) la legge di Y e la legge congiunta di X e Y ; ii) $E(X|Y = y)$; iii) sia $\sigma^2 = 0.1$; se si osserva il valore $y = 11/20$, quanto vale $P(1/4 < X < 3/4)$?

12. Siano $X, Y \sim Exp(\lambda)$ e indipendenti. Trovare la densità di $Z = \frac{X-Y}{X+Y}$.

13. Sia (X, Y) un vettore aleatorio di densità congiunta $f(x, y) = x + y$ per $0 < x < 1$; $0 < y < 1$. Calcolare la densità della v.a. $Z = Y/X$.

14. Sia (X, Y) un vettore aleatorio di densità congiunta $f(x, y) = e^{-y}$ per $0 < x < y$. Trovare la densità di X , di Y e di (X, Z) , dove $Z = Y - X$.

15. Siano X e Y indipendenti e uniformemente distribuite in $[0, 1]$. Trovare la densità di $Z = \frac{\max(X, Y)}{\min(X, Y)}$.

16. Siano X e Y indipendenti ed esponenziali di parametro λ . Se $U = X + Y$ e $V = X/(X + Y)$, trovare la densità di (U, V) , di U e di V .

17. Siano X, Y e Z indipendenti ed esponenziali di parametro λ . Trovare la densità di $Z - X$ condizionata da $X < Z < Y$.