Esercizi su leggi condizionali e aspettazione condizionale

1. Siano X, Y, Z v.a. a valori in uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ e tali che le coppie (X, Y) e (Z, Y) abbiano la stessa legge (in particolare anche X e Z hanno la stessa legge).
(i) Mostrare che se $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione misurabile tale che $h(X)$ è integrabile, allora quasi certamente $E(h(X)|Y) = E(h(Z)|Y)$.
(ii) Siano $T_1, \ldots, T_n$ v.a. reali integrabili, indipendenti e con la stessa legge. Posto $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, mostrare che $E(T_1|T) = \frac{T}{n}$.

2. Un segnale X è $\mathcal{N}(0, 1)$. Esso non viene però osservato direttamente: ciò che si osserva è invece $Y = X + W$, dove W è un errore (noise) con distribuzione $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, W indipendente da X.
(i) Qual è la legge di Y? e la congiunta di (X, Y)?
(ii) Qual è la media condizionale di X dato $Y = y$?
(iii) Sia $\sigma^2 = 0.1$ e supponiamo che si osserva $Y = y = 0.55 = \frac{11}{20}$. Qual è la probabilità che il segnale X si trovi compreso tra $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$?

3. (proprietà dell' aspettazione condizionale)
Mostrare che:
(i) (Proprietà caratterizzante)
$Z = E(X|\mathcal{F})$ se e solo se $E(ZW) = E(XW)$ $\forall$ W $\mathcal{F}-$misurabile.
(ii) $E[E(X|\mathcal{F})] = E(X)$
(iii) se $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ allora $E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{F}') = E(X|\mathcal{F}')$ q.c.
(iv) se $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ è la $\sigma-$algebra banale, allora $E(X|\mathcal{F}) = E(X)$
(v) se X è $\mathcal{F}-$misurabile, allora $E(XY|\mathcal{F}) = XE(Y|\mathcal{F})$
(vi) se X è indipendente da $\mathcal{F}$, allora $E(X|\mathcal{F}) = E(X)$ q.c.

4. Sia $A \in \mathcal{F}$ con $P(A) > 0$ e consideriamo la $\sigma-$algebra $\mathcal{G} = \{A, A^C, \Omega, \emptyset\}$. Allora $E(X|\mathcal{G})$, che è $\mathcal{G}-$misurabile, è costante su A e A^C. Mostrare che:

$$E(X|\mathcal{G}) = \begin{cases} \frac{1}{P(A)} \int_A X dP & \text{su } A \\ \frac{1}{P(A^C)} \int_{A^C} X dP & \text{su } A^C \end{cases}$$

5. Siano X e Y tali che $X - Y$ è indipendente da $\mathcal{F}$, con media $m = E(X - Y)$ e varianza $\sigma^2 = Var(X - Y)$. Supponiamo che Y è $\mathcal{F}-$misurabile, calcolare $E(X - Y|\mathcal{F})$. Dedurre quanto vale $E(X|\mathcal{F})$. Calcolare poi $E((X - Y)^2|\mathcal{F})$ e dedurre quanto vale $E(X^2|\mathcal{F})$.

6. Sia $X = X_1 + X_2$ con X_1 indipendente da $\mathcal{F}$, X_2 $\mathcal{F}-$misurabile, $X_1 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
(i) Calcolare $E(X|\mathcal{F})$ e $Var(X|\mathcal{F})$
(ii) Calcolare $E(e^{\lambda X}|\mathcal{F})$

7. Siano X e Y v.a. $\mathcal{G}-$misurabili. Mostrare che

$$E(YE(X|\mathcal{G})) = E(XE(Y|\mathcal{G}))$$

Soluzioni degli Esercizi su leggi condizionali e aspettazione condizionale

1. (i) N.B. $E(h(X)|Y)$ significa $E(h(X)|\sigma(Y))$, dove $\sigma(Y)$ è la $\sigma-$algebra generata da Y. Ricordiamo che $Z = E(X|\mathcal{G})$ è tale che:

$$\int_G E(X|\mathcal{G})dP = \int_G XdP \quad \forall G \in \mathcal{G}$$

ovvero se $\forall$ v.a. $W \geq 0$ $\mathcal{G}-$misurabile risulta

$$E(ZW) = E(XW) \qquad (*)$$

Posto allora $W = \Psi(Y)$, da (*) segue che: $E(h(X)|Y) = g(Y)$ con $E(g(Y)\Psi(Y)) = E(h(X)\Psi(Y)) = E(h(Z)\Psi(Y))$, dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che (X, Y) e (Z, Y) hanno la stessa legge.
Dunque, abbiamo ottenuto, $\forall$ $\Psi(Y) = W$:

$$E(g(Y)\Psi(Y)) = E(h(Z)\Psi(Y))$$

il che implica che $g(Y) = E(h(Z)|Y)$ e quindi:

$$E(h(X)|Y) = g(Y) = E(h(Z)|Y).$$

(ii) Le v.a. (T_1, T) e (T_2, T) hanno la stessa legge. Infatti, (T_1, T) si può ottenere applicando alla v.a. $(T_1, T_2 + T_3 + \ldots + T_n)$ la trasformazione $(s, t) \longrightarrow (s, s + t)$;
(T_2, T) si ottiene applicando alla v.a. $(T_2, T_1 + T_3 + \ldots + T_n)$ la stessa trasformazione. Poichè le due v.a. $(T_1, T_2 + T_3 + \ldots + T_n)$ e $(T_2, T_1 + T_3 + \ldots + T_n)$ hanno la stessa legge, avendo le stesse marginali con componenti indipendenti, allora (T_1, T) e (T_2, T) hanno la stessa legge.
Allora, per il punto (i):

$$E(T_1|T) = E(T_2|T) \ q.c.$$

E ancora:

$$E(T_1|T) = E(T_2|T) = \ldots = E(T_n|T) \ q.c.$$

da cui:

$$nE(T_1|T) = E(T_1|T) + \ldots + E(T_n|T) = E(T_1 + \ldots + T_n|T) = E(T|T) = T$$

il che implica che $E(T_1|T) = T/n$.

2. (i) $Y \sim \mathcal{N}(0, 1 + \sigma^2)$ per il Teorema di addizione di v.a. normali indipendenti. La legge congiunta di (X, Y) è la legge di $(X, X + W)$. Si ha:

$$\begin{pmatrix} X \\ X + W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ W \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ W \end{pmatrix}$$

con $(X, W) \sim \mathcal{N}(0, C)$, dove

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Allora:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X + W \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(b, C')$$

dove

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } C' = ACA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Dunque $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, C')$, avendosi $cov(X, Y) = 1$ e $Var(Y) = 1 + \sigma^2$. Volendo trovare la densità congiunta di (X, Y), essa è:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{detC'}} e^{-\frac{1}{2}\left\langle (C')^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle}$$

con

$$detC' = \sigma^2 \text{ e } (C')^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} 1 + \sigma^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((1+\sigma^2)x^2 - 2xy + y^2)}.$$

(ii) Calcoliamo prima la legge condizionale di X dato $Y = y$. Dalla teoria si sa che la legge condizionale di X dato $Y = y$ è normale di varianza

$$Var(X) - \frac{cov^2(X, Y)}{Var(Y)} = 1 - \frac{1}{1 + \sigma^2} = \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2}$$

e media

$$E(X) + \frac{cov(X, Y)}{Var(Y)}(y - E(Y)) = \frac{y}{1 + \sigma^2}$$

Questa è la media condizionale richiesta.
(iii) Nel punto (ii) si è visto che la legge condizionale di X dato $Y = y = \frac{11}{20}$ con $\sigma^2 = 0.1$ è normale di media $\frac{y}{1+\sigma^2} = \frac{1}{2}$ e varianza $\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} = \frac{1}{12}$, ovvero essa è $\mathcal{N}(\frac{1}{2}, \frac{1}{11})$.
Pertanto, la probabilità che, in corrispondenza dell'osservazione $y = \frac{11}{20}$, il segnale X si trovi nell'intervallo $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ è la probabilità che una v.a. $Z \sim \mathcal{N}(\frac{1}{2}, \frac{1}{11})$ si trovi in $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, cioé:

$$P\left(\frac{1}{4} < Z < \frac{3}{4}\right) = P\left(\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\sqrt{1/11}} < \frac{Z - \frac{1}{2}}{\sqrt{1/11}} < \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{\sqrt{1/11}}\right)$$

$$= P(-\sqrt{11}/4 < W < \sqrt{11}/4) = \Phi(0.82) - \Phi(-0.82) \approx 0.58$$

dove $\Phi(w)$ è la funzione di distribuzione di una v.a. normale standard.

3. (i) $Z = E(X|\mathcal{F})$ è $\mathcal{F}-$misurabile e

$$\int_F E(X|\mathcal{F})dP = \int_F XdP \quad \forall F \in \mathcal{F}$$

Dunque:

$$E[E(X|\mathcal{F})\mathbf{1}_F] = E[X\mathbf{1}_F] \quad \forall F \in \mathcal{F}$$

e quindi per ogni funzione semplice W risulta $E[ZW] = E[XW]$. Siccome le funzioni semplici formano un insieme denso nello spazio delle funzioni misurabili in L^1, si ottiene:

$$E[ZW] = E[XW] \;\; \forall\; W \;\mathcal{F} - \text{misurabile} \qquad (*)$$

(ii) Dalla definizione, per $F = \Omega$, si ottiene:

$$E[E(X|\mathcal{F})] = E(X)$$

(iii) Sia $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, allora $\forall F' \in \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ si ha:

$$\int_{F'} E[E(X|\mathcal{F})|\mathcal{F}']dP = \int_{F'} E(X|\mathcal{F})dP$$

$$= \int_{F'} XdP = \int_{F'} E(X|\mathcal{F}')dP$$

Dunque:

$$\int_{F'} \Big(E[E(X|\mathcal{F})|\mathcal{F}'] - E(X|\mathcal{F}')\Big)dP = 0 \quad \forall F'$$

da cui:

$$E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{F}') = E(X|\mathcal{F}') \;\; \text{q.c.}$$

(iv) Se $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ è la $\sigma-$algebra banale, allora le sole v.a. $\mathcal{F}-$misurabili sono le costanti, per cui deve essere $E(X|\mathcal{F}) = c$ e $E(E(X|\mathcal{F})) = E(c) = c = E(X)$.
(v) Sia X $\mathcal{F}-$misurabile, allora anche $XE(Y|\mathcal{F})$ è $\mathcal{F}-$misurabile; se W è $\mathcal{F}-$misurabile, anche XW lo è. Allora, posto $Z = E(Y|\mathcal{F})$, per la proprietà caratterizzante della media condizionale:

$$E[E(Y|\mathcal{F})(XW)] = E[Z(XW)] = E[YXW]$$

ovvero:

$$E[XE(Y|\mathcal{F}) \cdot W] = E[YX \cdot W]$$

il che implica che $E(YX|\mathcal{F}) = XE(Y|\mathcal{F})$.
(vi) Sia X indipendente da $\mathcal{F}$; la v.a. $\omega \longrightarrow E(X)$ è costante, e quindi $\mathcal{F}-$misurabile. Se W è $\mathcal{F}-$misurabile, allora W è indipendente da X e

$$E(WX) = E(W)E(X) = E(WE(X))$$

Allora, per la proprietà caratterizzante della media condizionale:

$$E(X) = E(X|\mathcal{F}).$$

4. Da:

$$E(\mathbf{1}_A E(X|\mathcal{G})) = E(X\mathbf{1}_A) \text{ e } E(\mathbf{1}_{A^C} E(X|\mathcal{G})) = E(X\mathbf{1}_{A^C})$$

si ricava (siccome $E(X|\mathcal{G})$ è uguale ad una costante a su A) :

$$aP(A) = E(\mathbf{1}_A E(X|\mathcal{G})) = \int_A a dP = E(X|\mathcal{G})P(A) = E(X\mathbf{1}_A) = \int_A X dP$$

e quindi

$$E(X|\mathcal{G})(\omega) = \left(\int_A X dP\right) \Big/ P(A), \text{ se } \omega \in A$$

Analogo discorso per $\omega \in A^C$.

5. Si ha:

$$E(X - Y|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}) - E(Y|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}) - Y$$

poiché Y è $\mathcal{G}-$misurabile.
Inoltre:

$$E(X - Y|\mathcal{G}) = E(X - Y)$$

poiché $X - Y$ è indipendente da $\mathcal{G}$.
Dunque:

$$E(X|\mathcal{G}) - Y = E(X - Y) = m$$

da cui $E(X|\mathcal{G}) = m + Y$.
Analogamente:

$$E((X - Y)^2|\mathcal{G}) = E(X^2|\mathcal{G}) - 2E(YX|\mathcal{G}) + E(Y^2|\mathcal{G}) = E(X^2|\mathcal{G}) - 2YE(X|\mathcal{G}) + Y^2$$

Ma:

$$E((X - Y)^2|\mathcal{G}) = E((X - Y)^2)$$

(poiché anche $(X - Y)^2$ è indipendente da $\mathcal{G}$)

$$= Var(X - Y) + E^2(X - Y) = \sigma^2 + m^2$$

e dunque:

$$E(X^2|\mathcal{G}) - 2YE(X|\mathcal{G}) + Y^2 = \sigma^2 + m^2$$

Infine:

$$E(X^2|\mathcal{G}) = \sigma^2 + m^2 - Y^2 + 2Y(m + Y) = \sigma^2 + (Y + m)^2.$$

6. (i) Si ha:

$$E(X|\mathcal{G}) = E(X_1|\mathcal{G}) + E(X_2|\mathcal{G}) = E(X_1) + X_2$$

(poiché X_1 è indipendente da $\mathcal{G}$ e X_2 è $\mathcal{G}-$misurabile).
Inoltre:

$$E(X^2|\mathcal{G}) = E(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2|\mathcal{G}) = E(X_1^2|\mathcal{G}) + 2E(X_1X_2|\mathcal{G}) + E(X_2^2|\mathcal{G}) =$$

$$E(X_1^2) + 2X_2E(X_1|\mathcal{G}) + X_2^2 =$$

(essendo $E(X_1|\mathcal{G}) = E(X_1)$)

$$= E(X_1^2) + 2X_2E(X_1) + X_2^2.$$

Quindi:

$$Var(X|\mathcal{G}) = E(X^2|\mathcal{G}) - (E(X|\mathcal{G}))^2 =$$

$$= E(X_1^2) + 2X_2E(X_1) + X_2^2 - E^2(X_1) - 2X_2E(X_1) - X_2^2 = Var(X_1) = \sigma^2.$$

(ii)

$$E\left(e^{\lambda X}|\mathcal{G}\right) = E\left(e^{\lambda X_1}e^{\lambda X_2}|\mathcal{G}\right) = e^{\lambda X_2}E\left(e^{\lambda X_1}\right) = e^{\lambda X_2} \cdot e^{\lambda m + \lambda^2\sigma^2/2}$$

dove si è usato che la trasformata di Laplace di X_1, $E\left(e^{\lambda X_1}\right)$, è uguale a $e^{\lambda m + \lambda^2\sigma^2/2}$.

7. Per la proprietà caratterizzante della media condizionale:

(i)
$$E(YE(X|\mathcal{G})) = E(XY)$$

(ii)
$$E(XE(Y|\mathcal{G})) = E(YX)$$

da cui segue che $E(YE(X|\mathcal{G})) = E(XE(Y|\mathcal{G}))$.