1 Media e momenti di una v.a. assolutamente continua

Sia $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una v.a. continua con densità $f(x)$. La definizione della sua media, $E(X)$, è analoga a quella valevole per le v.a. discrete. Si ha, infatti:

Definizione
Si dice che X ha valore di aspettazione finito se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty.$$

In tal caso, la quantità

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

si chiama *valore di aspettazione di* X

Come si vede, per una v.a. assolutamente continua, la media è definita in modo del tutto analogo alle v.a. discrete, solamente, occorre sostituire la somma con un integrale. Inoltre, valgono le seguenti proprietà:

- se $E(X)$ esiste finita, allora essa è un funzionale lineare, non negativo;
- se X ha densità $f(x)$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, si ha

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx;$$

- Se X e Y sono v.a. indipendenti, allora $E(XY) = E(X)E(Y)$;
- il momento di X di ordine k è definito da

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx;$$

- il momento centrato di X di ordine k è definito da

$$E[(X - E(X))^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^k f(x) dx, \text{ dove } m = E(X);$$

- la varianza di X è definita da

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx = E(X^2) - E^2(X)$$

e risulta $Var(aX) = a^2 Var(X),\ Var(a + X) = Var(X)$.
- la covarianza di X e Y è definita da

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{(X,Y)}(x, y) dx dy - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \right),$$

dove $f_{(X,Y)}(x, y)$ è la densità congiunta di (X, Y) e $f_X(x),\ f_Y(y)$ denotano, rispettivamente, le densità marginali di X e Y (questi argomenti verranno ripresi più avanti, in maniera più approfondita). Osserviamo solo che l'indipendenza di due v.a. X e Y equivale a richiedere che $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.

• $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2cov(X,Y)$ e, se X e Y sono indipendenti si ha $cov(X,Y) = 0$, e quindi $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$. Naturalmente, come per le v.a. discrete, se $cov(X,Y) = 0$, non è detto che X e Y siano indipendenti.

• il coefficiente di correlazione di X, Y è ancora definito da

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

e risulta $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$.

Se X è una v.a. assolutamente continua, vale ancora la disuguaglianza di Chebicev, e si dimostra in maniera analoga a quanto fatto per una v.a. discreta, sostituendo un integrale al posto di una somma:

Disuguaglianza di Chebychev

Se X è una v.a. assolutamente continua con densità $f(x)$ e media e varianza finite, $\forall \varepsilon > 0$ si ha:

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}. \tag{1.1}$$

Dim. Posto $m = E(X)$, risulta:

$$P(|X - m| > \varepsilon) = \int_{x:|x-m|>\varepsilon} f(x)dx;$$

siccome, per i valori di x dell'insieme di integrazione risulta $\frac{(x-m)^2}{\varepsilon^2} > 1$ (visto che $|x-m| > \varepsilon$), l'integrale è

$$\leq \int_{x:|x-m|>\varepsilon} \frac{(x-m)^2}{\varepsilon^2} \cdot f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 \cdot f(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^2} Var(X).$$

Esempio 1 ($X \sim Uni(0,1)$)

Si ha $f(x) = 1$, se $x \in (0,1)$ e 0 altrimenti; quindi:

$$E(X) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2};$$

$$Var(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Il calcolo di media e varianza per $X \sim Uni(a,b)$ è lasciato per esercizio.

Esempio 2 ($X \sim \mathcal{N}(0,1)$)

Si ha $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ e quindi:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 0,$$

poiché la funzione integranda è dispari.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-x)(-xe^{-x^2/2}) dx;$$

integrando per parti, si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\Big[-xe^{-x^2/2} \Big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \right).$$

Siccome $\Big[-xe^{-x^2/2} \Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$, si ha infine

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1,$$

essendo la funzione integranda la densità di X.
Quindi:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 1 - 0^2 = 1.$$

Se $Y = \sigma X + \mu$, come abbiamo già visto risulta che $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, per cui $E(Y) = E(\sigma X + \mu) = \sigma E(X) + \mu = \sigma \cdot 0 + \mu = \mu$, e $Var(Y) = Var(\sigma X + \mu) = \sigma^2 Var(X)$. Dunque, se $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, allora $E(Y) = \mu$ e $Var(Y) = \sigma^2$; quindi i due parametri μ e σ^2 rappresentano per una v.a. Gaussiana (o Normale) media e varianza.

Esempio 3 (X esponenziale di parametro $\lambda > 0$)
Si ha $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, se $x > 0$, e 0 altrimenti; quindi:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda};$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

da cui

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Esempio 4 ($X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$)
Si ha $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$ se $x > 0$, e 0 altrimenti; quindi, se $\beta > 0$:

$$E(X^\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\beta x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\beta+\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\lambda^{\alpha+\beta}} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{(\beta+\alpha)-1} e^{-\lambda x} dx \right];$$

siccome la quantità in [ ] vale 1, essendo l'integrale di una densità $Gamma(\beta + \alpha, \lambda)$, si ottiene infine

$$E(X^\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\lambda^\beta}. \tag{1.2}$$

Quindi, per $\beta = 1$:

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda},$$

dove abbiamo usato che $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Inoltre, per $\beta = 2$:

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} = \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$

Quindi:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\alpha^2+\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \tag{1.3}$$

Dall'espressione di $E(X^\beta)$ per una v.a. Gamma, possiamo ricavare i momenti di $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ di ordine superiore a 2. Si ha:

$$E(X^{2k+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{2k+1} e^{-x^2/2} dx = 0,$$

poiché la funzione integranda è dispari;

$$E(X^{2k}) = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1);$$

infatti, come abbiamo visto in precedenza $Y = X^2 \sim Gamma(1/2, 1/2)$, ovvero Y ha densità Gamma di parametro α e β entrambe uguali a $1/2$, quindi dalla formula (1.2) con $\alpha = \beta = 1/2$, si ottiene

$$E(X^{2k}) = E(Y^k) = \frac{\Gamma(1/2+k)}{\Gamma(1/2)(1/2)^k} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1),$$

come è immediato verificare, utilizzando le proprietà della funzione Γ.

Esempio 5 ($X \sim \chi^2(n)$)
Siccome, come abbiamo già visto, $X \sim Gamma(n/2, 1/2)$, utilizzando le formule (1.2) e (1.3) con $\alpha = n/2$ e $\beta = 1/2$, risulta:

$$E(X) = \frac{n/2}{1/2} = n, \quad \text{e } Var(X) = \frac{n/2}{1/4} = 2n.$$

Esempio 5 (v.a. per la quale non esiste valor medio - densità di Cauchy)
Consideriamo la v.a. X con densità di Cauchy:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \; x \in \mathbb{R};$$

Intanto, $f(x)$ è una densità in senso proprio, poiché:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi}\Big[\arctan(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}[\pi/2 - (-\pi/2)] = 1.$$

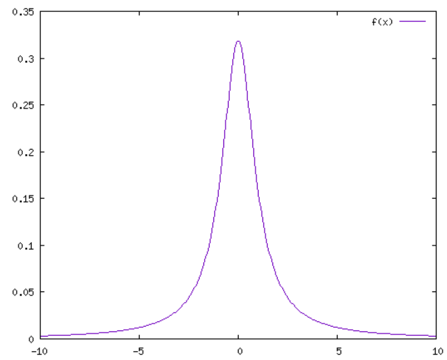

Figure 1: Densità di Cauchy.

Si ha poi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = 2 \int_{0}^{+\infty} x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = +\infty,$$

essendo la funzione integranda infinitesima di ordine 1, per $x \to +\infty$. Quindi, $E(X)$ non esiste finita, ovvero si dice che X è priva di valore di aspettazione.

Osservazione Se X è una v.a. non negativa, provvista di media, allora vale la seguente formula, di cui l'analoga per v.a. discrete abbiamo visto in un esercizio:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x) dx.$$

Infatti, integrando per parti, si ha:

$$\int_0^{+\infty} P(X > x) dx = \Big[P(X > x)x\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x f(x) dx = E(X),$$

visto che $\Big[P(X > x)x\Big]_0^{+\infty} = 0$; ciò si prova osservando che

$$\Big[P(X > x)x\Big]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} x(1 - F(x)) = 0,$$

in quanto, applicando la regola di L'Hospital, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x(1 - F(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - F(x)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-f(x)}{-1/x^2}$$

e questo limite vale zero, poiché se esiste $E(X)$, come è facile vedere, deve essere $xf(x) = o(1/x)$, per $x \to +\infty$, ovvero $f(x) = o(1/x^2)$.

Facciamo ora un esempio di applicazione della formula

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x) dx,$$

valevole per una v.a. assolutamente continua $X \geq 0$, e provvista di media.

Supponiamo che X sia una v.a. esponenziale di parametro $\lambda > 0$; sappiamo che X è non negativa, e la sua media esiste e vale $\frac{1}{\lambda}$. Ricordando inoltre che, per $x \geq 0$ la f.d.d. è $F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$, e quindi $P(X > x) = e^{-\lambda x}$, otteniamo

$$\int_0^{+\infty} P(X > x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \Big[- \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda},$$

e quindi $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, come avevamo già ottenuto in precedenza.