Equazioni differenziali stocastiche

Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

Prova scritta del 9 Settembre 2011

1. Sia B_t un $\mathcal{F}_t-$moto Browniano.
Se $0 < s < t$, calcolare $E(B_t^2 B_s^2)$.
(Sugg. si ricordi che, se $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, risulta $E(Z^4) = 3\sigma^4$).

2. Calcolare, per $s < t$:

$$E\Big[B_s \int_0^t B_v dB_v\Big] + E(B_5^2).$$

3. Sia B_t un $\mathcal{F}_t-$moto Browniano e $X(t) = 5B_t^2 - 7t^2,\ t \geq 0$.
(i) Provare che $Y(t) := X(t) + 7t^2 - 5t$ è una $\mathcal{F}_t-$martingala.
(ii) Trovare $t > 0$ tale che $E(Y(t)^2) = 200$.

4. Si consideri l'equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} dX(t) = -2X(t) + 3dB_t \\ X(0) = 1 \end{cases}$$

(ii) Trovare la soluzione esplicita, $X(t)$.
(ii) Provare che $X(t)$ è un processo Gaussiano con media $E(X(t)) = e^{-2t}$ e varianza $Var(X(t)) = \frac{9}{4}(1 - e^{-4t})$.
(iii) Sia $W(t)$ un moto Browniano (eventualmente diverso da B_t) e si consideri il processo

$$V(t) = e^{-2t}\left(1 + \frac{3}{2}W(e^{4t} - 1)\right)$$

Mostrare che $V(t)$ e $X(t)$ hanno la stessa legge.
(iv) Calcolare $P\left(X\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{e}\right)$.

Soluzioni della prova scritta di EDS del 9 Settembre 2011

1. Per $s < t$:

$$E(B_s^2 B_t^2) = E(E(B_s^2 B_t^2 | \mathcal{F}_s)) = E(B_s^2 E(B_t^2 | \mathcal{F}_s));$$

Sappiamo che $Z_t = B_t^2 - t$ è una martingala, per cui $E(Z_t | \mathcal{F}_s) = Z_s$, cioé $E(B_t^2 - t | \mathcal{F}_s) = B_s^2 - s$, ovvero

$$E(B_t^2 | \mathcal{F}_s) = B_s^2 - s + t$$

Dunque, riprendendo il calcolo, otteniamo

$$E(B_s^2 B_t^2) = E(B_s^2(B_s^2 - s + t)) = E(B_s^4) + (t - s)E(B_s^2).$$

Ricordando che, se $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, risulta $E(Z^4) = 3\sigma^4$, si ottiene infine

$$E(B_s^2 B_t^2) = 3s^2 + (t - s)s$$

2. Si ha, se $s < t$:

$$E\left(B_s \int_0^t B_v dB_v\right) + E(B_5^2) = E\left(\int_0^s \mathbf{1}_{[0,s]}(t) dB_t \cdot \int_0^t B_v dB_v\right) + 5 =$$

$$= E\left(\int_0^t \mathbf{1}_{[0,s]}(v) dB_v \cdot \int_0^t B_v dB_v\right) + 5 =$$

$$= \int_0^t E(\mathbf{1}_{[0,s]}(v) B_v) dv + 5 = 0 + 5 = 5.$$

3. Dalla formula di Itô si ottiene

$$dX(t) = (-14t + 5)dt + 10 B_t dB_t$$

per cui

$$X(t) = \int_0^t (-14s + 5) ds + 10 \int_0^t B_s dB_s = -7t^2 + 5t + 10 \int_0^t B_s dB_s$$

Pertanto $Y(t) = X(t) + 7t^2 - 5t = 10 \int_0^t B_s dB_s$, che è una martingala. Si ha poi:

$$E(Y(t)^2) = 100 \cdot E\left(\int_0^t B_s dB_s\right)^2 = 100 \int_0^t E(B_s^2) ds = 100 \int_0^t s ds = 50t^2.$$

Quindi, se si vuole che $E(Y^2(t)) = 200$, deve essere $t = 2$.

4. (i) Posto $V_t = X_t e^{2t}$, dalla formula di Itô si ottiene:

$$dV_t = (2X_t e^{2t} + e^{2t}(-2X_t) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 9)dt + 3e^{2t} dB_t = 3e^{2t} dB_t$$

Quindi $V_t = V_0 + \int_0^t 3e^{2s} dB_s$, da cui:

$$X_t = e^{-2t} \left[X(0) + \int_0^t 3e^{2s} dB_s \right] = e^{-2t} \left(1 + \int_0^t 3e^{2s} dB_s \right) =$$

$$e^{-2t} + 3 \int_0^t e^{-2(t-s)} dB_s \ .$$

(ii) Risulta $E(X_t) = e^{-2t}$, poiché l'integrale stocastico ha media zero; inoltre X_t è un processo Gaussiano, poiché $\int_0^t e^{-2(t-s)} dB_s$ è un processo Gaussiano, in quanto integrale stocastico di funzione deteministica. Calcoliamo la varianza di $X(t)$; si ha:

$$Var(X_t) = E\left[\left(\int_0^t 3e^{-2(t-s)} dB_s \right)^2 \right] = \int_0^t \left(3e^{-2(t-s)} \right)^2 ds = \frac{9}{4}(1 - e^{-4t}).$$

(iii) Essendo X_t e V_t entrambi processi Gaussiani, basta mostrare che hanno la stessa media e la stessa varianza. Invero, $E(V_t) = e^{-2t} = E(X_t)$ e $Var(V_t) = \frac{9}{4} e^{-4t} Var(W(e^{4t} - 1)) = \frac{9}{4} e^{-4t}(e^{4t} - 1) = \frac{9}{4}(1 - e^{-4t}) = Var(X_t)$.
(iv) Si ha:

$$P\left(X\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1/e \right) = P\left(e^{-1}\left(1 + \frac{3}{2} W(e^2 - 1)\right) \leq 1/e \right) =$$

$$= P\left(1 + \frac{3}{2} W(e^2 - 1) \leq 1\right) = P\left(W(e^2 - 1) \leq 0\right) = \frac{1}{2} \ ,$$

poiché $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$.