Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
Prova scritta del 7 settembre 2023

Punteggi: **1:** $4 + 3 + 3$; **2:** 4×3; **3:** 4×2.

1. Sia X una variabile aleatoria a valori interi positivi tale che, per $k \geq 1$, risulti $P(X > k) = (2/3)^k$, e Y un'altra v.a., indipendente da X e con la stessa legge di X.
(i) Calcolare $P(X^2 < Y^2)$.
(ii) Calcolare $E[(X-1)^2 - \frac{1}{2}(1-Y)^2]$.
(iii) Siano U e V v.a. indipendenti con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = E(X)$, dove X è la v.a. di cui sopra. Calcolare

$$P\left(2 - UV \leq \frac{U^2 + V^2}{2} < 8 - UV\right).$$

2. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità uniforme sul triangolo Δ di vertici $(0,0),\ (0,1),\ (2,0)$, ovvero:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in \Delta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y e calcolare $cov(X,Y)$. Dire se X e Y sono indipendenti.
(ii) Calcolare $P(X > 2Y)$.
(iii) Calcolare $P(X \leq Y | X > 1/2)$.

3. Per assemblare un televisore si utilizza un certo tipo di componente, la cui durata è una v.a. con distribuzione esponenziale di media 100 ore. Ogni volta che una componente si guasta, esso viene immediatamente sostituito con un altro, identico. Si suppongono trascurabili i tempi necessari per le sostituzioni (e fra loro indipendenti le durate dei diversi componenti).
(a) Qual è la probabilità che, utilizzando 50 componenti, un televisore funzioni per almeno 3000 ore e non più di 6000?
(b) Quanti componenti si dovranno utilizzare affinché un televisore funzioni per non meno di 5000 ore con una probabilità di almeno 0.95?

Soluzioni della prova scritta del 7 settembre 2023

1. Dal fatto che $P(X > k) = (2/3)^k$, si desume che X è geometrica modificata di parametro $p = 1/3$, quindi $P(X = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, \; k = 1, 2, \ldots$ e $E(X) = 1/p = 3$.
(i) Si ha:

$$P(X^2 < Y^2) = P(|X|) < |Y|) = P(X < Y)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X < k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right],$$

visto che $P(X < k) = 1 - P(X \geq k) = 1 - P(X > k - 1) = 1 - (\frac{2}{3})^{k-1}$. Continuando il calcolo:

$$P(X^2 < Y^2) = \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{k}$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1 - 4/9} - 1\right) = 1 - \frac{3}{4}(9/5 - 1) = 1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

(ii) Si ha:

$$E[(X - 1)^2 - \frac{1}{2}(1 - Y)^2] = E[X^2 - 2X + 1/2 + Y - Y^2/2].$$

Visto che

$$E(X^2) = E(Y^2) = Var(X) + E^2(X) = \frac{1 - p}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{2 - p}{p^2},$$

la media cercata vale

$$\frac{2 - p}{p^2} - 2/p + 1/2 + 1/p - \frac{1}{2}\cdot\frac{2 - p}{p^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2 - p}{p^2} - 1/p + 1/2 = \ldots = 5,$$

dove si è sostituito $p = 1/3$.
(iii) U e V hanno distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = E(X) = 3$. Si ha:

$$P\left(2 - UV \leq \frac{U^2 + V^2}{2} < 8 - UV\right) = P\left(4 \leq U^2 + V^2 + 2UV < 16\right)$$

$$= P(2 \leq U + V < 4) = P(U + V \in \{2,\ 3\}).$$

Siccome $U + V \sim Poisson(3 + 3)$, la probabilità cercata vale

$$e^{-6}\left(6^2/2 + 6^3/6\right) = 36 \cdot \frac{3}{2}e^{-6} = 0.1338.$$

2. Il triangolo (rettangolo) Δ in questione ha come cateti il segmento di lunghezza 1 sull'asse delle ordinate, il segmento di lunghezza 2 sull'asse delle ascisse, e come ipotenusa il segmento ottenuto dall'intersezione con gli assi della retta di equazione $y = 1 - x/2$. Risulta $f(x,y) = \mathbf{1}_\Delta(x,y)$ (l'area di Δ vale 1).
(i) Poiché per $(x,y) \in \Delta$ deve essere $y \leq 1 - x/2$, si ha, per $x \in (0,2)$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{1-x/2} 1 \cdot dy = (1 - x/2),$$

mentre essa vale zero fuori di $(0,2)$.
Dovendo essere $x \leq 2(1-y)$, si ha per $y \in (0,1)$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{2(1-y)} 1 \cdot dx = 2(1-y),$$

mentre essa vale zero fuori di $(0,1)$.
Dunque:

$$f_X(x) = (1 - x/2)\mathbf{1}_{(0,2)}(x), \;\; f_Y(y) = 2(1-y)\mathbf{1}_{(0,1)}(y).$$

Le v.a. X e Y non sono indipendenti, essendo $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.
Risulta:

$$E(X) = \int_0^2 x \cdot (1 - x/2)dx = \left[x^2/2 - x^3/6\right]_0^2 = 2/3$$

$$E(Y) = \int_0^1 y \cdot 2(1-y)dy = 2\left[y^2/2 - y^3/3\right]_0^1 = 1/3$$

$$E(XY) = \int_0^2 xdx \int_0^{1-x/2} ydy = \ldots = 1/6$$

Quindi

$$cov(X.Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{18} \; .$$

(ii) Si ha:

$$P(X > 2Y) = \int\int_E f(x,y)dxdy$$

ove

$$E = \{(x,y) : (x,y) \in \Delta, \; y < x/2\} = E_1 \cup E_2,$$

e E_1 è il triangolo rettangolo di vertici $(0,0), \; (1,0), \; (1,1/2)$, mentre E_2 è il triangolo rettangolo di vertici $(1,0), \; (2,0), \; (1,1/2)$. Allora:

$$\int\int_E f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x/2} dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-x/2} dy$$

$$= \int_0^1 dx \; x/2 + \int_1^2 (1 - x/2)dx = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

(iii) Si ha:

$$P(X \le Y | X > 1/2) = \frac{P(1/2 < X \le Y)}{P(X > 1/2)}$$

Il numeratore è dato dall'area del triangolo delimitato dalla retta di eq. $y = x$, dalla retta $x = 1/2$, dalla retta $y = 1 - x/2$. Pertanto:

$$P(X \le Y | X > 1/2) = \frac{\int_{1/2}^{2/3} dx \int_x^{1-x/2} dy}{\int_{1/2}^{2} (1 - x/2) dx} = \ldots = \frac{\frac{1}{48}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{27}$$

3.

Sia X la durata di un generico componente e λ il parametro della legge esponenziale seguita da X. Per formule note si ha $100 = E[X] = 1/\lambda$, $VarX = 1/\lambda^2$, da cui $\lambda = 10^{-2}$ e $VarX = 10^4$.

(a) Per $i = 1, 2, \ldots 50$, sia X_i la durata dell' i-esimo componente. Il tempo totale di funzionamento di un televisore è dato evidentemente da $S_{50} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{50}$. Si chiede di calcolare $P(3000 \le S_{50} \le 6000)$, cioé $P(S_{50} \le 6000) - P(S_{50} < 3000)$. Posto $\mu = E[X_i]$ e $\sigma^2 = Var(X_i)$, dai dati si ricava $\mu = 10^2$ e $\sigma^2 = 10^4$. Dato che le X_i sono indipendenti, hanno la stessa legge e media e varianza finita (e $n = 50$ è abbastanza grande) si può applicare la formula dell' approssimazione normale, fornita dal TLC:

$$P(S_{50} \le 6000) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \le \frac{6000 - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}}\right) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \le \frac{6000 - 5000}{100\sqrt{50}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \le 1.41\right) \approx \Phi(1.41) = 0.921$$

ove Φ denota la f.d.d. di una v.a. normale standard; analogamente:

$$P(S_{50} \le 3000) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \le \frac{3000 - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}}\right) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \le \frac{3000 - 5000}{100\sqrt{50}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \le -2.83\right) \approx \Phi(-2.83) = 1 - \Phi(2.83) = 1 - 0.997 = 0.003$$

Dunque, la probabilità cercata è uguale a $0.921 - 0.003 = 0.918$.

(b) Sia n il numero di componenti necessari e, per $i = 1, 2 \ldots, n$ sia X_i la durata dell'i-esimo componente. In modo analogo al punto precedente, si osserva che il tempo totale di funzionamento di un televisore è dato evidentemente da $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, e si chiede che risulti $P(S_n \ge 5000) \ge 0.95$ Dalla formula dell'approssimazione normale, si ottiene

$$P(S_n \ge 5000) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \ge \frac{5000 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \ge \frac{50 - n}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \Phi((50 - n)/\sqrt{n}) = \Phi(-(50 - n)/\sqrt{n})$$

Dovrà dunque essere

$$\Phi((n-50)/\sqrt{n}) \geq 0.95$$

D'altra parte, $0.95 = \Phi(1.65)$, pertanto, essendo Φ crescente, deve aversi

$$\frac{n-50}{\sqrt{n}} \geq 1.65$$

Risolvendo rispetto a n la disuguaglianza precedente, si ricava $\sqrt{n} \geq 7.94$ da cui $n \geq 63.02$, e dunque $n \geq 64$.