Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
Prova scritta del 25-06-24
a.a. 2023/24

Punteggi: **1:** $2.5 + 2.5 + 5$; **2:** $3 + 6 + 1.5 + 1.5$; **3:** $4 + 4$;
totale= 30.

1. Sia $W \geq 0$ una v.a. con densità $f_W(w) = (e^{1-ew}) \cdot \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(w)$, e poniamo $X = [W]+1$, dove [ ] denota la parte intera.
(i) Trovare la densità discreta di X. Si tratta di una legge nota?
(ii) Calcolare $E(X)$ e $E(X^2)$.
(iii) Sia S il primo istante in cui il lancio di un dado regolare fornisce un numero dispari.
(a) Calcolare $P(3 \leq S < 30)$.
(b) Supposto che S sia indipendente da X, calcolare $P(X + 1 > S)$.

2. Si consideri il vettore aleatorio bidimensionale (X, Y) avente densità congiunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-(\lambda x+\lambda y)} e^{-\alpha xy} & \text{se } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

dove $\lambda > 0$ e $\alpha \geq 0$.
(i) Calcolare le densità marginali di X e Y e trovare il valore di α affinché X e Y siano stocasticamente indipendenti.
Per il valore di α trovato e $\lambda = 8$:
(ii) trovare la densità di $W = \frac{X+Y}{X}$;
(iii) calcolare $E(W - 1)$, se esiste;
(iv) calcolare $P(1/2 \leq W < 3/4)$.

3. (i) Una compagnia di assicurazioni vuole condurre una indagine per stimare l'indennizzo medio pagato a seguito di incidenti domestici. Analisi pregresse mostrano che tali importi possono essere assunti avere distribuzione Gaussiana con media a incognita e deviazione standard nota e pari a 400 euro. Su un campione casuale $(X_1, ..., X_n)$ di n incidenti è stato osservato un indennizzo medio $\bar{X}_n$ pari a 6230 euro. Determinare un intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha = 0.95$ per il parametro a, quando l'ampiezza del campione è $n = 144$.
(ii) Sia Z una v.a. con distribuzione normale di media μ e varianza 120; trovare μ e r in modo che risulti:

$$\begin{cases} P(Z \leq r) = 1/2 \\ P(Z \leq 2\mu) = 0.975 \end{cases}$$

Soluzioni della prova scritta del 25-06-24 a.a. 2023/24

1. (i) Osserviamo che la densità di W si può scrivere $f_W(w) = e \cdot e^{-ew} \cdot \mathbf{1}_{\{w \geq 0\}}(w)$, pertanto W ha distribuzione esponenziale di parametro e. Allora, per $k = 1, 2, \dots,$ si ha:

$$P(X = k) = P([W] + 1 = k) = P([W] = k - 1) = P(W \in [k - 1, k))$$

$$= \int_{k-1}^{k} ee^{-ew} dw = (1 - e^{-e})(e^{-e})^{k-1},$$

ovvero X ha densità geometrica modificata di parametro $p = 1 - e^{-e}$.
(ii) Dalla teoria segue subito che $E(X) = 1/p = 1/(1 - e^{-e}) = \frac{e^e}{e^e - 1}$ e
$Var(X) = (1 - p)/p^2 = \frac{1-(1-e^{-e})}{(1-e^{-e})^2}$; quindi $E(X^2) = Var(X) + E^2(X) = \frac{1+e^{-e}}{(1-e^{-e})^2}$.
(iii) S è l'istante di primo successo in una sequenza di prove di Bernoulli indipendenti, in ognuna delle quali la probabilità del successo è $1/2$, quindi, per $k = 1, 2 \dots,$ risulta $P(S = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Dunque:

$$P(3 \leq S < 30) = \sum_{k=1}^{29} \left(\frac{1}{2}\right)^k - P(S = 1) - P(S = 2) =$$

$$= \frac{1 - (1/2)^{29}}{1/2} - 1 - 3/4 \approx 0.25 \ .$$

(iv) Siccome X e S sono indipendenti, per $p = 1 - e^{-e}$:

$$P(X > S - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X > k - 1)P(S = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - p}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (1 - p)/2} = \frac{1}{1 + p} = \frac{1}{2 - e^{-e}} \ .$$

2. (i) Si ha:

$$f_X(x) = \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^{+\infty} e^{-y(\lambda+\alpha x)} dy = \lambda^2 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda + \alpha x} \int_0^{+\infty} dy (\lambda + \alpha x) e^{-(\lambda+\alpha x)y}$$

$$= \lambda^2 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda + \alpha x} \ ,$$

visto che l'integrale vale 1, in quanto la funzione integranda è la densità esponenziale di parametro $\lambda + \alpha x$.
Analogamente:

$$f_Y(y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \int_0^{+\infty} e^{-x(\lambda+\alpha y)} dx = \lambda^2 \frac{e^{-\lambda y}}{\lambda + \alpha y} \ .$$

Affinché X e Y siano indipendenti, cioè risulti $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, deve essere $\alpha = 0$.
(ii) Per $\alpha = 0$, X e Y sono v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro λ. Risulta $W = 1 + Y/X$ ed il range di W é $(1, +\infty)$. Per $w > 1$ si ha:

$$P(W \leq w) = P(1 + Y/X \leq w) = P(Y \leq (w-1)X)$$

$$= \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \int_0^{(w-1)x} dy e^{-\lambda y}.$$

Derivando rispetto a w, si ottiene la densità di W :

$$f_W(w) = \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(w-1)x} dx = \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda w x} x dx$$

$$= (\lambda/w) \int_0^{+\infty} (\lambda w) e^{-(\lambda w)x} x dx = (\lambda/w)(1/(\lambda w)) = 1/w^2.$$

(iii) La media di W non esiste, visto che

$$\int_1^{+\infty} w \cdot 1/w^2 dw = +\infty.$$

(iv) Ovviamente $P(1/2 < W < 3/4) = 0$, visto che l'intervallo $(1/2, 3/4)$ sta fuori del range di W.

3. (i) Un intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha$ per la media incognita a di una distribuzione con varianza σ^2 nota ha l'espressione:

$$\left[\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

dove n è la dimensione del campione e $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}}$ è il quantile di ordine $1 - \frac{\alpha}{2}$ della distribuzione gaussiana standard. Sostituendo i dati forniti dal problema si ottiene l'intervallo

$$\left[6230 - \frac{400}{12}\phi_{0.975}, 6230 + \frac{400}{12}\phi_{0.975}\right] = \left[6230 - \frac{196}{3}, 6230 + \frac{196}{3}\right] = [6164.67, 6295.3]\,.$$

(ii) Se $Z \sim \mathcal{N}(\mu, 120)$, da $P(Z \leq r) = 1/2$, segue:

$$P\left(\frac{Z-\mu}{\sqrt{120}} \leq \frac{r-\mu}{\sqrt{120}}\right) = 1/2,$$

che implica $\Phi(\frac{r-\mu}{\sqrt{120}}) = 1/2$ e quindi $r = \mu$. Resta da trovare μ; dalla relazione $P(Z \leq 2\mu) = 0.975$, si ottiene $P(\frac{Z-\mu}{\sqrt{120}} \leq \frac{2\mu-\mu}{\sqrt{120}}) = \Phi(\mu/\sqrt{120}) = 0.975 = \Phi(1.96)$, da cui $\mu/\sqrt{120} = 1.96$, ovvero $\mu = 1.96\sqrt{120} = 21.47$. In conclusione, $r = \mu = 21.47$.