Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

Prova scritta del 6 Settembre 2024
A.A. 2023-2024

Durata della prova 2:30 h
Punteggi: 1) $2+2+6$; **2)** $4+4+4$ **3)** $4+4$.

Totale = 30.

Esercizio 1 1. Sia X il numero delle volte che esce *Testa* in due lanci di una moneta, truccata in modo che la probabilità di uscita di *Testa* in ogni lancio sia $p \in (0, 1/2)$. Sia invece Y il numero delle volte che esce un numero pari, effettuando tre lanci di un dado perfetto a sei facce. Le v.a. X e Y sono stocasticamente indipendenti?

(i) Trovare la legge di Y e, sapendo che $2^7 \cdot P(X = 2, Y = 3) = 1$, trovare anche quella di X. Si tratta di distribuzioni note?

(ii) Sia T il numero di lanci della moneta necessari ad ottenere *Croce* per la prima volta; quanto vale $P(T < 5/4)$? quanto vale $E(T)$?

(iii) Se $Z = \min(X, Y)$, calcolare $P(Z = 1)$, $P(X \le Y)$ e $E(3YX)$.

Esercizio 2 Si consideri il polinomio di secondo grado nella indeterminata t :

$$q(t) = t^2 + tX + Y,$$

ove i coefficienti X e Y non sono fissi, ma sono v.a. indipendenti ed uniformemente distribuite in $[0, 1]$.

(i) Calcolare la probabilità che $q(t)$ non abbia radici reali.

(Sugg: ciò equivale a dire $\Delta = X^2 - 4Y < 0$).

(ii) Se

$$Z = \frac{X + Y}{X},$$

trovare la densità di Z e calcolare, se esiste, $E(Z)$.

(iii) Calcolare $P(Z < -1)$, $P(2 < Z \le 3)$, e trovare il quantile di Z di ordine $1/8$, cioé il valore $q_{1/8}$ per cui $P(Z \le q_{1/8}) = 1/8$.

Esercizio 3 Si esamina un campione di $n = 100$ frigoriferi e si trova che la media campionaria del loro tempo di vita è $\bar{x}_n = 50$ (mesi). Ipotizzando che il tempo di vita di un frigorifero del campione sia una v.a. X con varianza $\sigma^2 = 144$ e media μ incognita:

(i) si trovi un intervallo di confidenza al livello $1 - \alpha = 0.95$ per la media incognita μ.

(ii) Ora si supponga che sia stato esaminato un altro campione di 100 frigoriferi, con media campionaria $\bar{X}_{100}$ incognita, ma supponiamo di sapere che $J = [45.648, 50.352]$ sia un intervallo di confidenza al livello $1 - \alpha = 0.95$ per la media incognita μ del tempo di vita (simmetrico rispetto a μ), sempre supponendo $\sigma = 12$. Trovare $\bar{X}_{100}$. Quale delle due partite di frigoriferi risulta in media più duratura?

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2023-24

Soluzioni della seconda prova scritta - 6 Settembre 2024

Esercizio 1 **1.** Le v.a. X e Y sono ovviamente indipendenti, visto che i risultati dei lanci della moneta non influenzano i risultati dei lanci del dado; inoltre $X \sim B(2, p)$, con p parametro da trovare, mentre $Y \sim B(3, \frac{1}{2})$.

(i) Siccome X e Y sono indipendenti, si ha:

$$\frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = P(X = 2, Y = 3) = P(X = 2)P(Y = 3) = p^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

da cui si ottiene $p^2 = \frac{8}{128} = \frac{1}{16}$ e quindi $p = \frac{1}{4}$.

(ii) T è il tempo di primo successo in una sequenza di prove ripetute ed indipendenti in cui la probabilità del successo è costante ed uguale a $P(\text{“Croce”}) = 1 - P(\text{“Testa”}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. La v.a T ha distribuzione geometrica modificata di parametro $3/4$, dunque:

$$P(T = k) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}, \;\; k = 1, 2, \ldots$$

Pertanto $P(T < 5/4) = P(T = 1) = \frac{3}{4}$, e $E(T) = 1/p = 4/3$.

(iii) Se $Z = \min(X, Y)$, si ha, per $k = 0, 1, 2 : P(Z \geq k) = P(X \geq k, Y \geq k)$ e, essendo X e Y indipendenti, questa probabilità vale $P(X \geq k)P(Y \geq k)$. Siccome $P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k + 1)$, si ottiene:

$$P(Z = k) = P(X \geq k)P(Y \geq k) - P(X \geq k + 1)P(Y \geq k + 1), \;\; k = 0, 1, 2$$

Per $k = 1$, si ha allora:

$$P(Z = 1) = P(X \geq 1)P(Y \geq 1) - P(X \geq 2)P(Y \geq 2) =$$
$$= \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) - \frac{1}{16}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] =$$
$$= \frac{7}{16} \cdot \frac{7}{8} - \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{8} = \frac{45}{16 \cdot 8} \approx 0.3516$$

Si ha: $P(X \leq Y) = 1 - P(X > Y)$ e

$$P(X > Y) = \sum_{k=0}^{2} P(X = k, Y < k) =$$

(per l'indipendenza di X e Y)

$$= \sum_{k=0}^{2} P(X = k)P(Y < k) =$$

$$= P(X = 0)P(Y < 0) + P(X = 1)P(Y < 1) + P(X = 2)P(Y < 2) =$$
$$= 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{3}{64} + \frac{1}{32} = \frac{5}{64}$$

Pertanto $P(X \leq Y) = 1 - \frac{5}{64} = \frac{59}{64}$. Inoltre, siccome X e Y sono indipendenti, si ha $E(3YX) = 3E(YX) = 3E(Y)E(X)$; ricordando poi che la media di una v.a. binomiale di parametri n e p è np, si ottiene infine

$$E(Y \cdot 3X) = 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{9}{4}.$$

Esercizio 2 (i) La probabilità cercata è

$$P(\Delta < 0) = P(X^2 - 4Y < 0) = P(Y > X^2/4) = \int \int_E dxdy,$$

ove $E = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ y > x^2/4\}$; tale integrale doppio non è altro che l'area della porzione del quadrato di vertici $(0, 0),\ (1, 0),\ (0, 1),\ (1, 1)$ situato sopra la parabola di equazione $y = x^2/4$, che vale

$$1 - \int_0^1 \frac{x^2}{4}\, dx.$$

Pertanto:

$$P(\Delta < 0) = 1 - \int_0^1 \frac{x^2}{4}\, dx = 1 - \frac{1}{4}\left[x^3/3\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

(ii) Si ha:

$$Z = \frac{X + Y}{X} = 1 + \frac{Y}{X},$$

dunque il range di Z risulta essere l'intervallo $(1, +\infty)$.

Per $z > 1$ si ha:

$$P(Z \leq z) = P\left(\frac{Y}{X} \leq z - 1\right) = P(Y \leq (z - 1)X);$$

Come si vede facilmente facendo la figura, se $1 < z \leq 2$ tale probabilità è uguale all'area di un triangolo, oppure:

$$\int_0^1 (z - 1)x dx = \frac{z - 1}{2};$$

Se $z > 2$, $P(Z \leq z)$ è uguale all'area del trapezio rettangolo individuato dall'asse x, dalla retta $x = 1$, dalla retta $y = 1$ e dalla retta di equazione $y = (z - 1)x$; per differenza con l'area del quadrato, si tratta di calcolare prima l'area di un triangolo, oppure, procedendo con l'integrale doppio:

$$P(Z \leq z) = 1 - \int_0^{1/(z-1)} dx \int_{(z-1)x}^1 dy = 1 - \frac{1}{2}\ \frac{1}{z - 1}.$$

Riassumendo:

$$P(Z \leq z) = \begin{cases} 0 & se\ z \leq 1; \\ \frac{z-1}{2} & se\ 1 < z \leq 2; \\ 1 - \frac{1}{2}\ \frac{1}{z-1} & se\ z > 2. \end{cases}$$

e la densità di Z si ottiene derivando:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & se\ z \leq 1; \\ \frac{1}{2} & se\ 1 < z \leq 2; \\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{(z-1)^2} & se\ z > 2. \end{cases}$$

La media di Z non esiste, essendo $f_Z(z)$ infinitesima di ordine 2, per $z \to +\infty$.

(iii) $P(Z < -1)$ è ovviamente zero, mentre

$$P(2 < Z < 3) = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{(z-1)^2}\, dz = \frac{1}{4}.$$

Dall'espressione di $F_Z(z) = P(Z \leq z)$ si ricava facilmente che $F(5/4) = 1/8$, quindi $q_{1/8} = 5/4$.

Esercizio 3 (i) Un intervallo I di confidenza a livello $1-\alpha$ per la media incognita di una distribuzione avente varianza σ^2, è:

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}\right] \qquad (*)$$

dove $\bar{x}$ è la media campionaria e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso in esame, si ha $n = 100,\ \sigma = 12$, e la media campionaria è $\bar{x} = 50$; inoltre, da $1-\alpha = 0.95$ segue $1-\alpha/2 = 0.975$; dalla tavola dei valori di Φ si ricava $\Phi(1.96) = 0.975$, dunque $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ Sostituendo in $(*)$, si ottiene che un intervallo di confidenza per la media μ di X, al livello 0.95 è:

$$I = \left[50 - \frac{12}{10}\cdot 1.96,\ 50 + \frac{12}{10}\cdot 1.96\right] = [47.648,\ 52.352]\ .$$

(ii) Se deve essere $J = [\bar{X}_{100} - \frac{12}{10}\cdot 1.96,\ \bar{X}_{100} + \frac{12}{10}\cdot 1.96] = [45.648,\ 50.352]$, allora si ha $\bar{X}_{100} - 1.2\cdot 1.96 = 45.648$, da cui $\bar{X}_{100} = 48$. Quindi la seconda partita di frigoriferi è in media meno duratura della prima.