Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

Seconda prova scritta - 16 Luglio 2024
A.A. 2023-2024

Durata della prova 2:30 h
Punteggi: 1) $4+4$; **2)** $4+3+4$ **3)** $3+4+4$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti ed uniformi sull'insieme $\{-2,-1,1\}$

(i) Calcolare $P(X<Y)$ e la densità di $Z=\max(X,Y)$.

(ii) Determinare la densità della variabile aleatoria $U:=X-Y$, e calcolare $Cov(U,X+2Y)$.

Esercizio 2 Sia (X,Y) un vettore aleatorio di densità congiunta $f(x,y)=e^{-y}$ per $0<x<y$.

(i) Trovare le densità marginali di X e Y. Calcolare inoltre $Cov(X,Y)$.

(ii) Trovare la densità condizionale di X dato $Y=5$. Si tratta di una densità nota?

(iii) Sia $Z=Y-X$. Trovare la densità congiunta di (X,Z). Le varabili aleatorie X e Z sono indipendenti?

Esercizio 3 Un campione di 100 dischetti per computer viene estratto da una grossa fornitura ed esaminato per rilevare eventuali difetti. Si trova che 80 pezzi superano il controllo.

(i) Calcolare un intervallo di confidenza a livello $1-\alpha=0.9$ per la percentuale p di dischetti della fornitura accettabili.

(ii) Sia $p=0.6$. Utilizzando l'approssimazione normale stimare la probabilità che in una produzione di 100 dischetti ve ne siano non più di 33 difettosi.

(iii) Siano $X_1,X_2,...$ v.a. di Bernoulli di parametro $p=0.8$, e sia $\overline{X}_n:=\frac{X_1+X_2+..+X_n}{n}$. Stimare quanto deve essere grande n affinché sia $P(|\overline{X}_n-p|\leq 0.01)\geq 0.99)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2023-24

Soluzioni della seconda prova scritta - 16 Luglio 2024

Esercizio 1 (i)

$$\{X < Y\} = (X, Y) \in \{(-2,-1), (-2,1), (-1,1)\}.$$

Quindi

$$P(X < Y) = p_{X,Y}(-2,-1) + p_{X,Y}(-2,1) + p_{X,Y}(-1,1) = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Notiamo che $Im(Z) = \{-2,-1,1\}$ e inoltre

$$\begin{cases} \{Z=-2\} & = \{X=-2, Y=-2\} \\ \{Z=-1\} & = \{X=-2, Y=-1\} \cup \{X=-1, Y=-1\} \cup \{X=-1, Y=-2\} \\ \{Z=1\} & = \{X=-2, Y=1\} \cup \{X=-1, Y=1\} \cup \{X=1, Y=1\} \cup \{X=1, Y=-2\} \cup \{X=1, Y \end{cases}$$

Quindi

$$p_Z(-2) = \frac{1}{9}, \ \ p_Z(-1) = \frac{3}{9} \ \ p_Z(1) = \frac{5}{9}.$$

(ii) Notiamo che $Im(U) = \{-3,-2,-1,0,2,3\}$ e inoltre

$$\begin{cases} \{U=-3\} & = \{X=-2, Y=1\} \\ \{U=-2\} & = \{X=-1, Y=1\} \\ \{U=-1\} & = \{X=-2, Y=-1\} \\ \{U=0\} & = \{X=-2, Y=-2\} \cup \{X=-1, Y=-1\} \cup \{X=1, Y=1\} \\ \{U=1\} & = \{X=-1, Y=-2\} \\ \{U=2\} & = \{X=1, Y=-1\} \\ \{U=3\} & = \{X=1, Y=-2\} \end{cases}$$

Quindi

$$p_U(-3) = p_U(-2) = p_U(-1) = p_U(1) = p_U(2) = p_U(3) = \frac{1}{9} \ \ p_U(0) = \frac{1}{3}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} Cov(U, X+2Y) =& Cov(X-Y, X+2Y) = Cov(X, X+2Y) - Cov(Y, X+2Y) = \\ =& Var(X) + 2Cov(X,Y) - Cov(X,Y) - 2Var(Y) = Var(X) - 2Var(Y) \end{aligned}$$

Siccome $Var(X) = Var(Y)$ allora $Cov(U, X+2Y) = -Var(X)$. Infine

$$E(X) = -\frac{2}{3}, \ \ E(X^2) = \frac{6}{3} = 2$$

e pertanto $Cov(U, X+2Y) = -(E(X^2) - E(X)^2) = -\frac{14}{9}$.

Esercizio 2 (i) Si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-y} \mathbf{1}_{\{0<x<y\}}(x,y) =$$

$$= \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = \Big[-e^{-y} \Big]_x^{+\infty} = e^{-x}, \text{ se } x > 0.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-y} \mathbf{1}_{\{0<x<y\}}(x,y) =$$
$$= \int_0^y e^{-y} dx = y e^{-y}, \text{ se } y > 0.$$

Quindi $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim \Gamma(2,1)$ e pertanto $E(X) = 1$, $E(Y) = 2$. Inoltre

$$E(XY) = \int_0^{+\infty} y dy \int_0^y x e^{-y} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y} dy =$$
$$= \frac{\Gamma(4)}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(4)} y^3 e^{-y} dy = \frac{3 \times 2}{2} = 3,$$

e dunque $Cov(X,Y) = 3 - 2 = 1$.

(ii) Si ha

$$f_{X|Y}(x|5) = \frac{e^{-5} \mathbb{1}_{0<x<5}}{5e^{-5}} = \frac{1}{5} \mathbb{1}_{0<x<5},$$

ovvero la densità condizionale di X dato $Y = 5$ è una densità uniforme sull'intervallo $[0,5]$.

(iii) Consideriamo ora la trasformazione $g : (X,Y) \longrightarrow (X,Z)$

$$\begin{cases} X &= X \\ Z &= Y - X \end{cases}$$

e la sua inversa

$$\begin{cases} X &= X \\ Y &= X + Z \end{cases}$$

con

$$J_{g^{-1}}(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; det J_{g^{-1}}(x,z) = 1.$$

Allora, la densità di (X,Z) è :

$$f_{(X,Z)}(x,z) = f(x, x+z) \cdot 1 = e^{-(x+z)} \mathbf{1}_{\{0<x<x+z\}} = e^{-(x+z)} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y).$$

Si ricava immediatamente che X e Z sono indipendenti, entrambe esponenziali di parametro 1.

Esercizio 3 (i) Consideriamo le v.a. X_i $, i = 1, \ldots, 100$, tali che $X_i = 1$ se l'i-simo dischetto controllato è privo di difetti, $X_i = 0$ altrimenti. In generale un intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha$ per la percentuale incognita p di una distribuzione bernoulliana per un campione sufficientemente grande ha l'espressione:

$$I = \left[\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; \phi_{1-\alpha/2}, \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; \phi_{1-\alpha/2} \right]$$

dove n è la dimensione del campione, $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}}$ è il quantile di ordine $1 - \frac{\alpha}{2}$ della distribuzione normale standard, e $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$. Maggiorando σ con $1/2$, si ottiene:

$$I \subset \left[\overline{X}_n - \frac{1}{2\sqrt{n}} \; \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}_n + \frac{1}{2\sqrt{n}} \; \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Nel caso in esame $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = \phi_{0.95} = 1.65$. Pertanto si ottiene l'intervallo $\left[0.8 - \frac{1}{10} 1.65, 0.8 + \frac{1}{10} 1.65\right] = [0.8 - 0.165, 0.8 + 0.165] = [0.717, 0.882]$.

(ii) La variabile aleatoria $S_{100} = X_1 + ... + X_{100}$ conta il numero di dischetti buoni ed ha una densità binomiale di parametri $100, 0.6$. L'evento "su 100 dischetti ce ne sono non più di 33 difettosi" corrisponde pertanto all'evento $S_{100} > 67$ Indichiamo con Z una v.a. gaussiana standard.

$$P(S_{100} > 67) = P\left(\frac{S_{100} - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} > \frac{67 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right).$$

Posto $p = 0.6$ si ha quindi

$$P\left(\frac{S_{100} - 60}{\sqrt{24}} > \frac{67 - 60}{\sqrt{24}}\right) \approx P\left(Z > 1.43\right) = 1 - \Phi(1.43) = 1 - 0.9236 = 0.0764.$$

(iii) Si ha:

$$P\left(|\bar{X}_n - p| \leq 0.01\right) = P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}|\bar{X}_n - p| \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}0.01\right) =$$

$$= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}0.01 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}0.01\right).$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}0.01\right) - 1.$$

Siccome $\sigma^2 = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$, ovvero $\sigma = 0.4$, affinché l'ultima quantità ottenuta sia ≥ 0.99, deve aversi $\Phi\left(\sqrt{n}/40\right) \geq 0.995 \approx \Phi(2.58)$. Dunque deve essere $\sqrt{n}/40 \geq 2.58$, ovvero $n \geq 10651$.