Università di Roma *Tor Vergata*

Laurea Magistrale Ing. Informatica
Complementi di Probabilita' e Statistica
Esercizi su Catene di Markov

M. Abundo

1. Si consideri la CM su $E = \{1, 2, 3, 4\}$ con matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare la probabilità di restare nello stato 2 in due passi, e quella di andare dallo stato 3 allo stato 2 in due passi;
(ii) classificare gli stati della CM; quanto vale $p_{22}^{(12)}$?
(iii) rispondere alle domande (ii) e (ii) nel caso in cui p_{33} e p_{34} vengono sostituiti con $p_{33} = p_{34} = 1/4$.
2. E' data la CM su $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(i) Classificare gli stati della CM;
(ii) trovare le distribuzioni invarianti e la distribuzione stazionaria, se esiste;
(iii) qual è la probabilità, partendo dallo stato 1 di passare prima o poi in $\{4, 5\}$?
3. Si consideri la CM avente come spazio degli stati l'insieme dei verici di un triangolo equilatero. Si supponga che la probabilità di passare in un colpo da un vertice ad un altro adiacente in verso antiorario sia p, e in verso orario $1 - p$, con $0 < p < 1$.
(i) Mostrare che la catena è regolare e trovare la distribuzione stazionaria;
(ii) calcolare per n grande $P(X_n = 1, X_{n+1} = 2)$ e $P(X_n = 2, X_{n+1} = 1)$;
(iii) per quale valore di p la CM è reversibile?
4. Si consideri la CM su $E = \{1, 2, 3, 4\}$ con matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/5 & 0 & 1/3 & 7/15 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

(i) Classificarne gli stati;
(ii) vale il teorema ergodico?
(iii) trovare le probabilità invarianti e quelle stazionarie, se esistono.

5. Si svolgano gli stessi punti dell' esercizio 4 per una CM con

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/8 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Trovare inoltre le probabilità di assorbimento e i tempi medi di assorbimento nella classe chiusa $C = \{3, 4\}$, partendo dallo stato $i \in \{1, 2\}$.
6. Si consideri la CM su $E = \{1, 2, 3\}$ con matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

(i) Mostrare che per $\beta > 0$ la CM è irriducibile. Studiare anche il caso $\beta = 0$.
(ii) Quanto tempo occorre in media per giungere in 3 partendo da 1?
(iii) Se $\beta = 3/4$, mostrare che la CM è regolare e trovare la distribuzione stazionaria.
(iv) Rispondere al quesito (ii), nel caso che sia $\beta = 1/2$.
7. Si consideri la CM su $E = \{1, 2, 3, 4\}$ con matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1-\beta & 0 & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Per $\beta = 0$, classificare gli stati e mostrare che la CM mon è irriducibile.
(ii) Mostrare che, se $\beta > 0$, la CM è irriducibile. E' anche regolare?
(iii) Calcolare, al variare di β, la distribuzione (o le distribuzioni) invariante/i.
8. Si consideri la CM su $E = \{1, 2\}$ con matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

(i) Trovare, se esistono, le probabilità stazionarie π_1, π_2;
(ii) trovare k in modo che $|p_{12}^{(k)} - \pi_2| < 10^{-5}$;
(iii) calcolare $p_{21}^{(13)}$.
9. Si consideri la CM su $E = \{1, 2\}$ con matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

con $0 < a < 1$. Dire se P è bistocastica e calcolare, se esistono le probabilità stazionarie.
10. Si consideri la CM su $E = \{1, 2, 3\}$ con matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/9 & 2/3 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Dire se esitono probabilità invarianti e/o stazionarie e, eventualmente calcolarle.
(i) Esiste $\alpha = \lim_{n\to\infty} p_{13}^{(n)}$?
(ii) Trovare una stima per la velocità di convergenza a zero di $|p_{13}^{(n)} - \alpha|$, per $n \to \infty$.
11. Scrivere la matrice delle probabilità di transizione per una passeggiata aleatoria su $\{1, 2, 3, 4\}$ con barriere riflettenti. Trovare le probabilità invarianti e/o stazionarie.
12. Scrivere la matrice delle probabilità di transizione per una passeggiata aleatoria su $\{1, 2, 3, 4\}$ con barriere assorbenti. Esistono probabilità invarianti?
13. Trovare θ reale in modo che

$$P = \begin{pmatrix} \theta & \theta^2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

sia una matrice stocastica. Studiare la CM associata a P.
14. Discutere ergodicità e trovare le probabilità invarianti e stazionarie, per la CM la cui matrice delle probabilità di transizione è data da:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

15. Stessa cosa dell'esercizio precedente per

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16. Scrivere P^n, se

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

17. Classificare gli stati della CM che ha per matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Mostrare che la CM che ha per matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è periodica e calcolarne il periodo. Esistono le probabilità stazionarie? Vale il Teorema ergodico?

19. Mostrare che per la CM con matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

vale il teorema ergodico. Calcolare la distribuzione stazionaria.
20. Provare che una CM con due stati assorbenti non può essere ergodica.
21. Mostrare che la CM che ha per matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è periodica e calcolarne il periodo. Esistono le probabilità stazionarie? Vale il Teorema ergodico?
22. Si consideri la CM che ha per matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostrare che le probabilità invarianti sono $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$, ma non esiste il

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}.$$

Perché questo non costituisce una contraddizione?