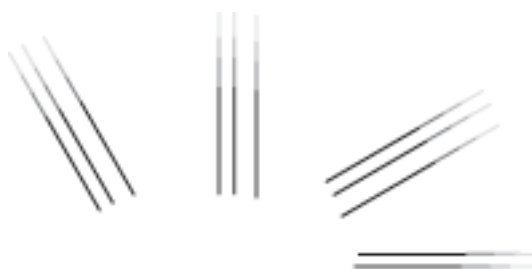


Lezione 8

Il piano proiettivo reale

L'analisi precedente ci indica quello che possiamo fare per estendere la proiezione anche alle rette eccezionali aggiungendo ai piani P e Q dei nuovi punti che chiameremo *punti all'infinito*.

- Per ogni fascio di rette parallele del piano P aggiungiamo un punto. Possiamo identificare questo punto con la *direzione* delle rette del fascio



- Definiamo la *retta all'infinito* del piano P l'insieme dei punti all'infinito che abbiamo aggiunto. Questa retta sarà indicata col simbolo ∞_P .

Il nuovo spazio ottenuto aggiungendo ai punti di P tutte le sue direzioni si chiama *piano proiettivo* (o in linguaggio più tecnico *piano affine reale completato*) e si indica col simbolo $\mathbb{P}(P)$. In simboli

$$\mathbb{P}(P) = P \cup \infty_P$$

Nello piano proiettivo abbiamo che

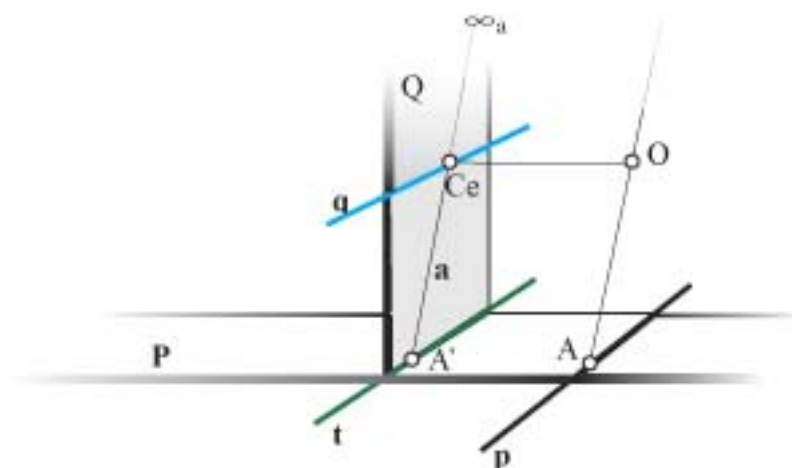
Due rette diverse hanno sempre un punto in comune al finito se non sono parallele all'infinito se sono parallele.

Come abbiamo visto nel caso della proiezione centrale di una retta su un'altra, l'introduzione dei punti all'infinito ci permette di definire una *trasformazione biunivoca* di

$$f : \mathbb{P}(P) \rightarrow \mathbb{P}(Q)$$

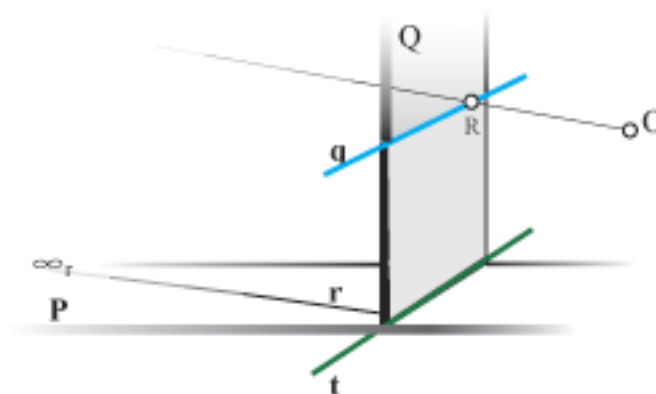
Sui punti di $P - p$ la trasformazione è la solita proiezione centrale da O ma ora siamo in grado di estendere l'applicazione anche ai punti di p ai quali si assoceranno i punti all'infinito del piano Q . Precisamente un punto A di p da luogo alla retta AO la quale definisce una retta a a lei parallela, la retta $A'C_e$. Definiamo allora

$$f(A) = \infty_a = \text{il punto all'infinito della retta } a$$



Non ci rimane altro che definire la trasformazione per i punti all'infinito di P . Se ∞_r è il punto all'infinito della retta r , definiamo

$$f(\infty_r) = R$$



essendo R il punto di q dove la retta per O parallela a r incontra Q . Non è difficile rendersi conto che tutto questo è coerente e che la trasformazione f così costruita è biunivoca e conserva l'allineamento.

Definizione di proiettività (o trasformazioni proiettive) tra piani proiettivi

Una proiettività tra due piani proiettivi $\mathbb{P}(P)$ e $\mathbb{P}(Q)$, non necessariamente distinti, è una trasformazione biunivoca f di $\mathbb{P}(P)$ in $\mathbb{P}(Q)$ che conserva l'allineamento.

Un ottimo esempio di proiettività è la proiezione centrale estesa ai punti all'infinito che abbiamo considerato precedentemente. Esistono tuttavia trasformazioni proiettive che non possono realizzarsi come una proiezione centrale. Il concetto di proiettività è più generale di quello di proiezione centrale.

La biunivocità della trasformazione implica che esiste la trasformazione inversa e che anche la trasformazione inversa conserva l'allineamento. Accenniamo alla dimostrazione di questo fatto.

Una ulteriore conseguenza della biunivocità della trasformazione è il fatto che la proiettività trasforma fasci di rette (parallele o convergenti) in fasci di rette non necessariamente dello stesso tipo.

Anche per le proiettività esiste un teorema fondamentale

Teorema fondamentale sulle proiettività

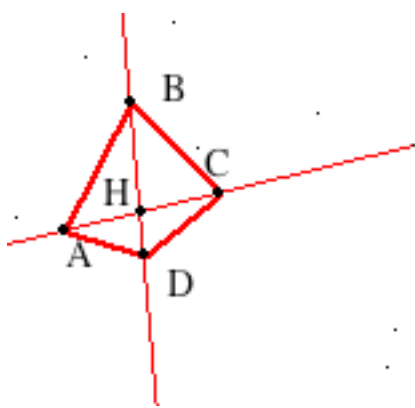
Dati due piani proiettivi $\mathbb{P}(P)$ e $\mathbb{P}(Q)$ e dati 4 punti A, B, C, D , a tre a tre non allineati di $\mathbb{P}(P)$ e altri 4 punti A', B', C', D' , a tre a tre non allineati di $\mathbb{P}(Q)$, esiste una e una sola proiettività

$$f : \mathbb{P}(P) \rightarrow \mathbb{P}(Q)$$

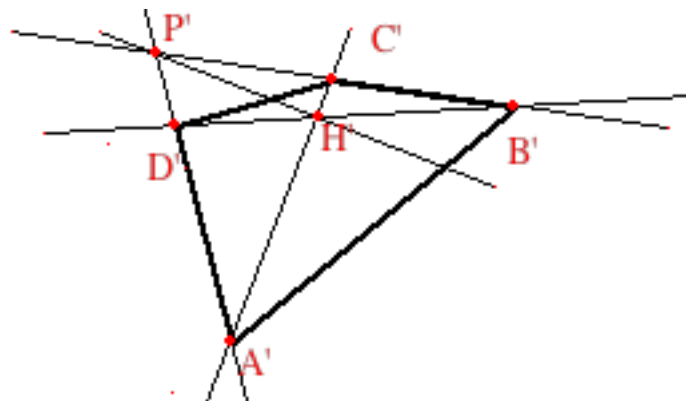
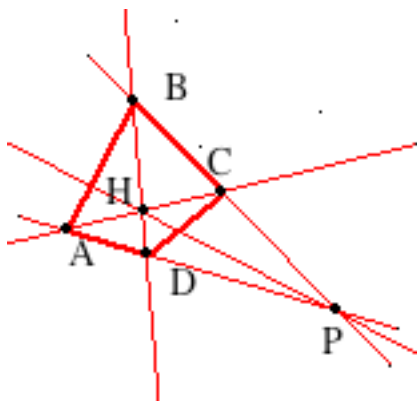
che trasforma A in A' , B in B' , C in C' e D in D' .

L'idea per dimostrare il teorema è quella di costruire una griglia di rette in $\mathbb{P}(P)$ a partire da A, B, C, D della quale sia univocamente determinata l'immagine in $\mathbb{P}(Q)$ e che sia sempre più fitta e che possa ricoprire tutto il piano proiettivo.

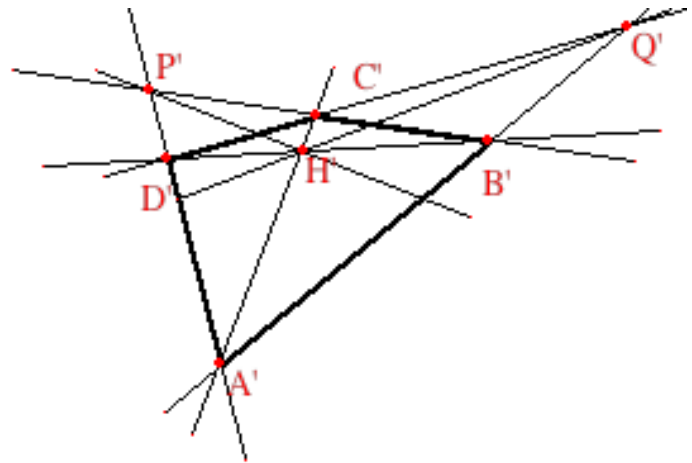
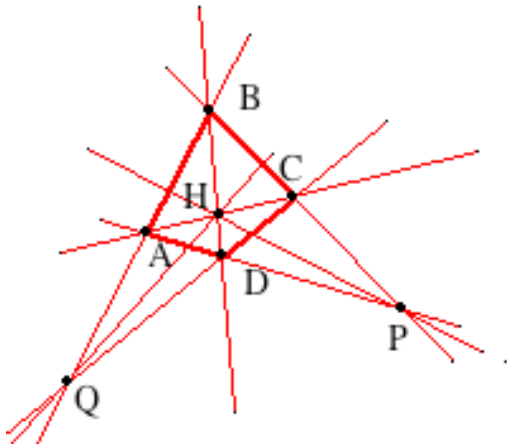
Nelle figure che seguono mostriamo in sequenza, i vari passi per infittire la griglia all'interno di un qualunque quadrangolo del quale sia nota l'immagine dei 4 vertici.



La retta AC si trasforma nella retta $A'C'$; la retta BD si trasforma nella retta $B'D'$ e quindi il loro punto di intersezione H si trasforma nel rispettivo punto di intersezione H' .

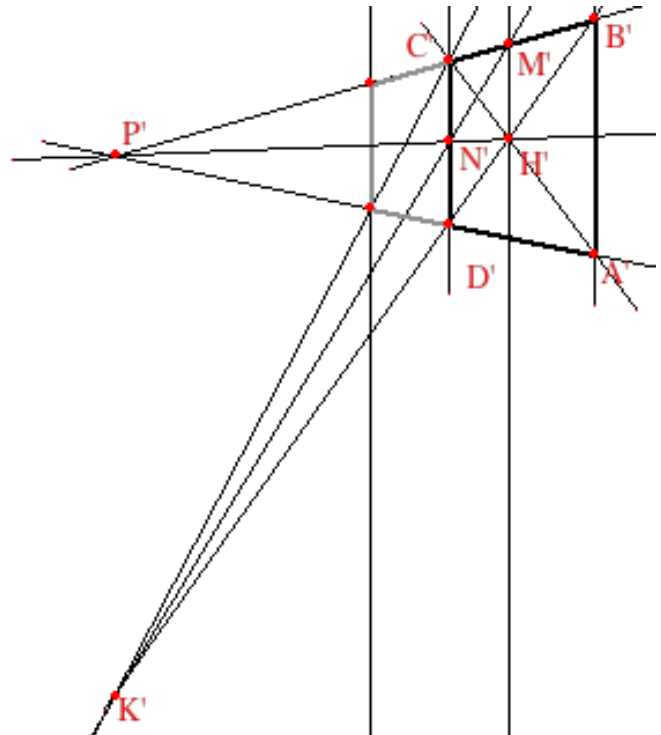
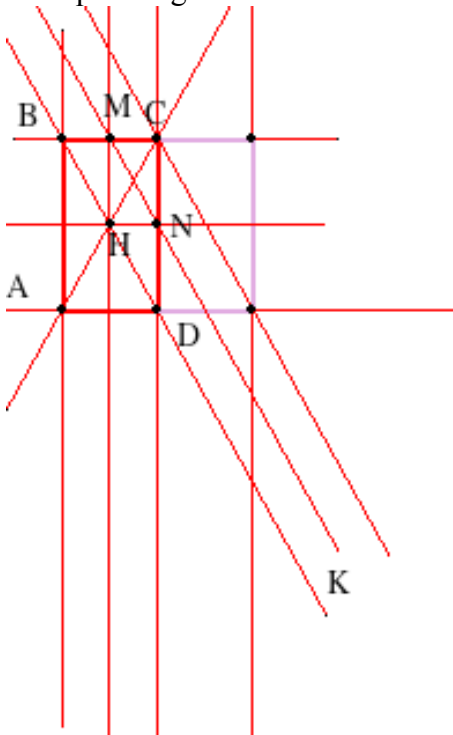


La retta AD si trasforma nella retta $A'D'$; la retta BC si trasforma nella retta $B'C'$ e quindi il loro punto di intersezione P si trasforma nel rispettivo punto di intersezione P' e la retta PH nella retta $P'H'$.



La retta AB si trasforma nella retta $A'B'$; la retta DC si trasforma nella retta $D'C'$ e quindi il loro punto di intersezione Q si trasforma nel rispettivo punto di intersezione Q' e la retta QH nella retta $Q'H'$. Abbiamo in questo modo diviso il quadrangolo in quattro quadrangoli per ognuno dei quali possiamo ripetere la costruzione infittendo la rete a piacere.

Vediamo ora con le sequenza seguente come possiamo aggiungere un quadrangolo adiacente a un data quadrangolo



Col procedimento precedente costruiamo i punti H, N, M e le loro immagini H' , M' , N' . Il punto K intersezione di BD e MN (all'infinito nella figura di sinistra) ha un corrispondente K' intersezione $B'D'$ e $M'N'$. Tracciamo poi CK e la corrispondente $C'K'$. Dove questa retta incontra la retta $A'P$ tracciamo la congiungente $D'C'$ e $A'B'$ (all'infinito nella figura) abbiamo così costruito il corrispondente del rettangolo adiacente ed uguale ad ABCD. Naturalmente la costruzione può essere iterata e sviluppata in tutti i quadrangoli adiacenti.

La **Tavola 22** chiede di ricostruire, usando il teorema fondamentale, l'immagine prospettici di un colonnato, formato da colonne uguali ed equidistanziate, sapendo l'immagine delle prime due (cioè di un rettangolo)

La **Tavola 23** rappresenta una fotografia aerea dell'isola del Giglio che risulta deformata con una proiezione essendo la posizione della lastra fotografica Q non parallela al piano P dell'isola. L'esercizio chiede di calcolare l'esatta posizione di un obiettivo a partire dalla sua immagine su Q .