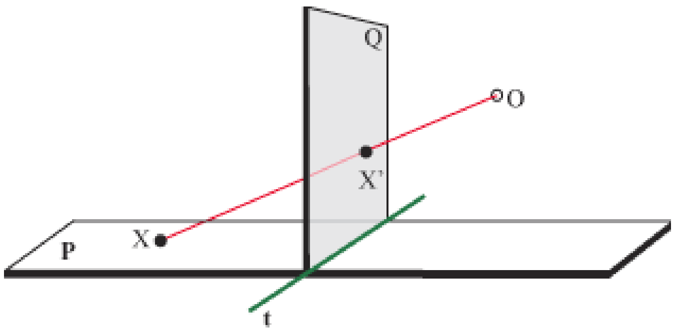
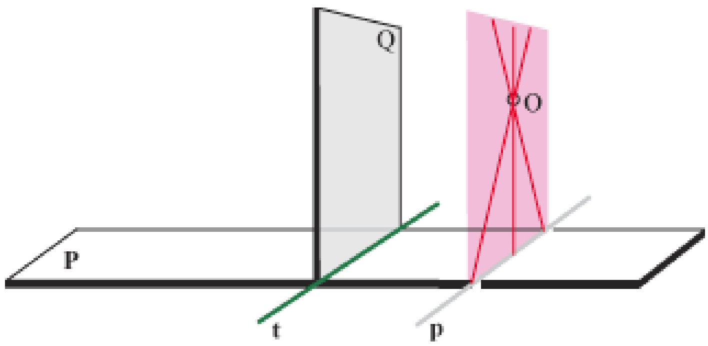
Lezione 7

Trasformazioni centrali di un piano su un altro

Consideriamo due piani P e Q che si intersecano in una retta t e un punto O esterno ai due piani. Possiamo proiettare da O i punti di P sui punti di Q: dato un punto X di P, esiste sempre la retta che congiunge O con X (perché O non appartiene a P), se questa retta OX interseca il piano Q abbiamo un corrispondente punto f(X), che indichiamo anche, per semplicità, con X', che è la proiezione di X da O su Q.



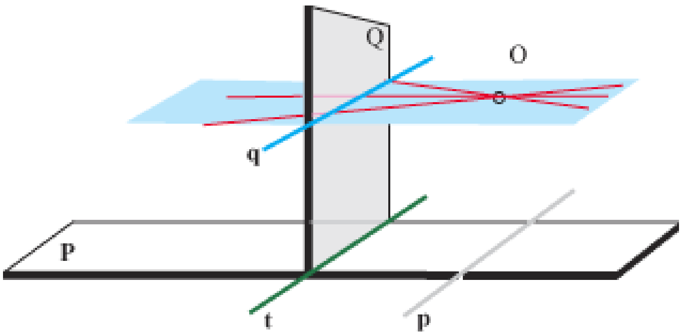
Per quali punti la retta OX non interseca il piano Q ? Non è difficile vedere che questi punti sono quelli per i quali la retta OX è parallela al piano Q e questi si trovano sulla intersezione col piano P del piano che contiene O e parallelo al piano Q.



Questa retta, che chiamiamo p, è la *retta eccezionale*. Possiamo pensarla come un "baratro": se il punto X si avvicina a questa retta la sua immagine precipita all'infinito verso il basso o verso l'alto. La proiezione definisce allora una applicazione f iniettiva

$$f : P - p \rightarrow Q$$

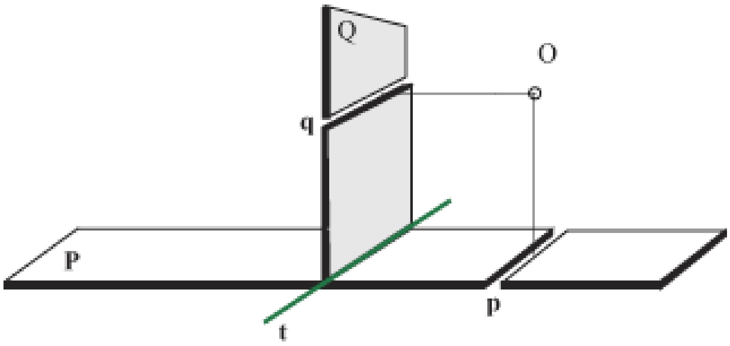
Come nel caso delle rette questa applicazione non è suriettiva, esiste infatti una *retta eccezionale* anche nel condominio Q: le rette passanti per O e parallele al piano P intersecano Q in punti che non stanno nell'immagine



Queste rette si trovano sul piano che contiene O parallelo al piano P. La retta eccezionale q è quindi l'intersezione di questo piano con il piano Q.
Questa analisi completa lo studio insiemistica della proiezione centrale su piani che si intersecano: si tratta di una applicazione biunivoca di $P-p$ in $Q-q$.

$$f : P-p \rightarrow Q-q.$$

Una immagine che evidenzia le rette eccezionali come spaccature nel dominio e nel condominio per le quali non è definita l'applicazione diretta o inversa è la seguente:

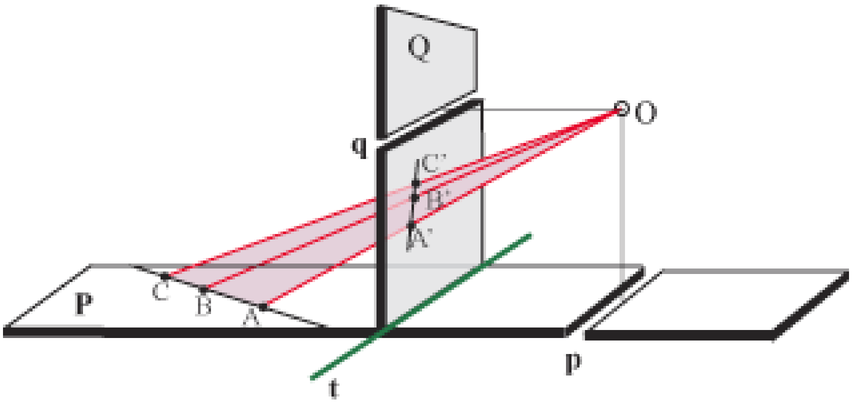


Vediamo ora le proprietà geometriche di questa proiezione. Per questo è didatticamente molto utile l'uso del prospettografo per sperimentare e congetturare nello spazio fisico tridimensionale.

La conservazione dell'allineamento
La proprietà più importante è la conservazione dell'allineamento:
Se tre punti A,B,C *di* $P-p$ *sono allineati allora anche le loro proiezioni* A', B', C' *sul piano* Q *sono allineate.*

Questo fatto viene visto sperimentalmente col prospettografo e poi dimostrato geometricamente.
Nella foto seguente una allieva sta proiettando i tre pedoni per verificarne l'allineamento sul vetro del prospettografo.

La dimostrazione di questa proprietà non è difficile ed è stata suggerita in questi termini da uno studente. I tre punti A, C ed O formano un triangolo perché O non è allineato con A e C (essendo fuori dal piano P). I punti A' e C' si trovano sui lati AO e CO del triangolo e sul piano Q. Dato che due piani si intersecano in una retta, il triangolo interseca il piano Q in un segmento il segmento A'C'.

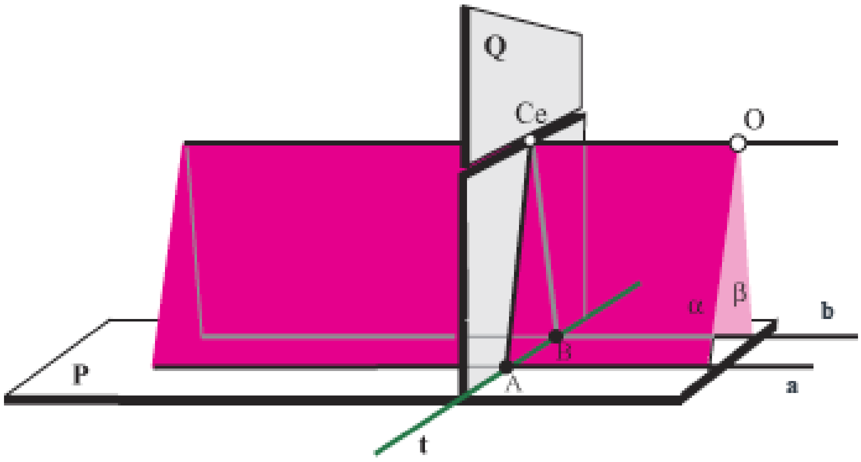


Dato che il punto B è allineato con A e C, si trova sul lato CA del triangolo perciò il raggio OB fa parte del triangolo e quindi interseca Q in un punto del segmento A'C'.
La dimostrazione naturalmente può semplificarsi osservando che i tre raggi OA,OB,OC sono su un piano (il piano α che contiene la retta ABC e O) il quale non è parallelo a Q (perché A, B, C non appartengono alla retta eccezionale p) e quindi lo interseca in una retta (due piani non paralleli si intersecano in una retta). Il punto A' si trova su questa retta perché si trova sul piano α e su Q. Analogamente gli altri due punti.

Convergenza delle rette parallele
Una seconda importante proprietà è la convergenza delle rette parallele:
Rette parallele, non parallele alla retta eccezionale p, si trasformano in rette convergenti in un punto che si trova sulla retta eccezionale q.

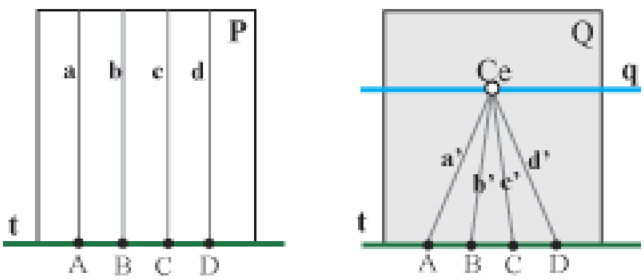
Questa proprietà deve essere preliminarmente sperimentata col prospettografo in casi particolari cercando anche di determinare esattamente il punto di convergenza delle immagini delle rette del parallele.
Procediamo considerando dei casi particolari e poi si cercherà una dimostrazione generale.

Anche se la cosa non è essenziale consideriamo il caso, considerato dai pittori rinascimentali, in cui i due piani siano perpendicolari tra loro. In questa situazione cerchiamo l'immagine delle rette perpendicolari al piano Q, rette che chiamiamo, seguendo la terminologia dei pittori, *rette di profondità*.



Siano a e b due rette di profondità. Consideriamo la retta per O perpendicolare al piano Q , essa esiste ed è unica. Sia Ce il punto in cui tale retta incontra il piano. Questo punto è chiamato da Alberti *punto centrico* e oggi *punto di fuga principale*. Dato che i raggi che proiettano un punto della retta a si trovano sul piano α che passa per a e O e dato che questo piano contiene la retta OCe parallela ad a, le proiezioni dei punti di a si troveranno sulla retta intersezione di α con Q cioè la retta ACe. Analogamente i raggi che proiettano i punti della retta b si trovano sul piano β che passa per b ed O. Anche questo piano contiene la retta OCe e dunque la retta b si proietta nella retta BCe. La figura che si genera è una "tenda" dove i due piani α e β sono le pareti, le due rette a e b la pianta e la retta OCe, parallela ad a e b, lo spigolo del tetto.

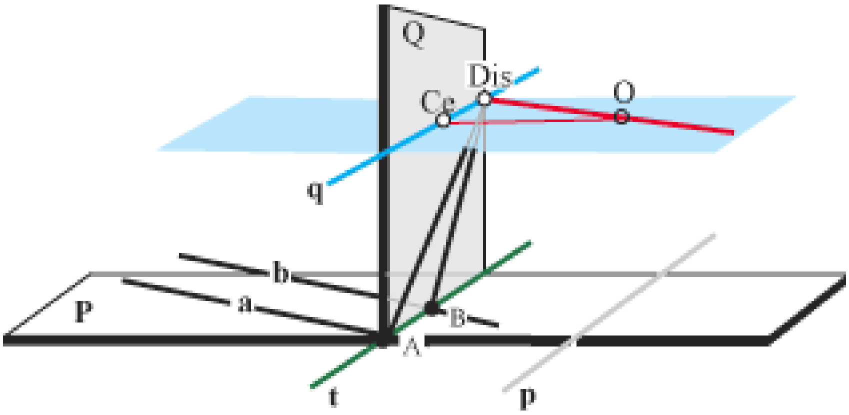
Disegniamo separatamente i due piani per vedere meglio la proiezione. Consideriamo le rette a, b, c , d del piano P perpendicolari a t e le loro proiezioni e a', b', c', d' del piano Q. Queste proiezioni sono convergenti nel punto di fuga principale. Notiamo che i punti A,B,C,D della retta t essendo comune ai due piani sono fissi.



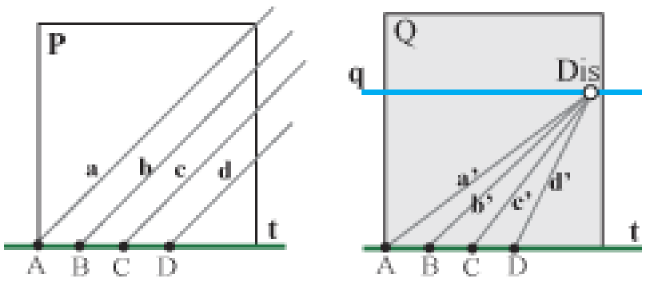
In definitiva *tutte le rette del piano* P *parallele alla retta* OCe *si proiettano in rette del piano* Q *che passano per* Ce.

Notiamo che il punto Ce, essendo sulla retta q, non appartiene all'immagine della proiezione. Se prendiamo un punto X della retta a e lo allontaniamo fino all'infinito, la sua proiezione tende a Ce. Il punto Ce corrisponde quindi all'immagine del punto all'infinito della retta a, ma lo stesso vale per la retta b, per la retta c e per la retta d: il punto all'infinito di queste rette si proietta nello stesso punto Ce. Siamo quindi portati a supporre che le rette a, b, c, d abbiamo *lo stesso punto all'infinito*.

Cosa succede per un fascio di rette parallele con un arbitraria direzione? Consideriamo la direzione inclinata di 45° rispetto alla retta t.



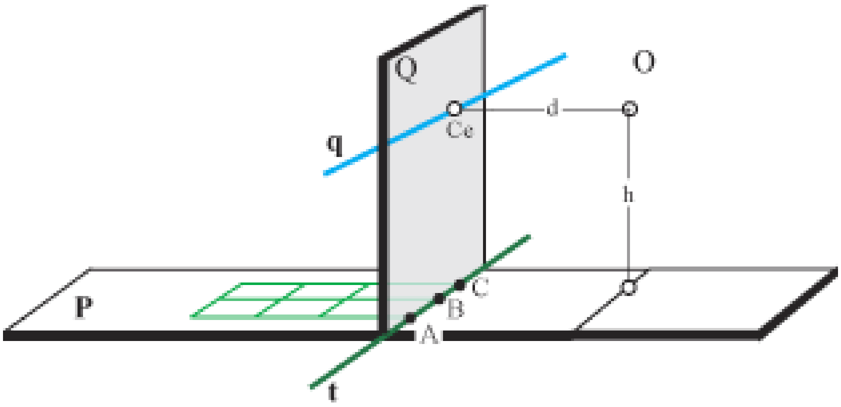
Consideriamo, come nel caso precedente, due rette a e b del piano P parallele e inclinate di 45° rispetto alla retta t. Esisterà ancora una e una sola retta per O e parallela a quelle. Tale retta sarà dunque parallela al piano P e intersecherà la retta q in un punto Dis che chiamiamo, secondo l'abitudine dei pittori, *punto di distanza*. Il piano α che passa per a e per O, nel quale si trovano i raggi che proiettano i punti di a su Q, contiene al retta ODis che è parallela ad a e quindi interseca q nella retta Adis. Perciò la retta a si proietta nella retta Adis. Analogamente b si proietta nella retta BDis. Il punto Dis si chiama punto di distanza perché la distanza tra i punti Ce e Dis è uguale alla distanza di O da Ce, cioè alla distanza dell'"occhio" dal "quadro" Q dato che il triangolo OCeDis è rettangolo in Ce ed, essendo ODis inclinata di 45° gradi rispetto a q, il triangolo è anche isoscele dunque OCe = CeDis.
Come prima disegniamo separatamente i due piani con le rette e le loro proiezioni



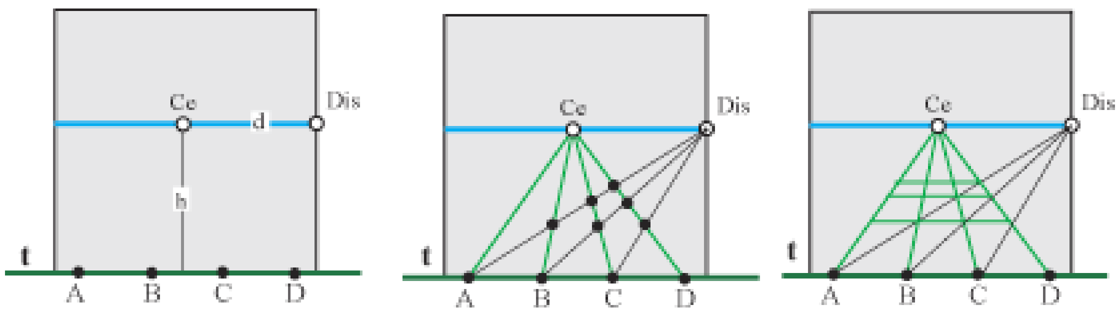
Come nel caso delle rette di profondità anche ora il punto Dis, non appartiene all'immagine della trasformazione dato che si trova sulla retta q. Il punto Dis corrisponde all'immagine del punto all'infinito della retta a, ma lo stesso vale per la retta b, per la retta c e per la retta d: il punto all'infinito di queste rette si proietta nello stesso punto Dis. Siamo quindi portati a supporre che le rette a, b, c, d abbiamo *lo stesso punto all'infinito*.
Le considerazioni precedenti si applicano nello stesso modo a un fascio qualunque di rette parallele che non hanno la direzione di p: i punti all'infinito di quelle rette si trasformano in uno stesso punto della retta q.

Lo scorcio prospettico di una griglia quadrata

La considerazione dei punti Ce e Dis ci aiuta a risolvere un problema di grande importanza in pittura. Disegnare lo scorcio prospettico di una griglia quadrata di un piano orizzontale P su un piano verticale Q visto da un occhio O posto a una altezza h dal piano orizzontale e a una distanza d da quello verticale. Anche in questo caso si comincerà usando il prospettografo.



Cominciamo a disegnare sul piano Q del quadro i punti A,B,C,D, ... sulla "retta di terra" t, il punto Ce ad una altezza h dalla retta t e da quel punto tracciamo la parallela q alla linea di terra (la linea dell'"orizzonte") sulla quale si proiettano i punti all'infinito del piano P. Disegniamo poi, a una distanza d da Ce, sulla linea dell'orizzonte, il punto Dis.

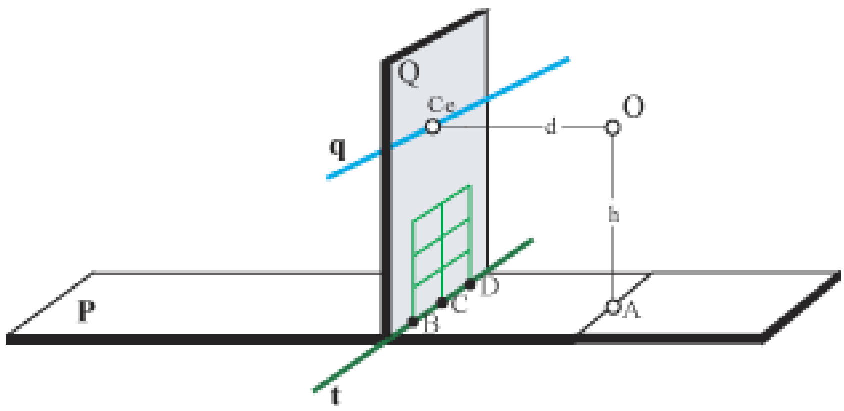


Le linee di profondità per A, B, C , D sono parallele e si proiettano in linee che convergono a Ce. Le diagonali passanti per A, B, C inclinate a 45° rispetto alla linea di terra sono parallele e si proiettano in rette convergenti in Dis. I punti in cui si incontrano le diagonali con le linee di profondità danno la posizione delle linee parallele alla linea di terra che si proiettano in linee parallele alla linea di terra.

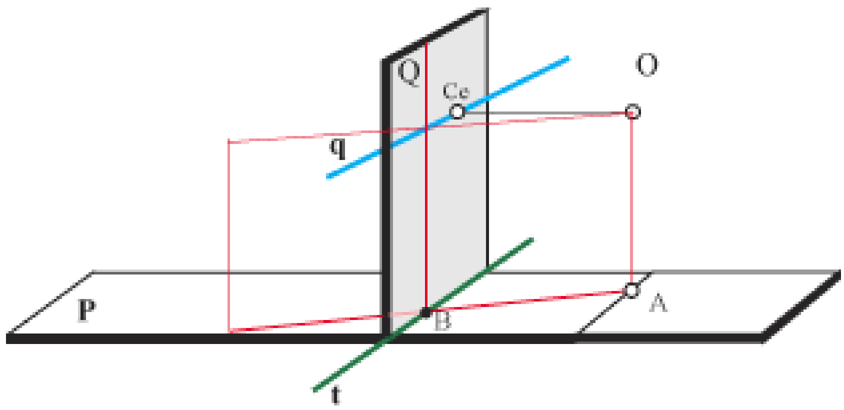
La **Tavola 20** chiede di realizzare lo scorcio prospettico di un pavimento preso da una decorazione di Ecsher..

La geometria delle anamorfosi

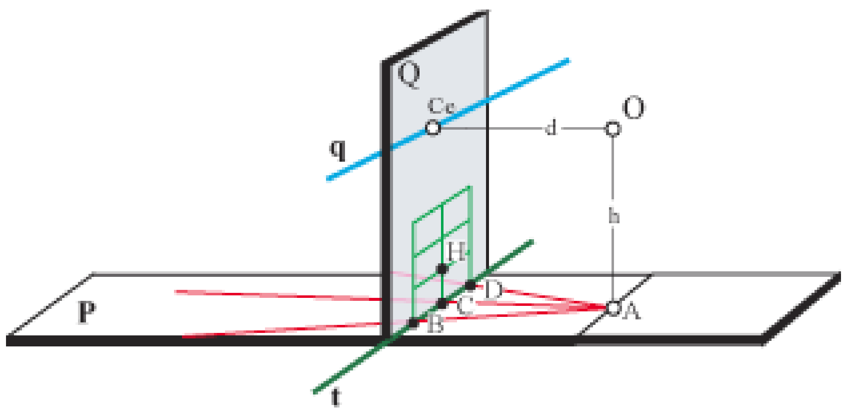
Vediamo ora come si realizza la trasformazione inversa. Supponiamo di avere una scacchiera quadrettata sul condominio Q cerchiamo la griglia del piano P che, da un determinato punto O, si proietta nella data scacchiera di Q. Questa costruzione è quella che realizza una *anamorfosi*: mettendo infatti l'occhio nel punto O e guardando la griglia deformata del piano P si vede su Q la scacchiera quadrettata. Una figura deformata disegnata su P sarà vista da O nelle sue giuste proporzioni.



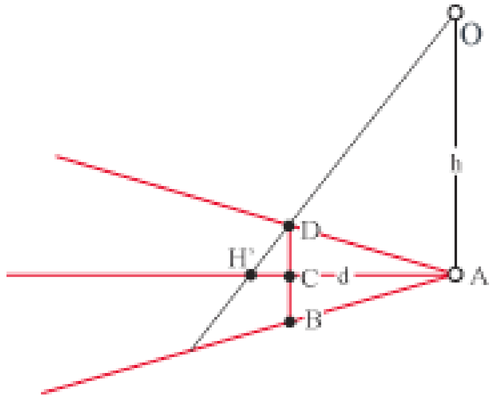
Osserviamo intanto, prima attraverso l'osservazione del prospettografo, che una qualunque retta del piano P che passa per il punto A, si proietta in una retta parallela a OA cioè, se A è la proiezione ortogonale di O su P, in una retta verticale.



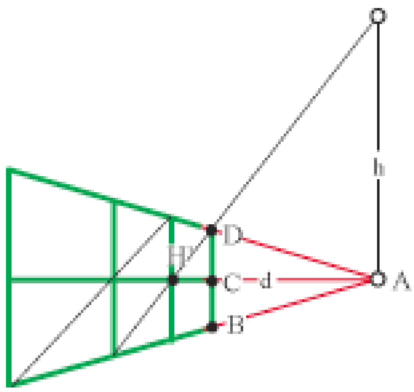
Le rette verticali del piano per B, C, D ... del piano Q sono l'immagine delle rette AB, AC, AD, ... del piano P



Vediamo ora di quale retta è immagine la prima riga orizzontale della scacchiera quadrettata: quella che passa per H. Per fare questo basta proiettare da O il punto H su AC



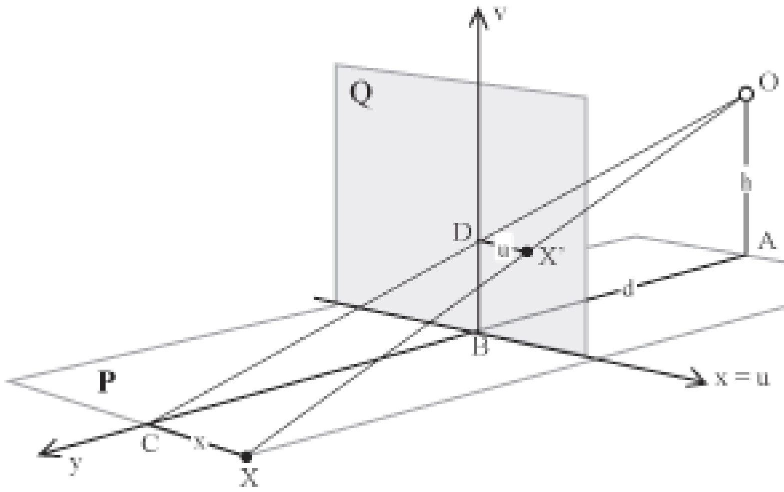
Dato che la scacchiera quadrettata è formata da quadrati, DC=CH e quindi possiamo proiettare CD al posto di CH e fare questa proiezione sullo stesso foglio. Basta riportare verticalmente l'altezza h sul punto A e congiungendo D con O si trova il punto H' che è coincide con la proiezione di H sulla retta AC. Dato che segmenti paralleli alla retta **t** si proiettano in segmenti paralleli possiamo completare il resto della griglia usando questo fatto e le diagonali.



La **Tavola 21** chiede di realizzare una anamorfosi su un disegno che raffigura Pinocchio.

Equazioni della proiezione centrale

Come abbiamo fatto nel caso delle proiezioni tra rette, non è difficile trovare l'espressione analitica di una proiezione centrale di un piano P in un piano Q. Per questo dobbiamo fissare dei sistemi di riferimento cartesiani sui due piani. Prendiamo per il piano P come asse delle x la retta t e come asse y la retta ortogonale a t per A. Sul piano Q prendiamo come asse u la retta t e come asse v la retta ortogonale a t per B.



Sia X=(x,y) un generico punto del piano P e sia X' la sua proiezione su Q. Riferendosi alla figura, il punto X'=(u,v) avrà le coordinate u=DX' e v=BD. Si tratta di calcolare queste grandezza in funzione di x = CX e y =BC. Poiché i triangoli OAC e DBC sono simili, abbiamo:
CB : BD = CA : AO cioè y : v = (y+d): h, da cui risulta v = (hy)/(y+d).
D'altra parte anche i triangoli CXO e DX'O sono simili e quindi
CX : DX' = CO : DO ma ancora dalla similitudine di OAC e DBC otteniamo CO: DO = CA : BA cioè , in definitiva x : u = y+d : d da cui risulta u = (dx)/(y+d).
In definitiva le equazioni della trasformazione sono

$$\begin{cases} u = \dfrac{dx}{y+d} \\ \\ v = \dfrac{hy}{y+d} \end{cases}$$

si tratta di equazioni lineari fratte le quali non sono definite quando y+d=0 cioè sulla retta p, come avevamo visto geometricamente. Le stesse considerazioni fatte nel caso delle rette si applicano nello stesso modo in questo caso. Possiamo vedere analiticamente come si trasformano i punti all'infinito di una retta del piano P . Consideriamo la retta

$$y = m\,x + q$$

un punto P di questa retta avrà le coordinate P=(t,mt+q) e quando t diventa sempre più grande il punto P tende all'infinito. Calcoliamo con le equazioni precedenti, l'immagine P' di P in Q. Il corrispondente punto P' avrà le coordinate

$$\begin{cases} u = \dfrac{dt}{(mt+q)+d} = \dfrac{d}{m+\dfrac{(q+d)}{t}} \\ \\ v = \dfrac{h(mt+q)}{(mt+q)+d} = \dfrac{hm+\dfrac{hq}{t}}{m+\dfrac{(q+d)}{t}} \end{cases}$$

abbiamo diviso numeratore e denominatore per t in modo che quando t cresce (t=10, t=100, t=1000, t=10000 ecc, ecc) le frazioni (hq)/t, (q+d)/t diventino sempre più piccole. Questo ci permette di valutare il limite a cui tendono le due frazioni. La u tende a d/m, mentre la v ad hm/m=h. Il punto P' dunque tenderà ad avvicinarsi, *indipendentemente dal valore di* q sempre più al punto di coordinate (d/m,h), punto che si trova sulla retta del piano $\mathcal{Q}$ di equazione v=h, retta che è proprio la retta q dell'orizzonte come avevamo visto col prospettografo e anche con dimostrazioni geometriche. Ciò mostra che le rette parallele (cioè con lo stesso coefficiente angolare m e con differenti q) si trasformano, se m non è zero, in rette convergenti al punto del piano $\mathcal{Q}$ di coordinate (d/m,h).
Le rette parallele alla linea di terra quelle cioè di equazione y=q (con coefficiente angolare m=0) i si trasformano nelle rette formate dai punti con l'ordinata costante v= (hq)/(q+d), punti cioè che si trovano su una retta del piano $\mathcal{Q}$ parallela alla linea di terra.