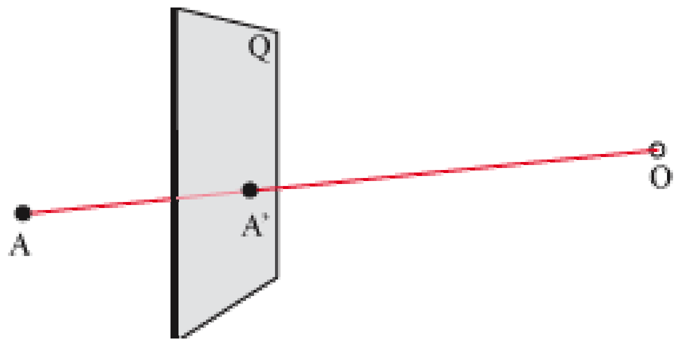
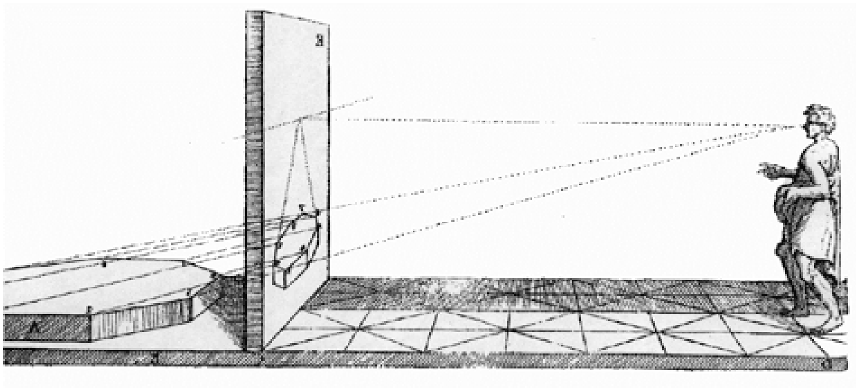
Lezione 6

Le proiezioni centrali di una retta in una retta

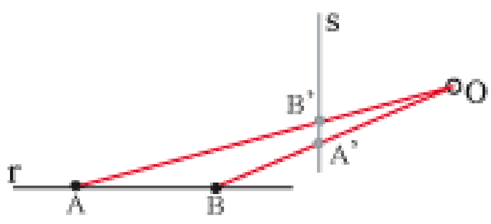
Lo studio delle proiezioni centrali è di grande importanza nella geometria della visione la quale ipotizza che la visione (monoculare) avvenga attraverso un fascio di *raggi visivi* che ha il centro nell'occhio, e che due punti che si trovano sullo stesso raggio visivo vengano visti come un solo punto. Se O è l'occhio e A un punto dello spazio, tutti i punti sul raggio OA sono visti come A e dunque. se proietto A su un piano Q intersecando il raggio visivo OA con Q , il punto A' che trovo viene visto da O come A così che la visione di A o di A' è identica.



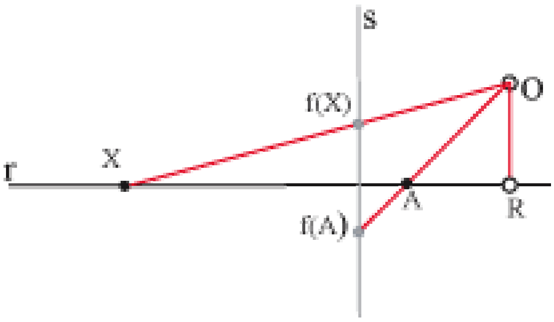
Se ora A descrive una figura ***F*** (un ottagono nell'esempio della figura), il proiettato A' descriverà una corrispondente figura ***F'*** su Q che è vista, da O, esattamente come ***F*** .



Prima di iniziare lo studio delle proiezioni centrali da un piano a un altro consideriamo il caso più semplice di proiezioni tra rette. Supponiamo che i punti di r si proiettino nei punti di s da un centro O. In questo caso dato che i raggi visivi si trovano tutti sul piano che passa per r ed O, anche la retta s si troverà su quel piano:



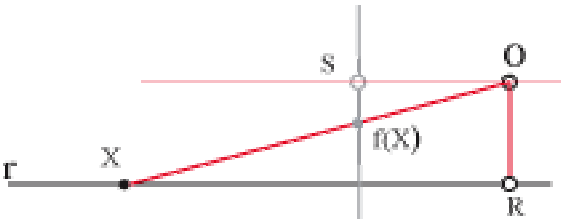
Studiamo questa proiezione da un punto di vista insiemistico. Si tratta di vedere se la proiezione definisce una applicazione di r in s e, nel caso, quali proprietà insiemistiche (iniettività, suriettività) ha questa applicazione. Affinché la proiezione sia una applicazione di r in s bisogna vedere se è possibile trovare, *per ogni* punto X di r un corrispondente punto f(X) di s . Facendo una analisi attenta si vede che esiste un *punto eccezionale* R di r per il quale il raggio visivo RO è parallelo alla retta s e quindi non la interseca. Per tutti gli altri punti invece il raggio OX interseca la retta s in un ben definito punto che chiamiamo f(X) o, per semplicità X', che è la proiezione da O di X su s.



Abbiamo dunque una trasformazione non di r in s ma di r -{R} in s.

$$f : r - \{R\} \rightarrow s.$$

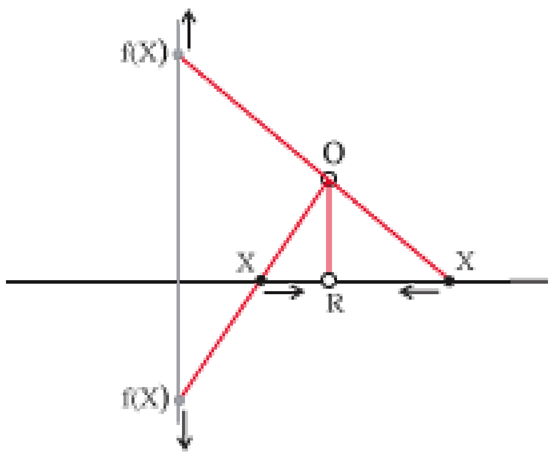
Si vede ora facilmente che *la trasformazione* così definita *è iniettiva* dato che se A è diverso da B i raggi OA e OB sono diversi (dato che O non appartiene alla retta r) e quindi intersecano (dato che sia A che B sono diversi da R) in punti f(A) e f(B) diversi tra loro.
La trasformazione è suriettiva?
Si vede con un po' di attenzione che la trasformazione *non è suriettiva*. infatti il punto S di s per il quale la retta OS è parallela alla retta r, è un *punto eccezionale* nel senso che è il solo punto che non è immagine di alcun punto di r .



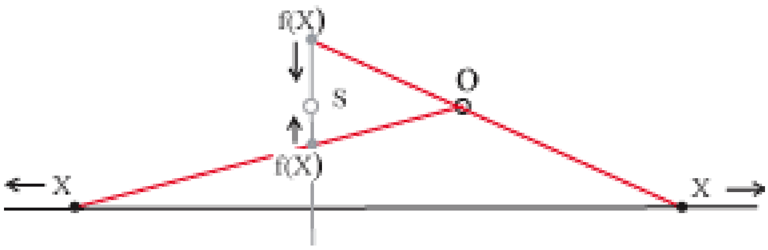
Questa analisi ci permette di concludere che la proiezione centrale di r in s definisce una corrispondenza biunivoca di

$$f : r - \{R\} \rightarrow s - \{S\}$$

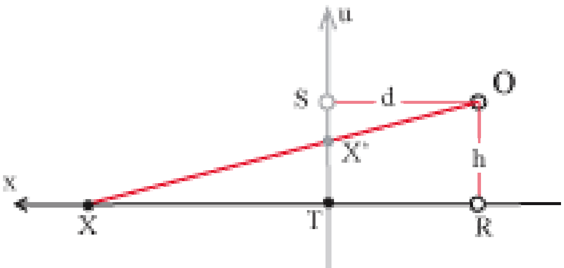
Con una immagine dinamica possiamo vedere facilmente cosa succede a f(X) quando il punto X si muove in un intorno del punto eccezionale R: se X si avvicina a R da sinistra f(X) si abbassa "infinitamente" sulla verticale mentre se X si avvicina a R da destra f(X) si alza "infinitamente"



Un fenomeno analogo accade quando X si allontana verso sinistra “infinitamente” su *r* o quando si allontana verso destra “infinitamente”: il punto f(X) si avvicina al punto eccezionale S dal basso (nel primo caso) e dall’alto nel secondo caso.



Questo fenomeno può essere ugualmente studiato e capito anche da un punto di vista analitico. Per fare questo occorre introdurre una ascissa sulla retta *r* e una ascissa sulla retta *s* e poi scrivere le equazioni della proiezione. Con riferimento alla figura dove sono indicati graficamente i dati del problema



abbiamo preso come origine per i due sistemi di riferimento il punto T di intersezione delle due rette e abbiamo orientato le rette come in figura. Se x è l’ascissa del punto X e se u è l’ascissa del punto X’, allora essendo i triangoli X’TX e ORX simili, abbiamo

$$\frac{u}{x} = \frac{h}{d+x}$$

dove h è l’altezza OR del punto O e d la distanza OS. Moltiplicando per x abbiamo l’equazione della proiezione:

$$u = \frac{hx}{d+x}$$

Da questa equazione si vede che quando x = -d, cioè quando il punto X coincide con R la frazione avendo il denominatore nullo non definisce nessun valore, ma la cosa più interessante è vedere cosa succede quando x diventa sempre più grande, ad esempio quando x=1, 2,3, ..., n, ... al crescere di n. Per vedere analiticamente questo andamento possiamo porre x=n e dividere la frazione, numeratore e denominatore per n, senza alterare il valore del corrispondente numero u.

$$u = \frac{\frac{hn}{n}}{\frac{d+n}{n}} = \frac{h}{\frac{d}{n}+1}$$

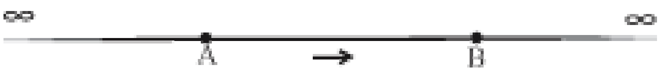
Quando il numero naturale n diventa sempre più grande la frazione d/n (d è fisso) diventa sempre più piccola (d/100, d/1000, d/10000 ecc). Al crescere di n dunque u si avvicina sempre più ad h "dal basso" perché è minore di h essendo uguale ad h diviso per una quantità lievemente maggiore di uno. Una analoga analisi vale quando x=-n. In questo caso al crescere di n u si avvicina sempre più ad h "dall'alto" perché è maggiore di h essendo uguale ad h diviso per una quantità lievemente più piccola di uno.

La retta proiettiva

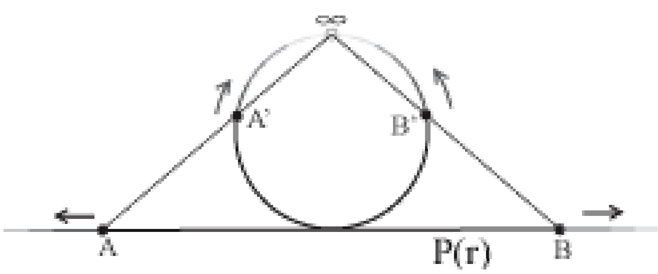
L'analisi algebrica si ferma a questo punto sviluppando una teoria dei limiti dove il valore infinito di x è solo un tendere potenziale un correre verso valori positivi o negativi sempre più grandi e il corrispondente valore u non assume mai il valore h ma un valore che gli si avvicina sempre più da un lato e dall'altro. In geometria invece si compie, come per primo Desargues (XVII secolo) ha suggerito, un passo molto ardito: si rende attuale l'infinito che prima era solo potenziale. L'idea è di aggiungere ai punti di una retta r un nuovo punto che chiamiamo *punto all'infinito* di r e che indichiamo con il simbolo ∞_r Otteniamo in questo modo un nuovo oggetto geometrico che chiamiamo *retta affine completata* o più semplicemente *retta proiettiva*. Il simbolo per denotare la retta ottenuta da r con l'aggiunta del suo punto all'infinito è $\mathbf{P}(r)$. Abbiamo come insieme di punti

$$\mathbf{P}(r) = r \cup \{\infty_r\}$$

Da un punto di vista grafico rappresentiamo la retta proiettiva sfumando gli estremi della retta per dare l'idea che essi si estendono fino all'infinito e li, nel bianco, si identificano. Fissato un verso di percorrenza sulla retta r possiamo inserire in questo ordinamento, in modo naturale anche il punto all'infinito:



se l'orientamento è da sinistra a destra e se A è precedente a B, come in figura, allora il punto all'infinito sarà successivo a tutti i punti successivi a B e precedente a tutti i punti precedenti ad A La topologia della retta proiettiva è descritta omeomorficamente dalla proiezione stereografica



Man mano che A si allontano verso sinistra il corrispondente A’ sulla circonferenza tende al polo Nord e lo stesso se B si allontana a destra. Questa proiezione stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti della circonferenza e i punti della retta proiettiva **P**(r): il punto all’infinito della retta corrisponde al polo Nord dal quale si proietta.
Nella retta proiettiva il concetto di distanza tra due punti si perde: punti che si allontanano tra loro finiscono per incontrasi all’infinito. Resta tuttavia un ordine che ci permette di parlare di segmenti proiettivi cioè, fissato un verso e due punti A e B (non necessariamente al finito) il segmento AB è dato da tutti i punti X che seguono A e precedono B.

Segmenti proiettivi
Possiamo ora vedere come sono fatti i segmenti proiettivi della retta **P**(r) a seconda di come sia posizionato il punto all’infinito. Ci sono essenzialmente tre casi (abbiamo orientato la retta da sinistra a destra)

- Il segmento AB non contiene il punto all’infinito ∞_r

- Il segmento AB ha un estremo all’infinito: B= ∞_r

- Il segmento AB ha un punto interno all’infinito: A , ∞_r , B

Un importante vantaggio che deriva dalla considerazione della retta proiettiva è che ora la proiezione centrale diventa un *trasformazione biunivoca* di **P**(r) in **P**(s): basterà far corrispondere a R il punto all’infinito della retta s e al punto all’infinito della retta r il punto S. La nuova trasformazione, che chiamiamo sempre f, agisce come la proiezione centrale sui punti di $r-\{R\}$ ma, in più abbiamo

$$f(R)= \infty_s \quad e \quad f(\infty_r) = S$$

In questo modo la proiezione centrale diventa una trasformazione biunivoca

$$f : \mathbf{P}(r) \rightarrow \mathbf{P}(s).$$

Lo studio geometrico delle proprietà invarianti che hanno le figure di r (sottoinsiemi discreti di punti) riesce più facilmente aumentando di uno la dimensione: immergendo cioè le due rette r ed s in due piani P e Q e considerando la geometria delle proiezioni centrali di P in Q . Questo studio può essere iniziato, in via sperimentale, attraverso l’uso di un prospettografo.

Il prospettografo
La lezione prosegue facendo le prime esperienze pratiche col prospettografo. Il prospettografo è uno strumento di uso rinascimentale che aiuta a studiare la geometria della proiezione centrale. Consiste di un vetro e di un mirino: viene messo l’occhio nel mirino e si traguarda un punto posto

oltre il vetro, si segna poi sul vetro la sua immagine. La figura seguente è presa da un disegno di Durer

Il vetro è dotato di una griglia che permette al pittore di riportare il punto traguardato su un foglio di carta.
Disponendo una tovaglia quadrettata sui banchi possiamo simulare un piano cartesiano e proiettare sul vetro vari punti del piano orizzontale per studiare gli effetto geometrici di queste trasformazione.

Si comincia con lo studiare il modo in cui si trasformano punti allineati, rette parallele chiamando i ragazzi uno a uno a sperimentare di persona lo strumento.

Nella lezione successiva si svilupperà la teoria geometrica in stretta connessione con l’esperienza diretta.