Lezione 5

Proprietà geometriche delle trasformazioni lineari

Dati i piani cartesiani P, Q il primo di coordinate x,y e il secondo di coordinate u,v, una applicazione o trasformazione del piano P nel piano Q può essere definita analiticamente dando due funzioni h(x,y) e g(x,y) che permettano di calcolare, *per ogni coppia* ordinata di numeri reali x,y due nuovi numeri h(x,y) e k(x,y) da loro dipendenti. La trasformazione scrive:

$$\begin{cases} u = h(x,y) \\ v = k(x,y) \end{cases}$$

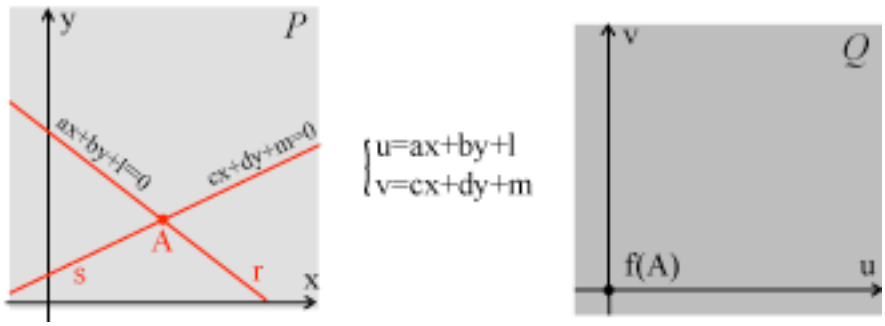
le proprietà algebriche delle funzioni h e k si traducono in proprietà geometriche della trasformazione e l'indagine che vogliamo fare consiste proprio nella scoperta di questi legami.

Il caso più semplice ma molto significativo è il caso in cui le due funzioni h e k sono di primo grado sia in x che in y. La trasformazione è dunque definita, in questo caso, dalle due semplici espressioni

$$\begin{cases} u = ax + by + l \\ v = cx + dy + m \end{cases}$$

Date le due equazioni cioè i 6 numeri a,b,c,d,l,m, la trasformazione trasforma un punto generico X=(x,y) del piano P nel punto f(X)=(ax+by+l,cx+dy+m) del piano Q.

E'importante considerare due rette del piano P: la retta r di equazione ax+by+l=0 e la retta s di equazione cx+dy+m=0. Queste due rette e la loro posizione reciproca sono responsabili della struttura insiemistica della trasformazione.



Teorema

La trasformazione è biunivoca se e solo se le rette r *ed* s *non sono parallele*.

La struttura logica di questa dimostrazione è molto utile didatticamente perché abitua ad un uso corretto della negazione logica.

Supponiamo che le rette siano non parallele. Dobbiamo dimostrare che in questa ipotesi la trasformazione è biunivoca cioè che è iniettiva e suriettiva. Se, per assurdo fosse non iniettiva esisterebbero due punti diversi $A=(a_1,a_2)$ e $B=(b_1,b_2)$ tali che f(A)=f(B). Calcolando f(A) e f(B) e uguagliando le ascisse e le ordinate dei due punti, troviamo

$$aa_1+ba_2+l = ab_1+bb_2+l$$
$$ca_1+da_2+m = cb_1+db_2+m$$

e quindi, posto $k=aa_1+ba_2+l$ e $h = ca_1+da_2+m$ la retta $ax+by+l = k$ e la retta $cx+dy+m=h$ avrebbero in comune due punti distinti, A e B. In questo caso le due rette sarebbero uguali (per due punti passa una e una sola retta). Ma r è parallela alla retta $ax+by = k-l$ e s è parallela alla retta $cx+dy=h-m$ e queste due rette essendo parallele a una stessa retta sarebbero parallele tra loro cosa che contraddice l'ipotesi.
Dimostriamo ora che, se per ipotesi, le rette r ed s non sono parallele allora la trasformazione è suriettiva. Sia $Q=(q_1,q_2)$ un qualunque punto del condominio Q. Dobbiamo dimostrare che, nelle nostre ipotesi esiste un punto A del dominio P tale che f(A)=Q. Consideriamo le due rette $ax+by+l =q_1$ e la retta $cx+dy+m=q_2$ queste due rette sono parallele rispettivamente a r e a s e quindi non sono parallele tra loro perché r ed s non sono parallele tra loro. Esse si incontrano dunque in un punto A e, come si vede immediatamente f(A)=Q.
Dobbiamo ora dimostrare che se la trasformazione è biunivoca le rette non sono parallele. Supponiamo per assurdo che le rette siano parallele. Ricordiamo che due rette sono parallele se sono uguali o se, in caso contrario, non hanno punti comuni. Supponiamo dunque per assurdo che le rette siano parallele e diverse, in questo caso non esisterebbe nessun punto A del dominio tale che f(A)=(0,0) infatti tale punto A sarebbe un punto comune alle rette r ed s. Ciò vorrebbe dire, contro l'ipotesi, che l'applicazione f non è suriettiva. E' anche impossibile che le due rette siano uguali perché in questo caso le due equazioni sarebbero proporzionali

$$(ax+by+l) = k(cx+dy+m)$$

e , per ogni punto A del dominio, f(A) sarebbe un punto della retta del codominio di equazione

$$u=kv$$

e questo contraddirebbe ancora la suriettività di f.

Osserviamo che la condizione che le due rette r ed s siano parallele si può esprimere analiticamente traverso il seguente facile criterio numerico

Criterio di parallelismo
La retta r *di equazione* $ax+by+l=0$ *è parallela alla retta* s *di equazione* $cx+dy+m=0$ *se e solo se*

$$ad - bc = 0.$$

La dimostrazione del criterio è semplice. Supponiamo per ipotesi che le due rette siano parallele: se sono verticali b=0 e d=0 e quindi $a.0 - 0.c = 0$ se non solo verticali allora i loro coefficienti angolari $-a/b$ e $–c/d$ devono essere uguali e quindi $ad-bc = 0$.
Viceversa se per ipotesi $ad-bc = 0$ dobbiamo dimostrare che allora le rette sono parallele. Se una delle due rette, ad esempio la prima è verticale allora b=0 e $a \neq 0$. L'ipotesi allora implica d=0 e quindi anche la seconda retta è verticale. Dato che il ragionamento si può applicalre anche alla seconda retta abbiamo che le due rette sono o entrambi verticali o entrambi non verticali. In questo secondo caso abbiamo $b \neq 0$ e $d \neq 0$ e quini possimao dividere la relazione per bd e troviamo $a/b=c/d$ e quindi le due rette avendo lo stesso coefficiente angolare sono parallele.

Una proprietà fondamentale delle trasformazioni definite da equazioni di primo grado (dalla quale proprietà prendono anche il nome di trasformazioni lineari) è espresso dal seguente.

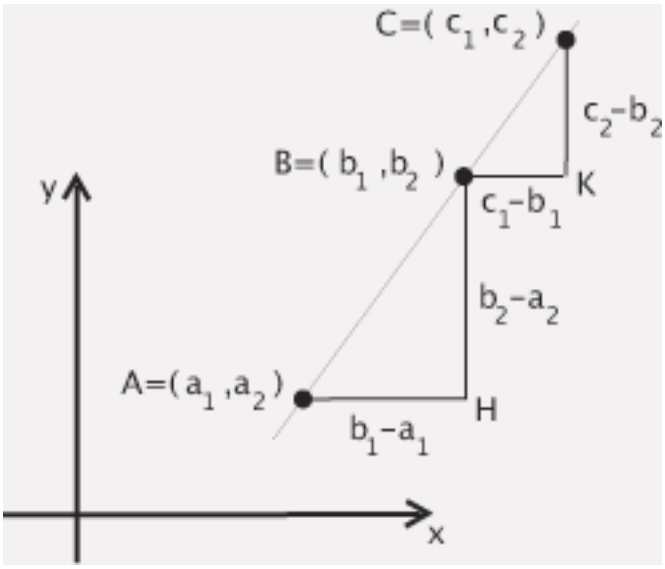
Teorema

Una trasformazione del piano P nel piano Q definita da equazioni di primo grado conserva l'allineamento.

Bisogna dimostrare che se tre punti A,B,C del dominio P sono allineati allora i tre punti del codominio f(A), f(B),f(C) sono pure allineati. La dimostrazione non può farsi per punti particolari ma per punti generici, per questo dobbiamo dare ai punti coordinate generiche. Siano

$$A=(a_1,a_2) \quad , \quad B=(b_1,b_2) \quad , \quad C=(c_1,c_2)$$

le coordinate dei tre punti del dominio. Essi sono allineati se e solo se i triangoli rettangoli BHA e CKB sono simili



cioè se esolo se i rapporti tra i cateti sono uguali

$$\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}$$

Sia k questo rapporto.

Calcoliamo ora f(A), f(B), f(C):

$$f(A)= (aa_1+ba_2 +l,\ ca_1+da_2 +m) = (a_1', a_2')$$
$$f(B)= (ab_1+bb_2 +l,\ cb_1+db_2 +m) = (b_1', b_2')$$
$$f(C)= (ac_1+bc_2 +l,\ cc_1+dc_2 +m) = (c_1', c_2')$$

e questi tre punti del codominio sono allineati se e solo se

$$\frac{b'_2 - a'_2}{b'_1 - a'_1} = \frac{c'_2 - b'_2}{c'_1 - b'_1}$$

Abbiamo

$$\frac{b'_2 - a'_2}{b'_1 - a'_1} = \frac{(cb_1 + db_2 + m) - (ca_1 + da_2 + m)}{(ab_1 + bb_2 + l) - (aa_1 + ba_2 + l)} = \frac{c(b_1 - a_1) + d(b_2 - a_2)}{a(b_1 - a_1) + b(b_2 - a_2)}$$

dividendo numeratore e denominatore per (b_1-a_1) otteniamo

$$\frac{b'_2-a'_2}{b'_1-a'_1}=\frac{c+d\dfrac{(b_2-a_2)}{(b_1-a_1)}}{a+b\dfrac{(b_2-a_2)}{(b_1-a_1)}}=\frac{c+dk}{a+bk}$$

Analogamente

$$\frac{c'_2-b'_2}{c'_1-b'_1}=\frac{(cc_1+dc_2+m)-(cb_1+db_2+m)}{(ac_1+bc_2+l)-(ab_1+bb_2+l)}=\frac{c(c_1-b_1)+d(c_2-b_2)}{a(c_1-b_1)+b(c_2-b_2)}$$

e dividendo numeratore e denominatore per (c_1-b_1) otteniamo

$$\frac{c'_2-b'_2}{c'_1-b'_1}=\frac{c+d\dfrac{(c_2-b_2)}{(c_1-b_1)}}{a+b\dfrac{(c_2-b_2)}{(c_1-b_1)}}=\frac{c+dk}{a+bk}$$

col che si vede che i due rapporti sono uguali e quindi i tre punti f(A), f(B), f(C) sono allineati.

Le considerazioni precedenti ci permettono di affermare che *una trasformazione di un piano cartesiano P in un piano cartesiano Q definita dalle equazioni*

$$\begin{cases} u=ax+by+l \\ v=cx+dy+m \end{cases}$$

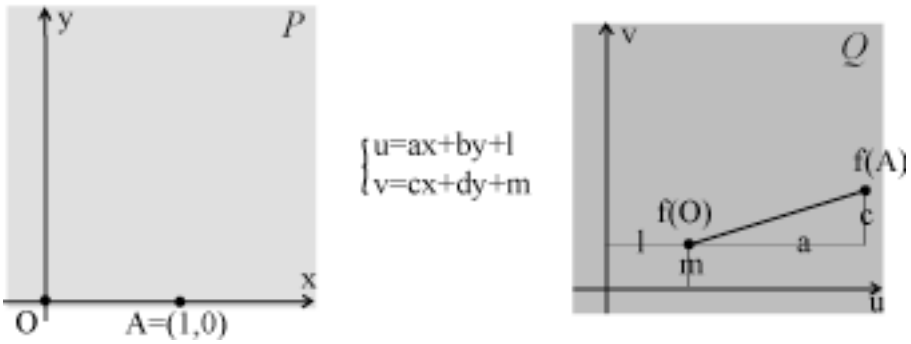
è una affinità se e solo se $ad-bc\neq 0$

Equazioni di una affinità

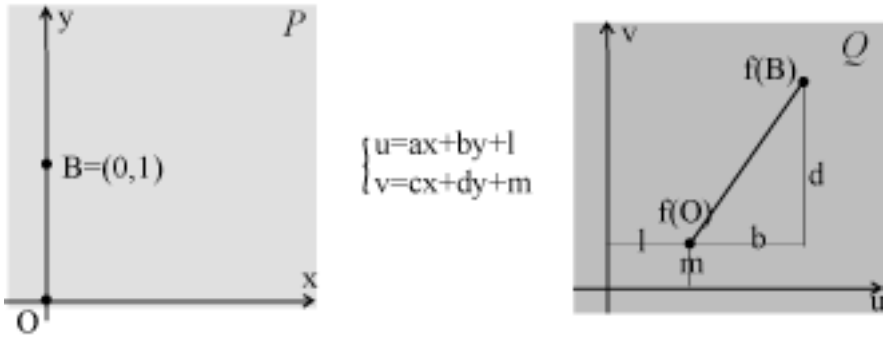
Prima di studiare il problema inverso, cioè prima di vedere quali sono le possibili equazioni di una affinità, vediamo di capire graficamente il significato dei 6 numeri a,b,c,d,l,m che definiscono la trasformazione.

Il significato grafico dei coefficienti delle equazioni dell'affinità si evidenzia con le immagini seguenti che dovrebbe essere ben memorizzate.

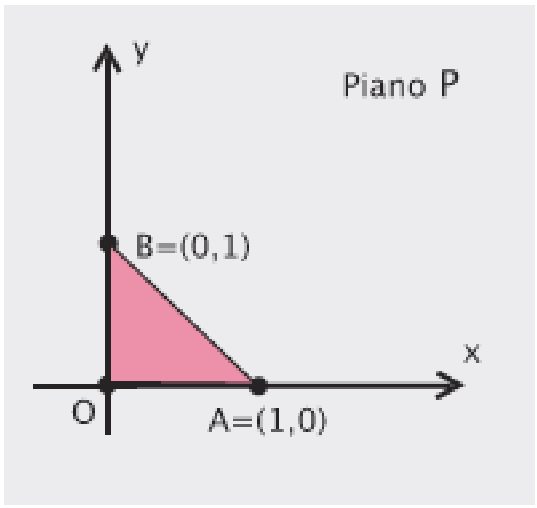
Ponendo nell'equazioni dell'affinità x=0 e y=0 troviamo il punto del codominio u=l,v=m. Ciò significa che se O è l'origine del riferimeto nel piano P il punto (l,m) del codomilio è l'immagine di O: f(O)=O'=(l,m)

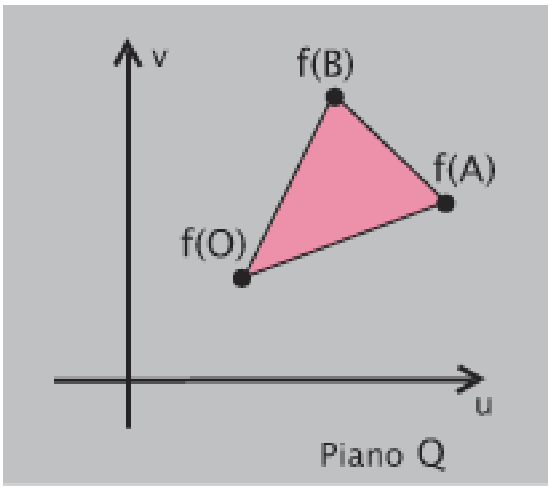


Ponendo nell'equazioni dell'affinità x=1 e y=0 troviamo che il punto del codominio u=a+l,v=c+m è il trasformato del punto A=(1,0).

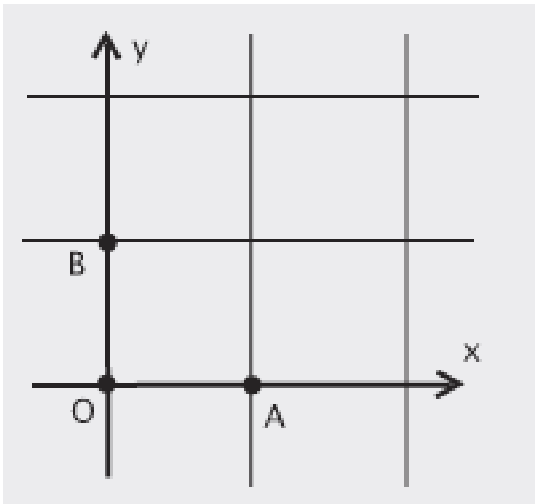


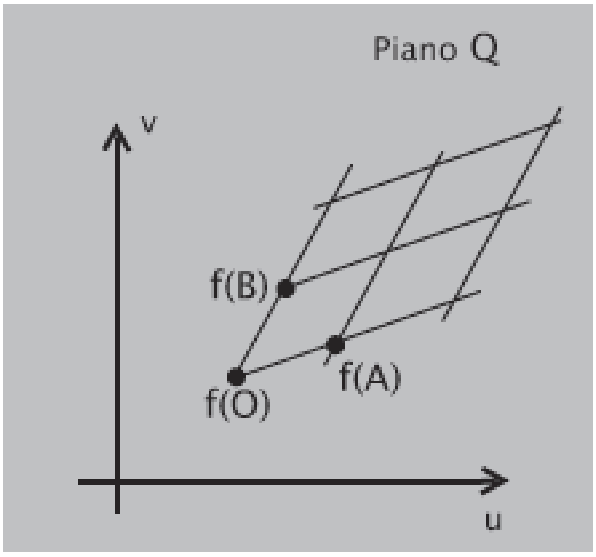
Ponendo nell'equazioni dell'affinità x=0 e y=1 troviamo che il punto del codominio u=b+l,v=d+m è il trasformato del punto B=(0,1)
Mettendo insieme le informazioni abbiamo





Risulta anche chiaro come si trasforma la griglia a coordinate intere del piano P nella *corrispondente* griglia del piano Q.





Questo permette, noti a,b,c,d,l,m, di calcolare l'immagine di un dato punto X=(x,y) del dominio in due modi: quello analitico calcolando le due espressioni u=ax+by+l e v=cx+dy+m, quello geometrico usando la le due griglie.

Possiamo ora dimostrare un teorema di grande importanza che stabilisce una significativa equivalenza tra le affinità e le equazioni di primo grado.

Teorema
Sia f *una trasformazione affine tra il piano* P *e il piano* Q*. Comunque si prenda un sistema di coordinate cartesiane* (x,y) *sul piano* P *e un sistema di coordinate cartesiane* (u,v) *sul piano* Q *le equazioni della trasformazione sono date da equazioni di primo grado.*
Dimostrazione.
Per dimostare il teorema vediamo come si possono trovare le equazioni di una affinità.
Fissiamo arbitrariamente le coordinate sui due piani e consideriamo i tre punti non allineati del dominio di coordinate O=(0,0), A=(1,0), B=(0,1). Siano f(O), f(A), f(B) le loro immagini nel codominio. Dato che abbiamo introdotto delle coordinate nel codominio questi tre punti definiscono 6 numeri:

$$f(O)=(l,m)\ ,\ f(A)=(p,q)\ ,\ f(B)=(s,t).$$

Poniamo ora

$$p=a+l,\ q=c+m,\ s=b+l,t=d+m$$

Per quanto abbiamo visto prima l'affinità g di equazioni

$$\begin{cases} u = ax+by+l \\ v = cx+dy+m \end{cases}$$

Per quello che abbiamo visto prima l'affinità g trasforma O,A,B nel modo seguente

$$g(O)=(l,m)\ ,\ g(A)=(l+a,m+c)\ ,\ g(B)=(l+b,m+d)$$

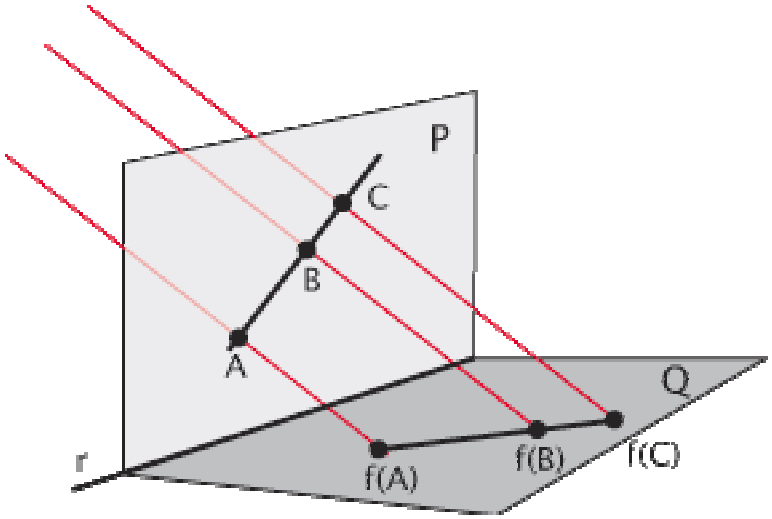
risulta dunque

$$f(O)=g(O)\ ,\ f(A)=g(A)\ ,\ f(B)=g(B)$$

Per il teorema fondamentale esiste *una sola* traformazione affine che manda tre punti non allineati in tre punti non allineati. f è dunque uguale a g e quindi, come g, è definita da equazioni di primo grado.

La **Tavola 18** analizza il passaggio da un font normale alla sua versione in corsivo. Tale trasformazione è una affinità. Nell'esercizio si chiede di trovare le equazioni dell'affinità per il font Courier. Può essere interessante far verificare ai ragazzi se la stessa affinità regola tutti i font.
La **Tavola 19** propone lo studio delle affinità che generano la foglia di Felce. Nella introduzione sul sito si può trovare una animazione che illustra questo procedimento per generare una forma complessa.

Facciamo ora un esempio significativo di affinità: quella che si realizza attraverso le ombre solari. Consideriamo nelle spazio euclideo due piani P e Q che si intersecano in una retta r. Consideriamo la proiezione di P in Q ottenuta mediante raggi paralleli.



E' evidente che la proiezione con raggi paralleli è biunivoca e conserva l'allineamento: essa è dunque una affinità.

Problema 1.

Data una trasformazione affine di un piano P in un piano Q, quando è possibile immergere i due piani nello spazio euclideo in modo che la trasformazione coincida con la proiezione con raggi paralleli?

Una idea per la soluzione.

Se immergiamo i due piani nella spazio euclideo senza che siano paralleli essi devono avere una retta in comune la quale proiettando, resta fissa punto per punto. Una condizione necessaria è dunque che esista una retta r contenuta in P e una retta r' contenuta in Q tale che l'affinità trasformi r in r' *con un rapporto di scala uguale a 1.* Non è difficile dimostrare che questa è anche una condizione sufficiente. Prendiamo infatti due punti A e B di r e siano f(A), f(B) i trasformanti in r'. Dato che il rapporto di scala è 1 abbiamo che il segmento AB è uguale a f(A), f(B). Immergiamo ora i due piani nello spazio facendo coincidere la retta r di P con la retta r' Q di sovrapponendo A con f(A) e (necessariamente) B con f(B). Sia ora C un punto di P che non appartiene a r e f(C) la sua immagine in Q . Consideriamo, nello spazio dove abbiamo immerso i due piani la retta che congiunge C con f(C). Proiettiamo P su Q con raggi paralleli a questa retta. Questa trasformazione è una affinità g. Poiché g(A)=A=f(A), g(B)=B=f(B) e g(C) = f(C), per il teorema fondamentale f=g. Dunque f si può realizzare con una proiezione con raggi paralleli In definitiva una trasformazione affine f : $P \rightarrow Q$ si può realizzare come una proiezione con raggi paralleli se e solo se esiste una retta r in P che si trasforma in una retta r' con un rapporto di scala uguale a 1.

Il seguente problema era stato proposto nella lezione precedente. Ora diamo un cenno per una sua possibile soluzione.

Problema 2

Consideriamo una trasformazione affine f : $P \rightarrow Q$. *Supponiamo che esista un quadrato in P che si tra forma in un quadrato in Q. Dimostrare che, se questo quadrato esiste, la trasformazione è una similitudine*.

Una idea per la soluzione.

Sia A,B,C,D il quadrato di P che si trasforma nel quadrato di Q A',B',C',D' e orientiamo i due piani secondo il verso di rotazione dato da A,B,C,D e A',B',C',D' . Consideriamo la similitudine g di P in Q che manda A in A' , B in B' e che conserva le orientazioni che abbiamo fissate. Questa

similitudine esiste e conservando gli angoli manda C in C' e D in D'. D'altra parte ogni similitudine di un piano in un altro è una affinità dunque g è anche una affinità. Poiché f(A)=A'=g(A), f(B)=B'=g(B), f(C)=C'=g(C), per il teorema fondamentale, deve essere g=f e dunque f è una similitudine.

Cosa possiamo dire se invece del quadrato consideriamo un triangolo equilatero? Se una affinità trasforma un triangolo equilatero in un triangolo equilatero è una similitudine?