Lezione 4

Trasformazioni affini tra piani
Una affinità f *tra due piani* P *e* Q *è una trasformazione biunivoca di* P *in* Q *che conserva l'allineamento.*
Ciò significa che comunque si scelgano tre punti allineati di P questi punti vengono trasformati in tre punti allineati di Q.

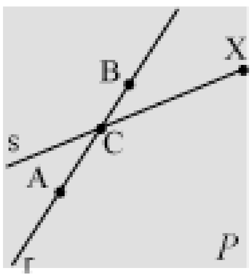
Da questa definizione si ha dunque che le similitudini sono particolari trasformazioni affini.

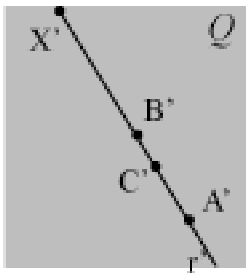
Invarianti di una trasformazione affine

L'affinità **trasforma rette in rette.**
Ciò significa due cose:

1. ogni punto di r si trasforma in un punto di una determinata retta r' di Q
2. ogni punto di r' è immagine di un ben determinato punto di r.

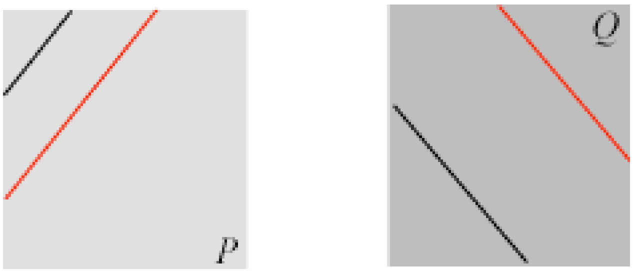
Le due condizioni si esprimono dicendo che la trasformazione, ristretta a r, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di r e quelli di r'.
La dimostrazione di queste due proprietà si basa sulla definizione:
siano A e B due punti diversi di r e siano A'=f(A) e B'=f(B) le loro immagini in Q. A' è diverso da B' perché la trasformazione è iniettiva sia dunque r' la retta definita da A' e B'. Un qualunque punto X di r si trasforma in un punto X'=f(X) di r' perché la trasformazione manda punti allineati in punti allineati. Così si dimostra la prima parte del nostro enunciato.



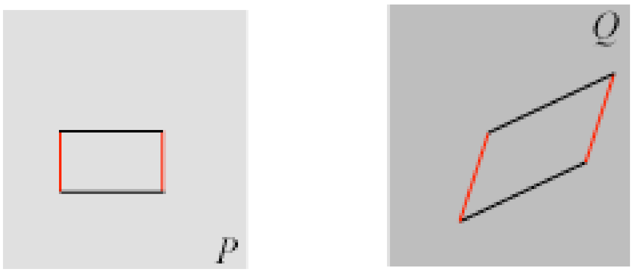


Sia ora X' un qualunque punto di r'. Poiché la trasformazione è suriettiva esiste un punto X di P tale che f(X)=X'. Si tratta di dimostrare che X si trova sulla retta r. Se così non fosse, si verrebbe a creare nel piano P un triangolo ABX. Se s è una qualunque retta di P passante per X e se C è l'intersezione di s con r allora, per quanto visto nella prima parte della dimostrazione, la retta s si trasformerebbe nella retta che passa per f(X), f(C). Ma dato che C si trova su r, f(C) si trova su r' come f(X), Ne segue i punti di s si trasformerebbero in punti di r' come i punti della retta la retta r. In definitiva tutti i punti del piano P si trasformerebbero nei punti di r' contraddicendo la biunivocità.

L'affinità **conserva il parallelismo**.
Infatti se, per assurdo, trasformasse due rette parallele r, s, in due rette r', s' incidenti in un punto A' , essendo f suriettiva, esisterebbe un punto A di P tale che f(A)=A' . Per quanto visto prima, dato che A' è un punto sia di r' che di s' A sarebbe un punto di r, e anche un punto di s mentre r ed s erano parallele e distinte per ipotesi.

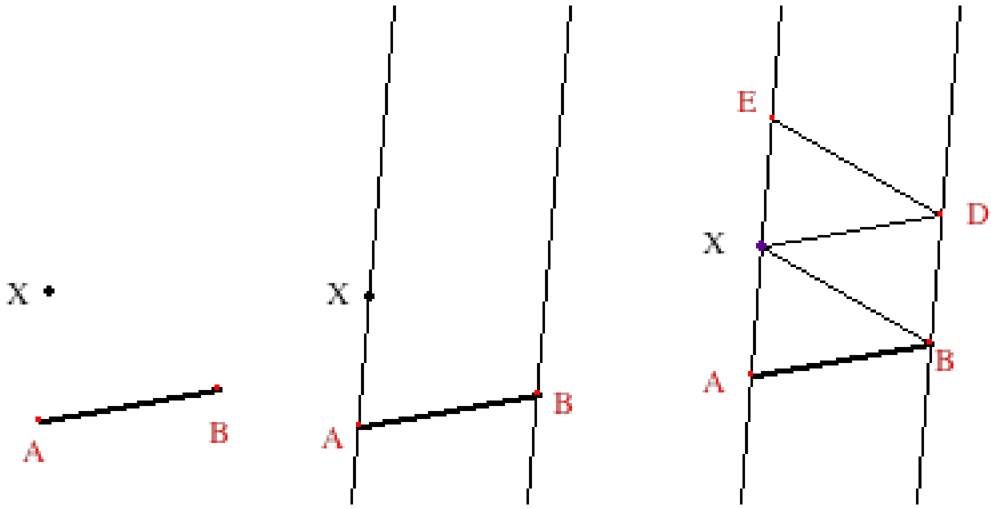


L' affinità **trasforma parallelogrammi in parallelogrammi**
Data che un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se ha i lati opposti paralleli, e dato che il parallelismo è conservato, due lati paralleli si trasformano in due lati paralleli.



Ristrette a una retta le affinità sono similitudini
Abbiamo visto che le affinità trasformano i punti di una retta r biunivocamente in quelli di una retta r'. Questa trasformazione è una similitudine di r in r'.
In altre parole se A, B ,C sono punti di r e se A'=f(A), B'=f(B), C'=f(C) sono le loro immagini in r', allora i rapporti AB : AC e A'B' : A'C' sono uguali.
Naturalmente il rapporto di scala cambia da retta a retta.

Diamo un accenno di dimostrazione nel caso particolare della divisione di un segmento in due parti uguali. Lo studente potrà in questo modo capire come sia possibile articolare sulla stessa linea una dimostrazione per dividere un segmento in n parti uguali. Si tratta di dimostrare che dato un segmento AB esiste una costruzione geometrica che mi permette di dividere il segmento in due o più parti uguali e che sia *invariante*, cioè che usi solo proprietà che l'affinità f conserva.

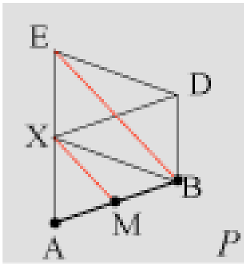


Scelgo un punto X qualunque in P non allineato con A e B. Sulla retta A X, costruisco un punto E tale che AX=XE. La cosa la posso fare senza usare compasso ma solo attraverso rette e rette parallele :

- Traccio la retta AX
- Traccio la retta per B parallela a AX
- Traccio la retta per X parallela ad AB: sia D il punto in cui tale retta incontra la retta precedente.
- Traccio la retta BX
- Traccio la retta per D parallela a XB.

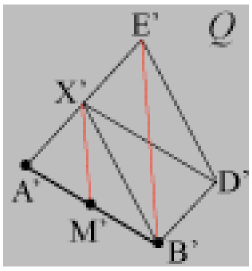
Usando il fatto che, un quadrilatero, i lati opposti sono uguali se e solo se sono paralleli, abbiamo AX = BD = XE. La costruzione può continuare volendo costruire 3, 4,l ..., n segmenti adiacenti uguali. Possiamo usando il teorema di Talete dividere AB in due parti uguali nel modo seguente

- Traccio la retta EB
- Traccio ora parallela XM a EB



AM = MB perché AX = XE.

Usando questa costruzione, dimostriamo ora che una affinità conserva il punto medio.
Consideriamo una affinità f di P in Q e siano A', B', le immagini dei punti A,B rispettivamente e sia M il punto medio di AB. Vogliamo dimostrare che il punto f(M)=M' è il punto medio di A'B'. Trasformiamo con f la costruzione precedente trasformiamo cioè il punto X il punto D e il punto E. Siano X'=f(X), D'=f(D) e E'=f(E). Dato che f conserva allineamento e parallelismo il quadrilatero A'B'X'D' sarà un parallelogramma analogamente il quadrilatero X'B'D'E', a anche la retta E'B' sarà parallela alla retta X'M' essendo EB parallela a XM, ne segue che, sempre per il teorema di Talete sarà A'M'=M'B'.

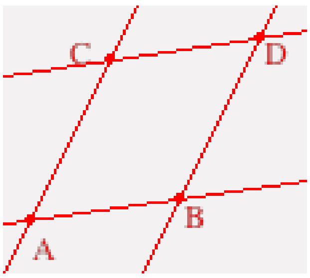


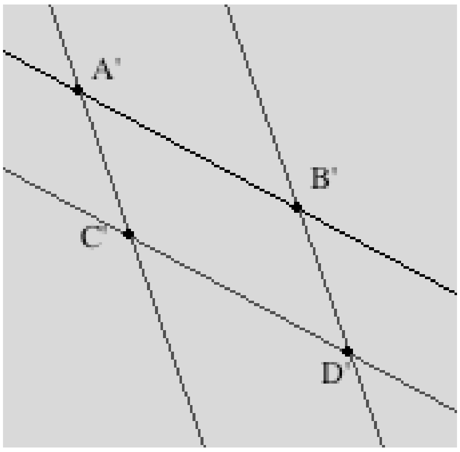
La stessa dimostrazione può essere usata nel caso di rapporti commensurabili: se C è un punto del segmento AB tale che AC : CB = n : m e se f è una affinità allora anche il punto f(C) divide il segmento f(A) f(B) nello stesso rapporto. Lo studente può tentare di *scrivere* una dimostrazione rigorosa di questo enunciato. Come si potrebbe procedere nel caso incommensurabile?

Teorema fondamentale sulle trasformazioni affini

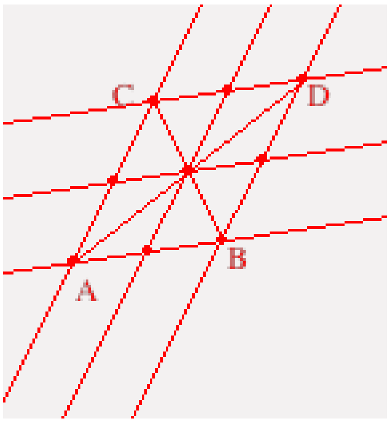
Siano P, Q *due piani, dati in un dato ordine tre punti distinti e non allineati* A, B, C *di* P *e tre punti distinti e non allineati* A', B',C' *di* Q, *esiste e una sola affinità* f : $P \rightarrow Q$ *tale che* f(A) = A′, f(B) =B′, f(C) =C'.

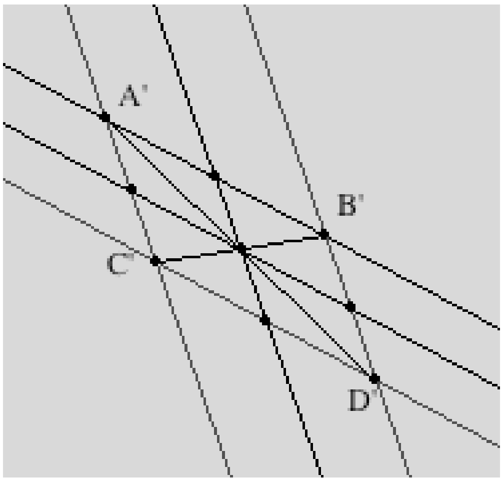
Questo teorema è molto importante perché permette di ricostruire l'affinità a partire dalla conoscenza di soli tre punti di P , dei loro trasformati in Q.
Vediamo come sia possibile dati A, B, C di P e i corrispondenti A', B', C' di Q, costruire l'unica affinità tra i piani P e Q che trasforma A in A', B in B', C in C'. L'idea della dimostrazione è la seguente: se esiste una affinità che manda A in A', B in B' e C in C' tale affinità deve necessariamente mandare tutti i nodi di una griglia costruita a partire dai tre punti dati con rette parallele fitta quanto voglio che ricopre il piano P nei corrispettivi nodi della corrispondente griglia che ricopre Q. Poiché questa griglia e la sua immagine io la posso effettivamente costruire fitta quanto voglio con un passaggio al limite posso trovare l'immagine di un qualunque punto del piano, anche se non è un nodo, dato che questo punto posso approssimarlo quanto voglio coi nodi della rete dei quali conosco l'immagine. In modo più formale noi diciamo che se X è un qualunque punto del piano esiste una successione di nodi della griglia X_1,X_2,X_3, ... , X_n , ... che si avvicina a X quanto voglio. Per come è stata definita la griglia corrispondente nel piano Q, anche i punti f(X_1), f(X_2), f(X_3), ... , f(X_n), ... si avvicinano a un determinato punto: questo punto è f(X).
Vediamo ora come costruire la griglia.
A partire dai tre punti dati nell'ordine A,B,C posso costruire la retta che congiunge il primo col secondo (la retta AB) e la retta che congiunge il primo col terzo (la retta AC) e costruire il parallelogramma ABCD. Facendo la stessa cosa in Q trovo in punto D' e qualunque sia l'affinità f che manda A in A', B in B' e C in C' essa è costretta a mandare D in D'.



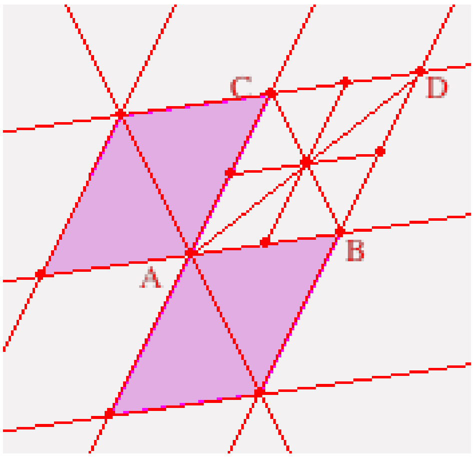


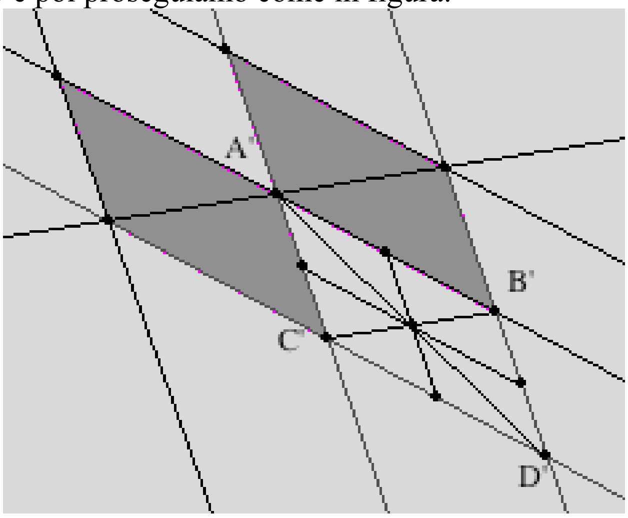
Infatti essendo f è un'affinità, mantiene l'allineamento, quindi trasforma la retta per A B, nella retta per A' B' e la retta per AC, nella retta per A'C'. Poiché dobbiamo anche conservare il parallelismo abbiamo che il parallelogramma ABCD si deve trasformare nel parallelogramma A'B'C'D' e quindi il punto D nel punto D'.
Considerando ora le diagonali: esse si incontrano in un punto dal quale possiamo far partire due rette parallele a AB e AC. In questo modo possiamo dividere il parallelogramma in quattro parallelogrammi più piccoli e tutte immagini di queste linee sono forzate dalla conservazione del parallelismo e dell'allineamento.



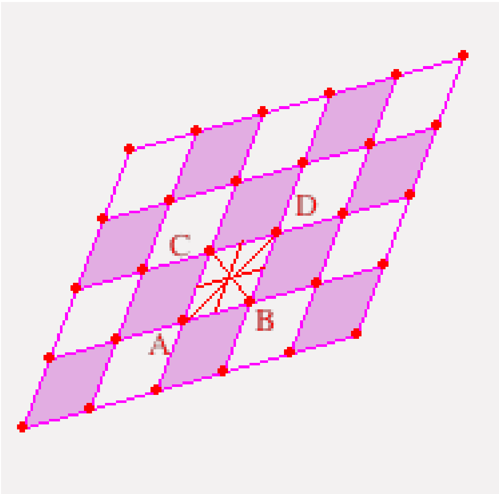


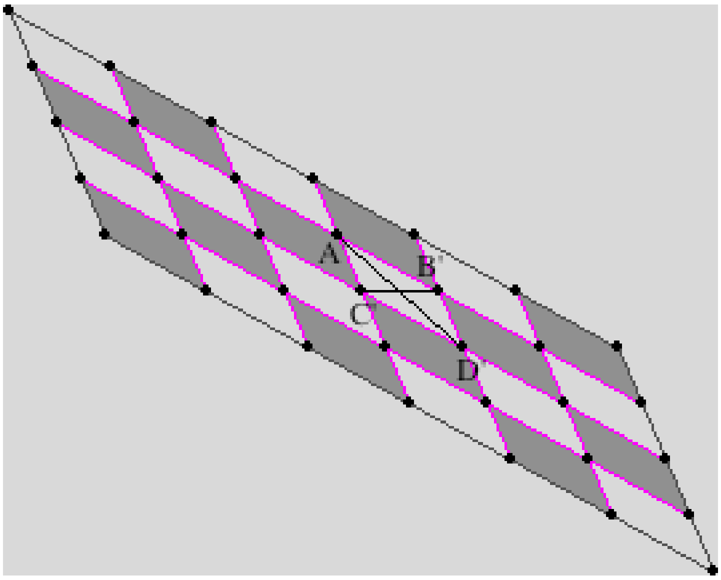
A questo punto la griglia è formata da 4 parallelogrammi uguali e da 12 nodi. Le immagini dei 12 nodi sono evidentemente obbligate. Possiamo ora o infittire uno dei 4 parallelogrammi col metodo visto oppure allargare la griglia da uno dei 4 possibili lati. Dato che abbiamo visto come dividere un parallelogramma in quattro parti, vediamo come estendere la griglia ad esempio sul lato AB, e sul lato AC. Costruiamo da A la parallela alla retta BC e poi proseguiamo come in figura.





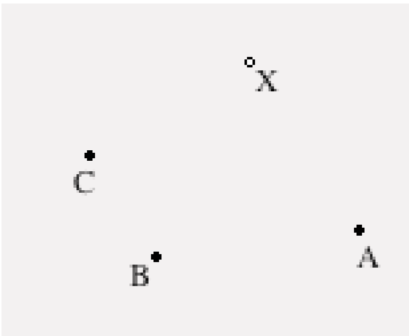
Il disegno successivo, rimpicciolito, fa vedere come risulti la griglia dopo aver aggiunto un certo numero di parallelogrammi e di come sia possibile ricoprire tutto il piano con una siffatta griglia e anche come dividere in quattro un qualunque parallelogramma della griglia.

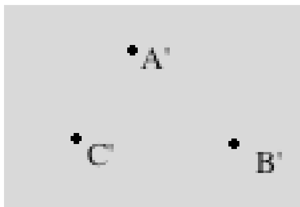




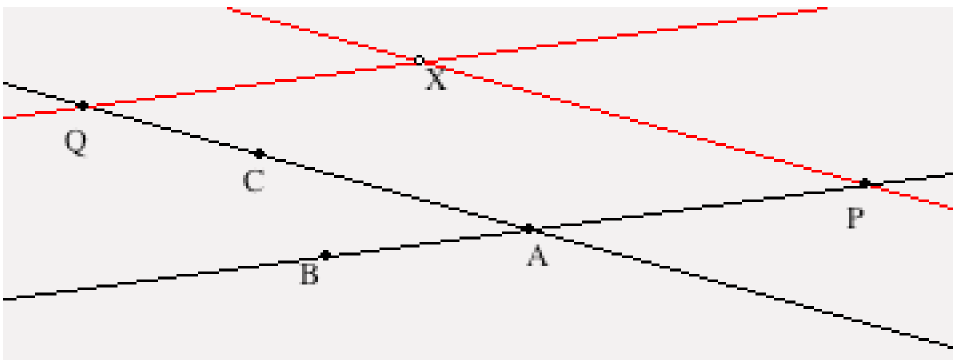
Una secondo modo per dimostrare il teorema fondamentale utilizza il fatto che una affinità ristretta a una retta è una similitudine. Questo permette, data l'immagine di tre punti ordinati A,B,C, di costruire direttamente l'immagine di un qualunque punto X del piano P senza dover costruire la griglia. Vediamo come si può fare.

Supponiamo che siano dato A,B,C nel piano P e le loro immagini A',B',C' nel piano Q e sia X un generico punto del piano P del quale vogliamo determinare l'immagine in Q sapendo che la trasformazione è una affinità.

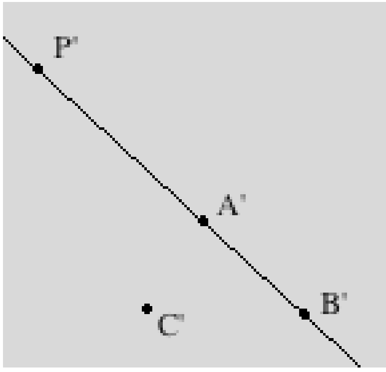


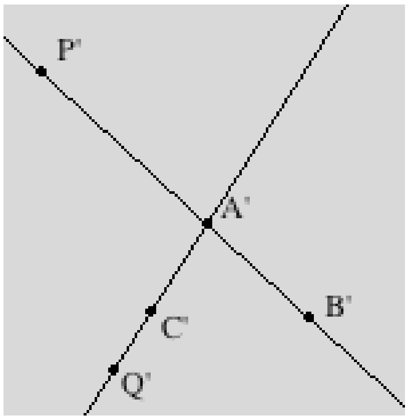


L'idea, come nel caso delle similitudine è di presentare X come intersezione di due rette delle quali sappiamo trovare l'immagine. Consideriamo la retta AB e la retta AC e le rette passanti per X e parallele ad AC e AB. Troviamo in questo modo due punti P e Q.

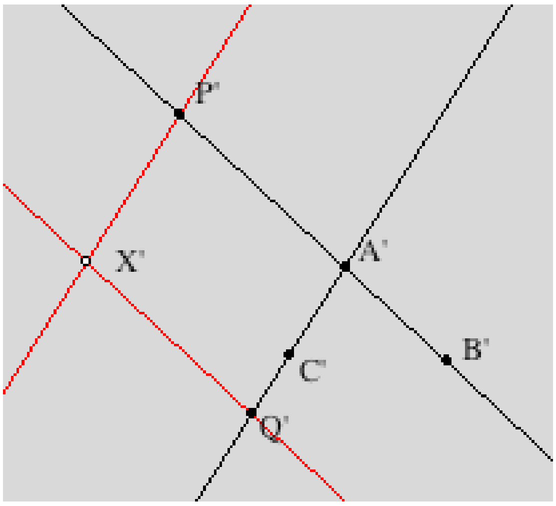


Se riusciamo a trovare le immagini f(P)=P' e f(Q)=Q' dei punti P e Q abbiamo risolto il problema perché f(X) sarà allora l'intersezione della retta per P' parallela a A'C' con la retta per Q' parallela ad A'B'. Chiamiamo r la retta AB e r' la sua immagine l'affinità come trasformazione di r in r' è una similitudine la quale è definita sapendo l'immagine di due punti. Dato che noi sappiamo l'immagine A' di A e B' di B possiamo trovare l'immagine del terzo punto P. Infatti il rapporto di scala che è tutto quello che ci serve in questo calcolo non è altro che AB:A'B'. Dobbiamo quindi calcolare AP:AB e porlo uguale a A'P' : A'B'. Nel caso della figura questo rapporto vale circa -1,6 (attenzione al segno) e questo ci permette di determinare il punto P'. Analogamente troviamo AQ:AC = 0,7 e questo ci permette di trovare Q'





Trovati P' e Q' è facile trovare X' =f(X).



La **Tavola 15** chiede di ricostruire un pesce a partire da una sua parte. E' un esercizion semplice che usa il teorema fondamentale sulle affinità.

Le affinità trasformano rette in rette e queste trasformazioni (ristrette alle rette) sono delle similitudini. La **Tavola 16** chiede di calcolare geometricamente un rapporto di scala per la trasformazione di una retta in un'altra a partire da una affinità. E' un esercizio non semplice perché richiede prima di tutto trovare geometricamente come agisce l'affinità a partire dall'immagine di tre punti. Fatto questo si possono trovare le immagini di due punti X e Y sulla retta dominio e finalmente calcolare il rapporto di scala.

La **Tavola 17** è un esercizio teorico piuttosto difficile. E' utile per individuare degli allievi particolarmente dotati alla ricerca.