Lezione 3

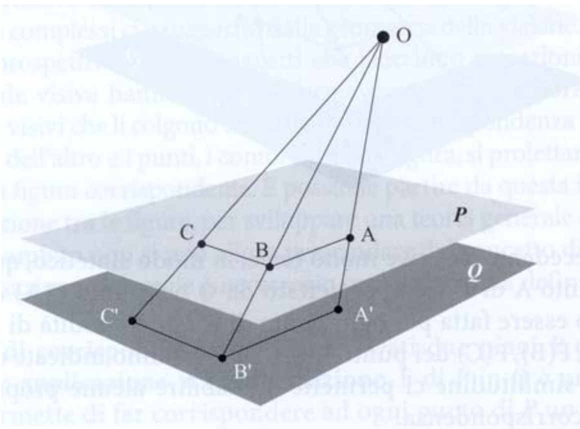
Le considerazioni che abbiamo fatte per studiare le figure su una retta, la loro descrizione e la loro forma, possono in parte estendersi allo studio delle figure piane con lo scopo di sviluppare una teoria della similitudine per quelle figure che abbiamo come sfondo un piano.
Conviene cominciare col riprendere la teoria elementare della similitudine di triangoli per poi interrogasi e interrogare gli allievi su cosa voglia dire che due figure anche poligonali sono simili.
La **Tavola 9** con cui si comincerà questa lezione riguarda i triangoli.
La **Tavola10** a partire da un esercizio chiede di trovare dei criteri di similitudine per i quadrangoli.

Cercando di generalizzare la teoria sviluppate per le figure su rette cominciamo a indagare sulle proiezioni.

Proiezione su piani paralleli
Siano P e Q due piani paralleli e O un punto esterno a essi, la proiezione di P in Q di centro O è la corrispondenza biunivoca

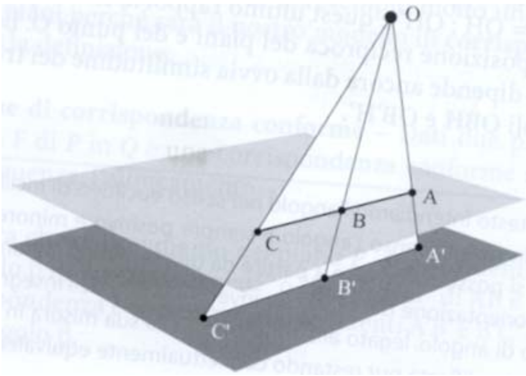
$$f : P \rightarrow Q$$

che associa a ogni punto A di P il punto f(A)=A' di Q ottenuto intersecando la retta OA con il piano Q.



Vediamo ora alcune proprietà che si conservano quando eseguiamo una proiezione su piani paralleli. Tali proprietà si chiamano anche invarianti della trasformazione.

I .
La proiezione su piani paralleli ***conserva l'allineamento***, cioè trasforma rette in rette; infatti presi tre punti allineati A, B, C $\in P$, si ha che le rette OA,OB,OC giaciono su uno stesso piano che intersecherà il piano Q nella retta r' a cui appartengono A',B',C'



II.
La proiezione su piani paralleli ***conserva i rapporti*** tra i segmenti adiacenti. Infatti presi tre punti allineati A, B, C del piano P e le loro immagini A',B',C' nel piano Q si ha che:

AB : BC = A'B' : B'C'.

dato che le rette AC e A'C' sono parallele, perché appartengono al piano AOC e non si incontrano, la proporzione segue dal teorema del Dardo (vedi lezione 1)

III.
La proiezione su piani paralleli **dilata o contrae i segmenti secondo un rapporto fisso**, detto ***fattore di scala***, dato dal rapporto tra le distanze dei due piani dal punto O, cioè se A e B sono due punti di P e A', B' le loro immagini in Q, allora il rapporto

AB : A'B' = k

è lo stesso comunque si prendano i punti A e B. Tale rapporto infatti coincide col rapporto OH : O'H' che non dipende dal segmento AB, ma solo dalla posizione reciproca di O e dei piani P e Q.

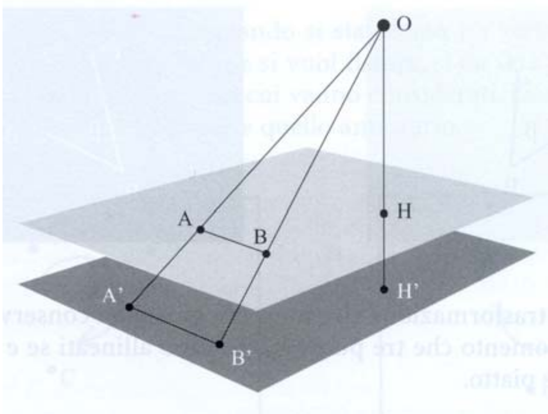
k= OH : O H'

Per dimostrare questo fatto basta osservare che i triangoli OAB, OA'B' sono simili dunque

AB : A'B' = OB : OB'

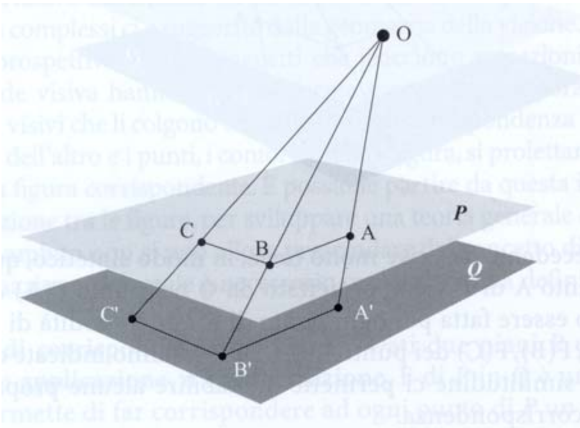
ma anche triangoli OBH, O'B'H' sono simili e dunque

OB : OB' = OH : OH'

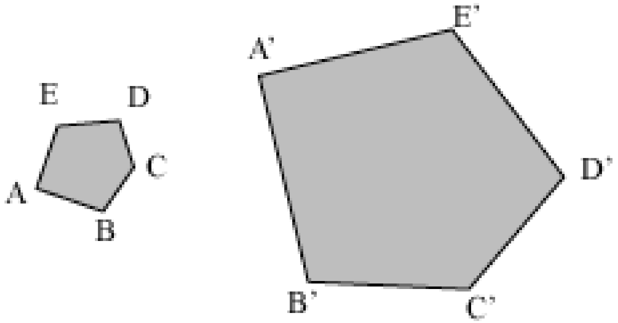


Se il fattore di scala k >1 la trasformazione dilata le grandezze come uno zoom, mentre se 0 < k < 1 le contrae. Se, ad esempio, k=2 ogni segmento si trasforma in un segmento grande il doppio ogni figura fatta di segmenti si trasforma in una figura dove tutti i segmenti sono raddoppiati.

IV:
La proiezione su piani paralleli ***conserva gli angoli***. Infatti l'angolo ABC è uguale al corrispondente angolo A'B'C' dato che i triangoli ABC e A'B'C' hanno, come abbiamo visto, i lati proporzionali e sono dunque simili.



Gli invarianti della proiezione parallela garantiscono dunque che in questo tipo di trasformazione un poligono di n lati si trasforma in un poligono di n lati che avrà gli stessi angoli e lo stesso rapporto (uguale al rapporto di scala) tra lati corrispondenti. Poligoni così relazionati si dicono simili. La figura seguente mostra due pentagoni simili per i quali il rapporto di scala è 3. Gli angoli nei vertici corrispondenti sono uguali o ogni lato del pentagono di destra è tre volte il corrispondente lato del pentagono di sinistra.



Nel caso in cui la figura non sia un poligono come definire la similitudine?

Come stabilire se le due figure sono simili, se hanno la stessa forma? Per sviluppare questa teoria occorre una definizione di similitudine che non si basi sul concetto di angolo o di segmento.

La **Tavola 11** chiede agli allievi di verificare la similitudine o meno di due vasi per giustificare la necessità di una teoria della similitudine fondata sul concetto di trasformazione tra piani.

Cominciamo col definire la similitudine come trasformazione puntuale tra due piani.

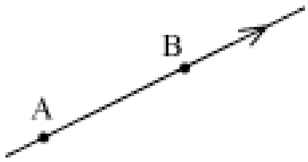
Similitudine tra piani

Una similitudine f *tra due piani* P *e* Q *è una trasformazione biunivoca di* P *in* Q *che conserva l'allineamento e gli angoli .*

La proiezione su piani paralleli è dunque una particolare similitudine.

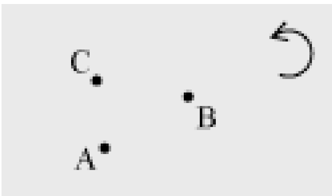
Dimostreremo più avanti che non esistono altri tipi di similitudine cioè che se f è una similitudine di P in Q è possibile immergere i due piani nello spazio tridimensionale in modo che la f sia una proiezione fra piani paralleli.

Ricordiamo come si defisse l'orientazione su una retta e su un piano.
Una ***retta è orientata*** quando è fissato un verso di percorrenza.



Per fare questo occorre fissare sulla retta un coppia ordinata di punti A e B (ciò vuol dire due punti diversi dati in un certo ordine, prima A e poi B). Nella figura la coppia ordinata AB definisce il verso di percorrenza indicato dalla figura (prima A e poi B), mentre la coppia ordinata BA definisce il verso di percorrenza opposto.

Un ***piano è orientato*** quando è fissato un verso di rotazione, che può essere orario o antiorario.

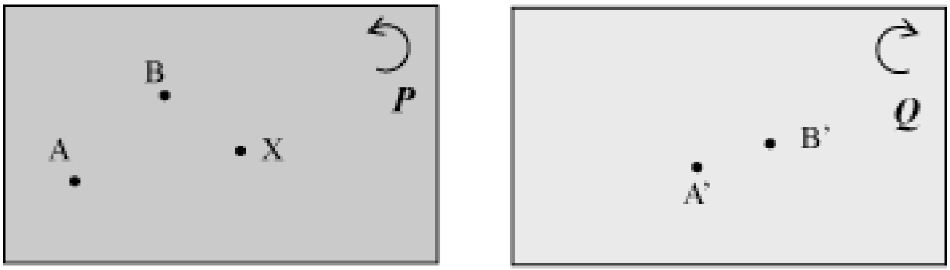


Per fare questo occorre fissare una terna ordinata di punti non allineati (cioè tre punti non allineati in un dato ordine): il verso di rotazione se il primo punto è A, il secondo B e il terzo C sarà quello che si ottiene andando da A a B a C. Nella figura l'orientazione data dalla terna ABC è quella antioraria mentre quella data dalla terna BAC è quella oraria,

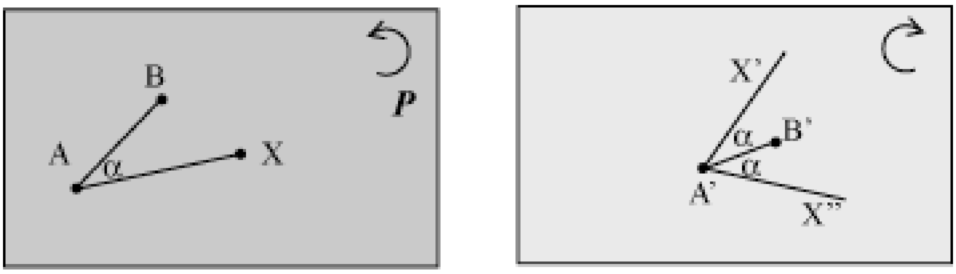
Questa definizione di piano orientato ci permette di dire precisamente cosa vuol dire che una trasformazione di un piano orientato P in un piano orientato Q conserva l'orientazione. Se l'orientazione di P è definita dalla terna ordinata ABC, diciamo che una corrispondenza f : $P \rightarrow Q$ ***conserva l'orientazione*** se la terna ordinata f(A),f(B),f(C) definisce su Q la sua stessa orientazione. Ciò significa che se Q è orientato in senso antiorario bisogna che andando da f(A), a f(B) a f(C) si segua il verso antiorario, analogamente se Q è orientato in senso orario. Possiamo ora enunciare e dimostrare il seguente

Teorema fondamentale sulle similitudini
Dati due piani orientati P, Q, *due punti* A *e* B *di* P *e due punti* A'*e* B' *di* Q, *esiste una e una sola similitudine che associa* A *ad* A', B *a* B' *e che conserva l'orientamento*.

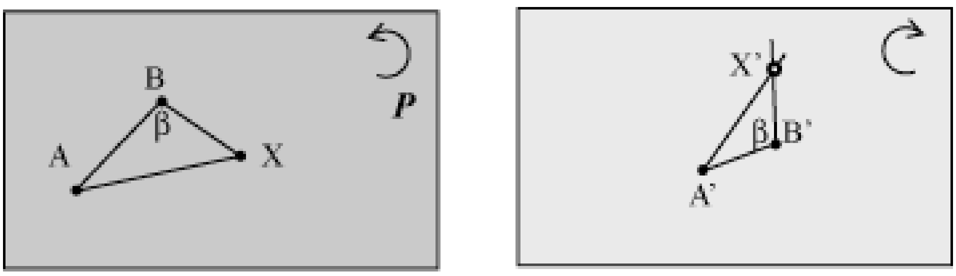
Questo teorema è molto importante perché permette di ricostruire univocamente la similitudine, cioè l'immagine di ogni punto di P, a partire dalla conoscenza di soli due suoi punti e dei loro trasformati. Vediamo concretamente come sia possibile dati i due punti A e B di P, i corrispondenti A', B' in Q, il verso di orientamento di P e Q , determinare l'immagine di un qualunque punto X del piano P sapendo che la trasformazione è una similitudine, cioè conserva gli angoli e l'allineamento. Cominciamo col supporre che X non sia allineato con A e B



Per determinare il trasformato X' di X, si procede nel seguente modo: si costruiscono i segmenti AB e AX e si considera l'angolo BAX = α. Poiché abbiamo supposto che la trasformazione conservi allineamento e gli angoli, il segmento AX si dovrà trasformare in un segmento A'X' in modo che l'angolo B'A' X', sia uguale all'angolo α. Per questo abbiamo due possibili scelte per X'

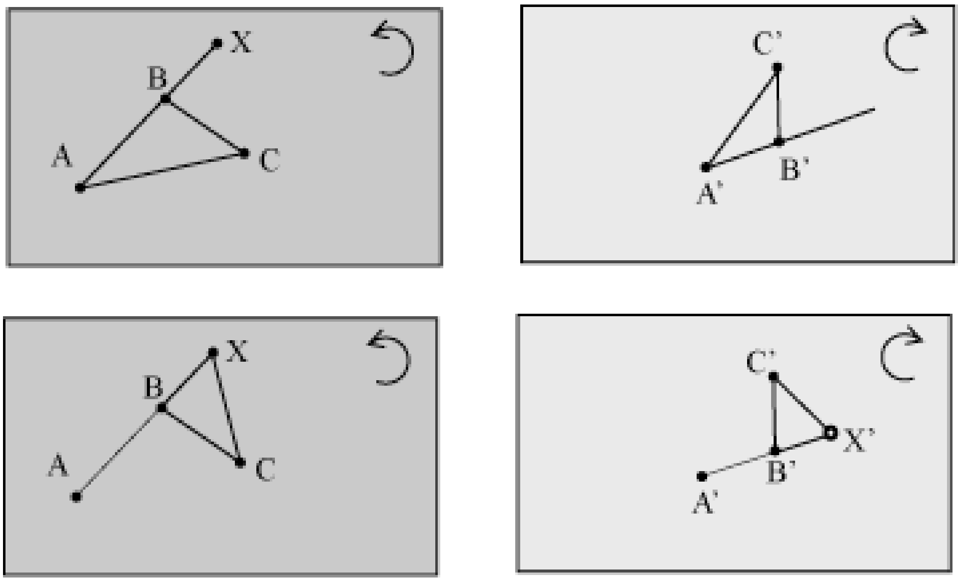


dato che ci sono due semirette di origine A che formano un angolo α con A'B'. A questo punto interviene il fatto che la trasformazione conserva l'orientamento. Se infatti la terna ordinata BAX è concorde con l'orientazione di P (come in figura) allora anche la terna ordinata B'A'X' dovrà essere concorde con l'orientazione di Q. e questo individua una unica semiretta (nel caso della figura dato che Q è orientato in senso orario, il punto X' deve trovarsi sulla semiretta in alto). Per determinare l'esatta posizione di X' sulla sua semiretta consideriamo anche l'angolo ABX che dovrà coincidere con l'angolo A'B'X'



Il punto X' dovrà necessariamente essere l'intersezione delle due semirette.

Nel caso in cui X è allineato con A e B; per determinare il suo trasformato X' in Q si procede nel seguente modo: si sceglie un punto C del piano P non allineato con A,B, con la costruzione precedente si costruisce, a partire da A e B, l'immagine C' di C e poi, a partire da B e C, si costruisce il corrispondente X' di X.[1]



La ricostruzione che abbiamo proposto è stata realizzata utilizzando solo le ipotesi che la trasformazione mantenga gli angoli e l'allineamento, senza mai utilizzare l'invarianza del rapporto tra segmenti corrispondenti.
Una similitudine non può trasformare un quadrato in un rettangolo perché la diagonale del quadrato fa un angolo di 45° con un lato mentre nel rettangolo il corrispondente angolo non è lo stesso.
La **Tavola 12** propone un esercizio grafico di ricostruzione di una scritta a partire da pochi elementi conosciuti.

Il teorema seguente è un teorema di rappresentazione. Si dimostra che ogni similitudine può rappresentarsi, può concretizzarsi in un determinato modo. E' una specie di "metafora matematica" nel senso che si paragona una similitudine astratta (cioè una corrispondenza biunivoca che conserva allineamento e angoli) a un oggetto maggiormente concreto (la proiezione su piani paralleli) che conosciamo bene che possiamo vedere e manipolare e si dimostra che ogni possibile similitudine si "materializza" in una opportuna proiezione.

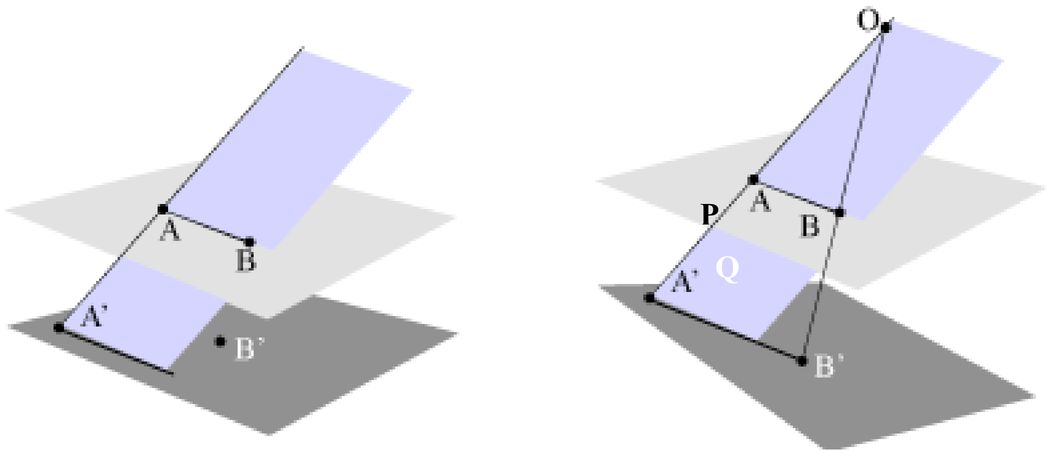
Teorema di rappresentazione sulle similitudini

Data una similitudine f *tra due piani orientati* P, Q *che conservi l'orientamento, è sempre possibile immergere* P *e* Q *nello spazio ordinario come piani paralleli e trovare un punto* O *in modo che la proiezione da* O *di* P *in* Q *coincida con la corrispondenza* f *data.*

Dimostrazione.
Consideriamo due punti A e B del piano P e siano A'=f(A) e B'=f(B) le loro immagini nel piano Q. Immergiamo il piano P e il piano Q nello spazio in modo che siano paralleli e ugualmente orientati. Consideriamo ora la retta dello spazio che congiunge A con A' e il piano che contiene questa retta e il punto B. Ruotiamo il piano Q intorno ad A', parallelamente a se stesso, in modo

[1] Questa ultima parte della dimostrazione è stata proposta da uno studente. E' importante fare nei dettagli questa dimostrazione con gli studenti

che il punto B’ si trovi nel piano ABA’. In questa posizione le rette AA’ a BB’ sono su un piano e dunque si incontrano in un punto O (se fossero parallele ...). Proiettiamo **tutti** i punti di *P* nei punti di *Q* a partire da O. Si ottiene una similitudine f’ (le proiezioni su piani paralleli sono similitudini) la quale trasforma A in A’ e B in B’. Dato che, per il teorema fondamentale, ne esiste una sola deve essere f(X) = f’(X) comunque su scelga un punto X in P e dunque la f coincide con una proiezione f’ su piani paralleli.



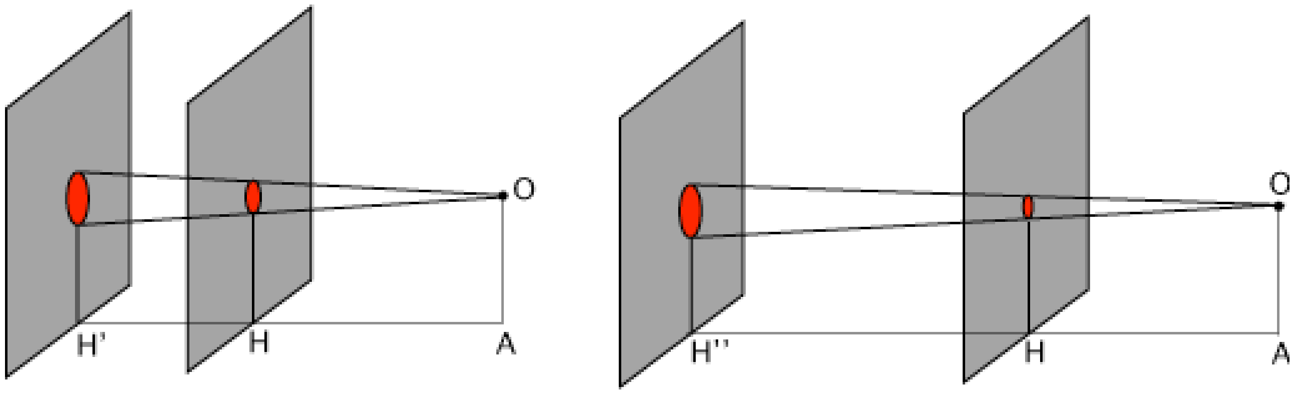
Dato che le similitudini sono proiezioni su piani paralleli esse godono di tutte le proprietà che abbiamo stabilite per queste trasformazioni. In particolare conservano i rapporti e tra segmenti adiacenti e i loro trasformati ed esiste sempre un rapporto di scala che dilata o contrae le distanze tra coppie di punti corrispondenti.

Possiamo ora dare il concetto di forma per ogni figura piana non solo per i poligoni senza bisogno di descrivere le figure con segmenti e angoli.

Definizione di forma
Due figure piane **F** *e* **F’** *hanno la* ***stessa forma*** *se esiste una similitudine tra il piano a cui appartiene* **F** *e il piano a cui appartiene* **F’** *che trasforma una figura in un’altra.*

Si può dimostrare che questa relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva ed è quindi una relazione d’equivalenza tra le figure piane.

Questo concetto di forma legato alle similitudini tra piani e il teorema di rappresentazione ci riportano al modello intuitivo, primordiale di forma intimamente legato alla visione e al movimento: uno stesso oggetto viene visto più piccolo man mano che si allontana da noi ma, essendo lo stesso oggetto, la sua forma non può mutare mentre si allontana. L’occhio che guarda l’oggetto è il vertice della piramide, il centro di proiezione e, man mano che l’oggetto si allontana, lo stesso oggetto, si allontana il piano dove esso si trova e il fattore di scala diventa sempre più piccolo.



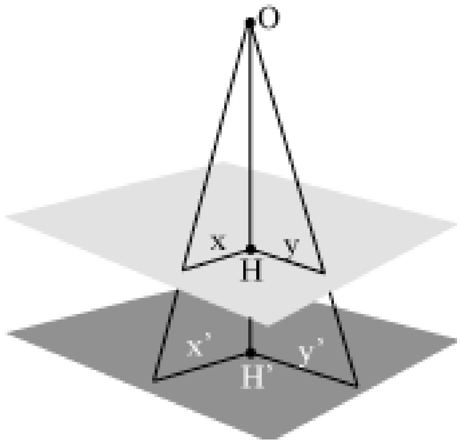
AH:AH' > AH : A H''

Lo stesso meccanismo avviene per una macchina fotografica dove O è l'obiettivo e il piano per H la lastra. L'oggetto resta lo stesso ma la sua immagine sulla lastra si rimpicciolisce se l'oggetto si allontana dall'obiettivo: le dimensioni cambiano ma la forma resta.

La **Tavola 13** riguarda la ricostruzione di un vaso e del suo volume a partire da un frammento.

Equazioni di una similitudine

Come abbiamo fatto per le similitudini tra rette vediamo ora come possiamo descrivere una similitudine con delle equazioni. Per fare questo occorre fissare un sistema di riferimento cartesiano sul primo piano e un sistema di riferimento cartesiano sul secondo piano. Poiché, come abbiamo visto, ogni similitudine possiamo rappresentarla come una proiezione su piani paralleli, possiamo scegliere il riferimento nel piano P prendendo come origine il punto H piede della perpendicolare al piano P passante per O e come assi x, y, due rette incidenti in H e ortogonali. Nel piano Q si considerano come assi coordinati x', y' le proiezioni degli assi x , y e come origine la proiezione H' del punto H.

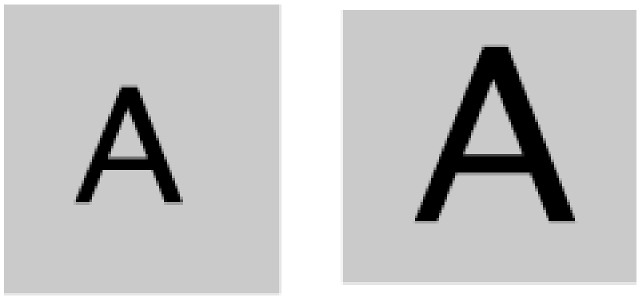


Si vede ora facilmente, dalla similitudine dei triangoli in gioco, che un punto di coordinate (x,y) si trasforma in un punto di coordinate x',y' date da

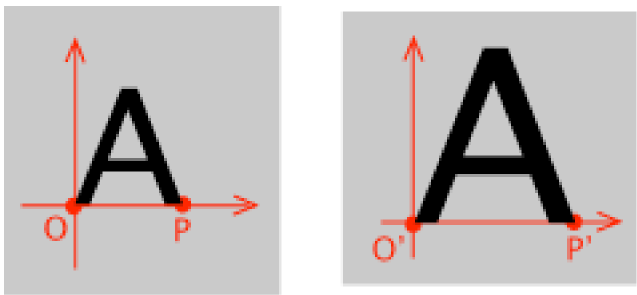
$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \qquad \text{dove k>0 è il rapporto di scala} = \frac{OH'}{OH}$$

Queste formule permettono facilmente di descrivere con delle equazioni manipolabili anche da un calcolatore come si trasformano i punti che descrivono una figura per effetto di una similitudine. Si tratta solo di fissare opportuni sistemi di riferimento e determinare il fattore di scala.

Si si vuole ad esempio descrivere con equazioni la trasformazione data dalla figura seguente



si dovrà scegliere un riferimento il modo che l'origine del piano a sinistra si trasformi nell'origine del piano a destra e gli assi coordinati del piano a sinistra si trasformino negli assi coordinati del piano a destra. Ci sono naturalmente infinite scelte per fare questo che possono essere fatte se si individuano due punti palesemente corrispondenti. Prendiamo ad esempio le parti esterne delle due gambe delle A. La retta che le congiunge (che prendiamo come asse delle ascisse) si trasforma palesemente nella retta che congiunge i corrispondenti punti. A partire da questo possiamo scegliere i riferimenti come nella seguente figura



e con questi riferiteti l'equazioni della similitudine saranno x'=kx, y'=ky. Il fattore di scala si otterrà facendo il rapporto O'P' : OP che in figura risulta circa 7/5. Ogni punto (x,y) della A più piccola si trasformerà nel punto (7/5x,7/5y) della A più grande. Se la A piccola è descritta per punti e segmenti il computer facilmente potrà calcolare e disegnare, con qualunque fattore di scala la A più grande. E' questo il modo con cui il computer modifica la dimensione delle lettere dell'alfabeto:

Q Q Q

Le lettere precedenti sono di 12, 24, 36 punti: ognuna è ottenuta dall'altra tramite un fattore di scala che corrisponde ai rapporti tra i rispettivi punti. La terza lettera è il triplo della prima e in un rapporto 3:2 con la seconda.

La **Tavola 14** chiede di trovare le equazioni di una similitudine tra piani cartesiani che non trasforma l'origine nell'origine e gli assi coordinati nei corrispondenti assi coordinati.