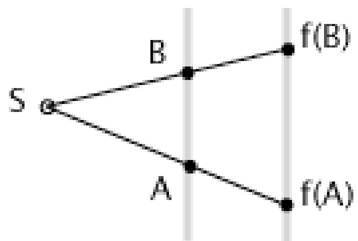
Lezione 2

Trasformazioni puntuali tra rette.
Sia r una retta e r' una seconda retta. Una *trasformazione puntuale* (il termine puntuale indica che la trasformazione agisce sui punti di r, qualora questo sia ben chiaro si potrà, più semplicemente, parlare di trasformazione) di r in r' è una precisa legge f, che permette di trasformare *ogni* punto di r in *un* ben determinato punto di r'. Il simbolo matematico con il quale si indica la trasformazione è

$$f : r \rightarrow r'$$

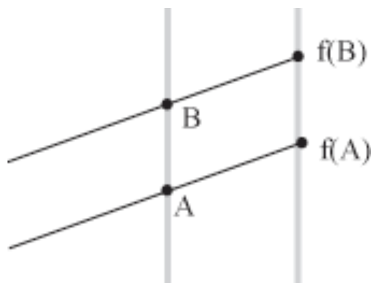
r si chiama il *dominio* della trasformazione e r' il *codominio*. Il trasformato di un punto A di r tramite la funzione f si indica con f(A) o A'. f(A) è dunque un ben determinato punto di r' ottenuto applicando ad A la trasformazione f.

Un esempio molto significativo di trasformazione puntuale di una retta su un'altra è la proiezione su rette parallele:



$$f : r \rightarrow r'$$

La trasformazione f agisce nel modo seguente: preso un *qualunque* punto A si r si traccia la retta AS e si interseca questa retta con la retta r' : il punto in cui queste rette si incontrano è il punto f(A). Una variante di questa proiezione si ottiene proiettando con rette parallele (in questo caso il centro di proiezione S possiamo pensarlo all'infinto. Ma di questo parleremo meglio più avanti)



Questo esempio è molto importante perché fa *vedere* bene il dominio il condominio e la legge f data dalla proiezione. Si vede anche immediatamente che la trasformazione è biunivoca.

Definizione di similitudine tra rette
Una trasformazione puntuale f *tra due rette* r *ed* r'

$$f : r \rightarrow r'$$

*r si chiama una **similitudine** di r in r' se conserva i rapporti cioè se, dati comunque tre punti* A, B, C *di r, risulta*

$$AB : BC = f(A)f(B) : f(B)f(C)$$

Le proiezioni su rette parallele sono un esempio significativo e molto concreto di similitudine tra rette.

Possiamo allora dire che due ***figure rettilinee***

$$F \subseteq r \qquad e \qquad F' \subseteq r'$$

sono ***simili*** se esiste una similitudine della retta r nella retta r' trasforma i punti di F in quelli di F'. Notiamo che questa definizione ha significato anche se F e F' non sono insiemi finiti.

Non è difficile ora dimostrare il seguente.

Teorema fondamentale sulle similitudini tra rette

Date due rette r e r' e dati due punti A e B *di r e due punti* A', B' *di r', esiste una e una sola similitudine* f *di r in r' che trasforma* A *in* A' *e* B *in* B'.

Dimostrazione.

Si tratta di trovare l'immagine f(X) di un qualunque punto X di r sapendo che f è una similitudine e che f(A)=A' e f(B)=B'. Se X è diveso da B, possiamo considerare il rapporto AB : BX = k che si conserva nella trasformazione perché f è una similitudine. Abbiamo dunque che

$$AB : BX = k = f(A)f(B) : f(B)f(X)$$

ma sappiamo che (per il postulato di continuità) sulla retta r' esiste un unico punto X' tale che

$$A'B' : B'X' = k$$

e dunque questo punto X' deve coincidere con f(X).

Questo teorema ci permette di ***rappresentare*** ogni similitudine tra rette con una proiezione su rette parallele. E' questo un caso semplice di un modo di pensare molto generale che cercheremo di ripercorre in situazioni più complicate e che conviene presentare fin d'ora. La definizione di similitudine è una definizione puramente astratta: ci sono due rette (una da una parte e l'altra da un'altra generalmente non immerse nello stesso piano) e poi c'è una trasformazione (in questo caso la similitudine) che ha delle proprietà di conservazione (in questo caso la trasformazione conserva i rapporti). Ebbene i teoremi di rappresentazioni ci dicono che tale trasformazione si può sempre ottenere attraverso una costruzione concreta e chiaramente definita. Nel nostro caso una proiezione.

Teorema di rappresentazione per le similitudini tra rette

Data una similitudine $f : r \rightarrow r'$ *è sempre possibile immergere le due rette in uno stesso piano come rette parallele in modo che la trasformazione sia una proiezione.*

Dimostrazione

Scegliamo due punti A e B su r e consideriamo i punti f(A) e f(B) su r', immergiamo le rette come rette parallele in uno stesso piano e tracciamo le rette A f(A) e B f(B). Queste rette si incontrano in un punto O (o sono parallele). Proiettiamo i punti di r su quelli di r' da O (o con rette parallele). Questa trasformazione come abbiamo visto è una similitudine inoltre, per costruzione, A si proietta in f(A) e B in f(B). Dato che esiste una sola similitudine con questa proprietà la similitudine f deve necessariamente essere uguale alla proiezione.

Equazione di una similitudine tra rette.

Consideriamo una generica proiezione di r in r'. Fissiamo una ascissa x su r e una ascissa x' su r'. Supponiamo, come nella figura, che il punto O, origine su r, si proietti nel punto O' origine su r'

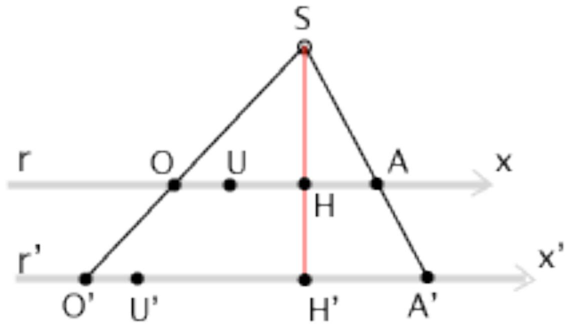


fig. 15

Sia U è il punto unità di r e U' il punto unità di r'. OU=O'U'=1. La retta SHH' è perpendicolare alle due rette parallele. Il rapporto di scala

$$k = SH' : SH$$

dipende solo dalla posizione delle due rette e dalla posizione del punto S. Sia A un generico punto di r e sia x la sua ascissa. Avremo

$$OA = xOU$$

D'altra parte, dato che i due triangoli SOA e SO'A' sono simili, abbiamo che

$$O'A' : OA = SH' : SH = k$$

da cui

$$O'A' = kOA = kxOU = kxO'U'$$

E quindi l'ascissa x' di A' è data da

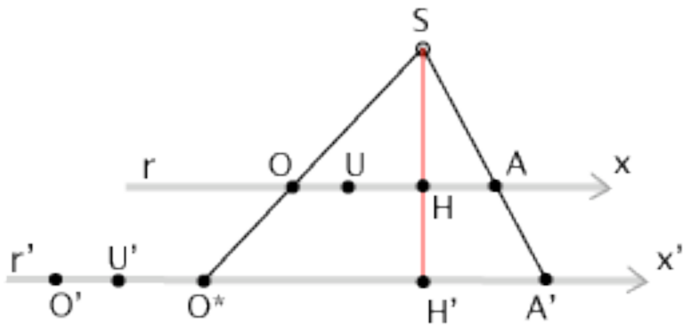
$$x' = kx$$

dove k è il fattore di scala.

La formula precedente è l'equazione della similitudine in termini di ascisse: un punto di ascissa x si trasforma in un punto di ascissa x'=kx nel caso in cui l'origine si trasformi nell'origine.

Se questa circostanza non dovesse verificarsi, sarà sempre possibile ridursi, con una traslazione a questo caso.

Se l'origine O della retta r non si trasforma nell'origine O' della retta r', ma in un punto qualunque O*, se l'ascissa di O* è b abbiamo



ragionando come prima, $O^*A' = kxO'U'$ cioè

$$O'A' = O'O^* + O^*A' = b + kx$$

In generale, dunque, l'espressione analitica di una similitudine

$$f : r \rightarrow r'$$

è data da una equazione di primo grado: il punto A di ascissa x si trasforma nel punto f(A) di ascissa

$$x' = kx+b$$

dove k è il fattore di scala e b è l'ascissa del punto $O^* = f(O)$.

Lo scopo principale della trattazione che segue è quello di stabilire un gancio nella memoria e nell'immaginazione degli studenti che colleghi l'espressione analitica

$$u = ax+b$$

con la quale si rappresenta una similitudine tra rette con il suo significato geometrico e spaziale. La formula che abbiamo scritto è, come la maggior parte delle formule matematiche, molto compatta. Si vuole smontare la formula dando significato e concretezza a ogni sua componente. Questa operazione che ora presentiamo dettagliatamente, è molto importante perché permette di creare significati più profondi e stabili in grado poi di operare autonomamente anche in ambienti nuovi. La formula deve intanto farci immaginare due rette la prima descritta con una ascissa x e la seconda con una scissa u e una trasformazione della prima retta nella seconda che trasforma il punto di ascissa x nel punto di ascissa ax+b. Che significato hanno i due coefficienti a e b? Già i nomi di questi coefficienti suggeriscono qualcosa di più concreto: a si chiama il *fattore di scala* e b il *fattore di traslazione*. Che significato ha il segno del coefficiente a? e quello di b? e il loro valore assoluto? Cosa significa che $0 < a < 1$? o che a è molto grande? Si vuole che lo studente sappia rispondere con sicurezza a queste domande sapendo riconoscere nella formula il suo significato concreto e viceversa riproducendo con una formula una situazione assegnata.

Si comincia col proporre agli studenti la **Tavola 5** . Questa tavola contiene 2 esercizi grafici che abituano a individuare il significato del segno del coefficiente a.
La **Tavola 6** chiede di trovare le equazioni di una similitudine tra rette a partire dal disegno di una proiezione.
La **Tavola 7** chiede di trovare l'equazione di una similitudine a partire da una figura e richiede una buona comprensione del concetto di ascissa, e di proiezione. Può essere lasciata come esercizio facoltativo da fare eventualmente a casa.
La **Tavola 8** chiede di dimostrare una formula e di riflettere su ciò che è servito per la dimostrazione. Può essere lasciata come esercizio facoltativo da fare eventualmente a casa.

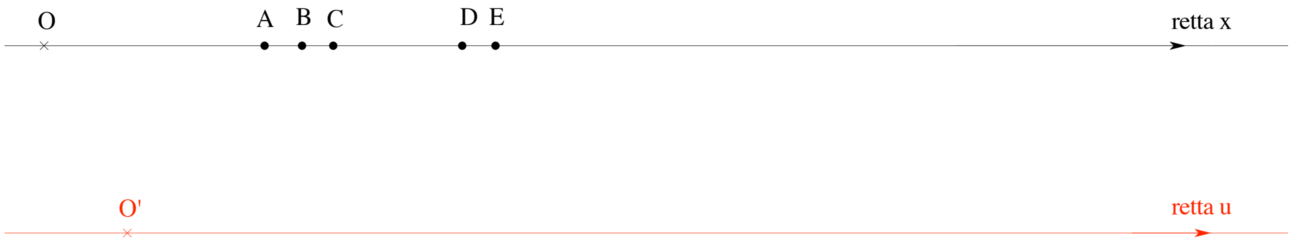
Questa parte della lezione si svolge nel laboratorio informatico della scuola. Sarà utilizzato il software Cabri-Géomètre. Sarebbe meglio se gli studenti (o una buona parte di loro) conoscessero le operazioni base del software. Tuttavia nell'esercitazione saranno usate solo le costruzioni più semplici che potranno essere spiegate anche per la prima volta.

La prima costruzione che proponiamo è una **proiezione** su rette parallele. Mostriamo la costruzione passo per passo.

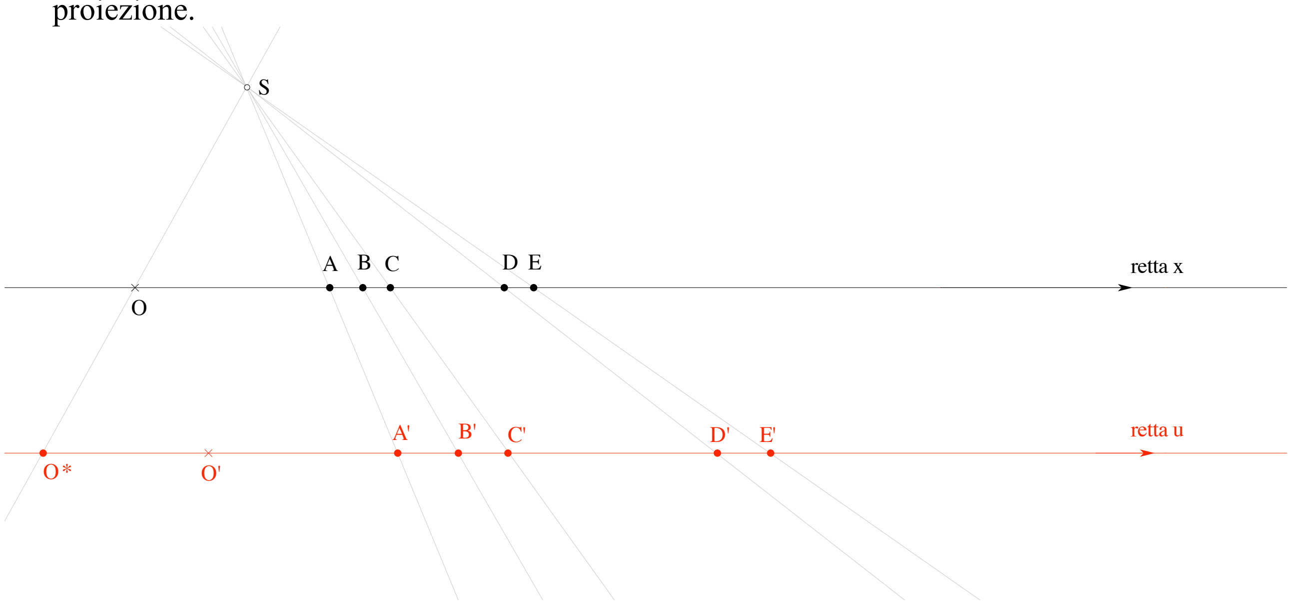
1. Costruiamo la retta delle x: disegniamo una retta orizzontale nera ancorata a un punto O e su di essa un vettore che ne dia l'orientazione. Mettiamo il nome al punto O e alla retta

2. Sulla retta delle x disegniamo una figura composta, ad esempio, di 5 punti ai quali diamo i nomi di A,B,C,D,E. I punti possono traslare sulla retta a piacimento

3. Disegniamo ora una seconda retta rossa ad essa parallela ancorata a un punto O' del piano e orientata come la retta x da sinistra a destra

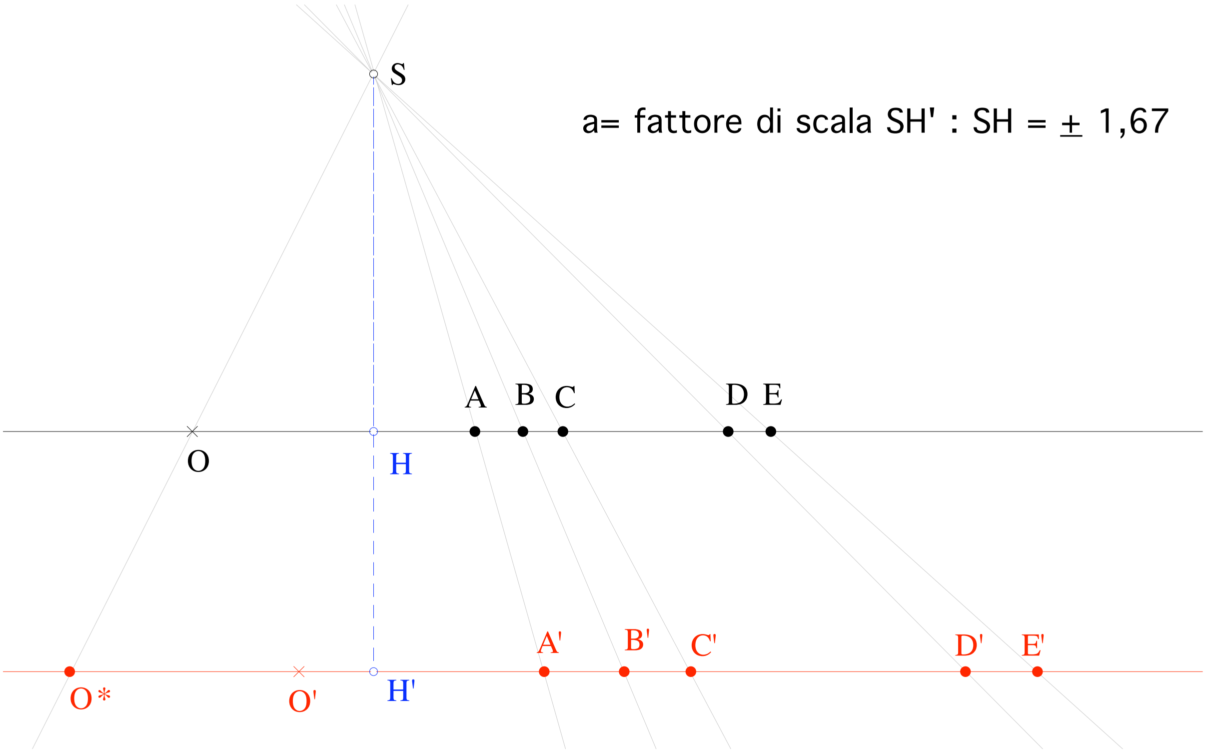


4. Fissiamo ora un punto S in una posizione arbitraria del piano e tracciamo in grigio le rette che proiettano i punti A,B,C,D,E e il punto O sulla retta rossa. Indichiamo il risultato della proiezione con i punti A',B',C',D',E'. Spostando col mouse il punto S cambia la proiezione.

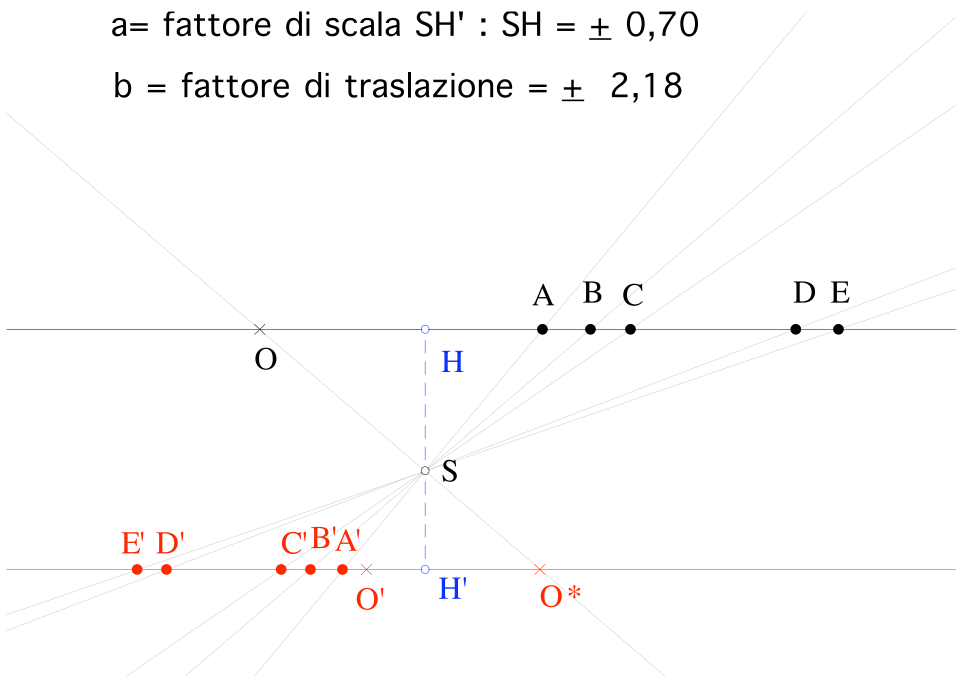


5. Calcoliamo ora il fattore di scala. Tracciamo la retta per S perpendicolare alle rette delle x e delle u, che le incontra nei punti H e H'. Calcoliamo con lo strumento distanza la lunghezza dei segmenti SH' e SH; con la calcolatrice calcoliamo il loro rapporto e riportiamo questa misura sul foglio scrivendo sulla sue sinistra "a = fattore di scala = ± ...". Nascondiamo le misure SH' e SH e la retta SH disegnado tratteggiati i segmenti SH e SH'. Il segno ± , che si ottiene con un "+" sottolineato, va discusso con i ragazzi. Il segno è + se la

trasformazione conserva l’orientazione e - nel caso opposto quando cioè S si trova tra H e H’.

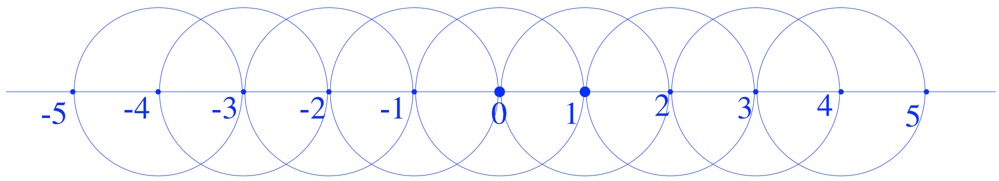


6. Troviamo ora il fattore di traslazione che è l’ascissa del punto O* sulla retta rossa. Misuriamo la distanza O* O’ con la calcolatrice dividiamo questa distanza (che è espressa in centimetri) con 1 cm in modo da avere un numero puro e riportiamo questo risultato sul foglio scrivendo sulla sua sinistra “b= fattore di traslazione = ± ....”. Anche ora si deve discutere con gli studenti sul significato del segno di b.

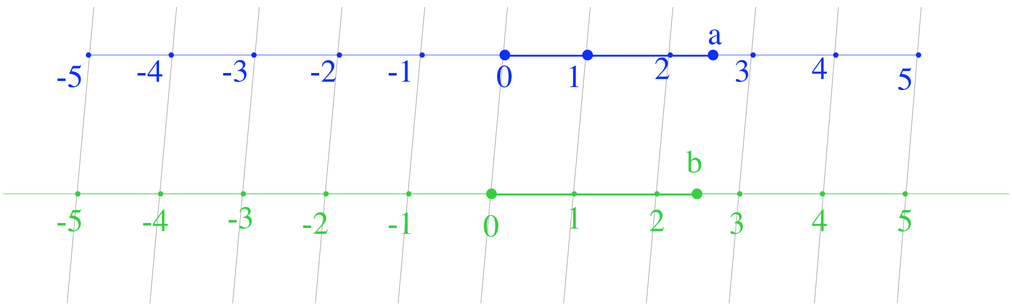


L'esercizio seguente costruisce la similitudine tra due rette di equazione **u=ax+b**, quando siano dati i valori dei due parametri a e b.

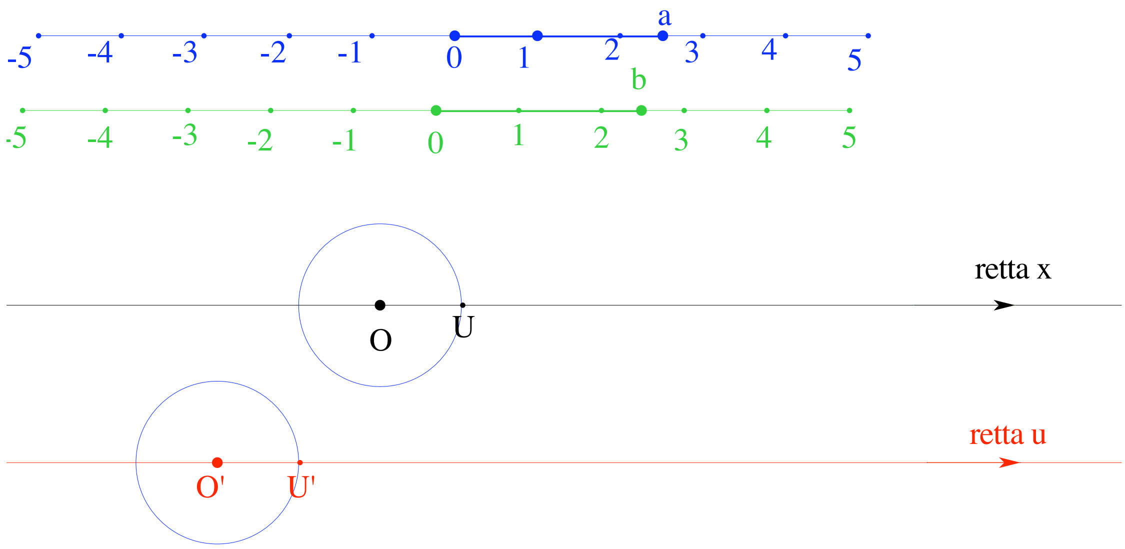
1. Fissiamo una unità di misura e disegniamo su una scala graduata i numeri da -5 a +5: fissiamo un punto O arbitrariamente, facciamo una retta orizzontale passante per O e su questa il punto 1. Con delle circonferenze di raggio 1 riportiamo gli altri punti sulla retta. Agendo sul punto O si sposta la scala e agendo sul punto 1 si cambia l'unità di misura.



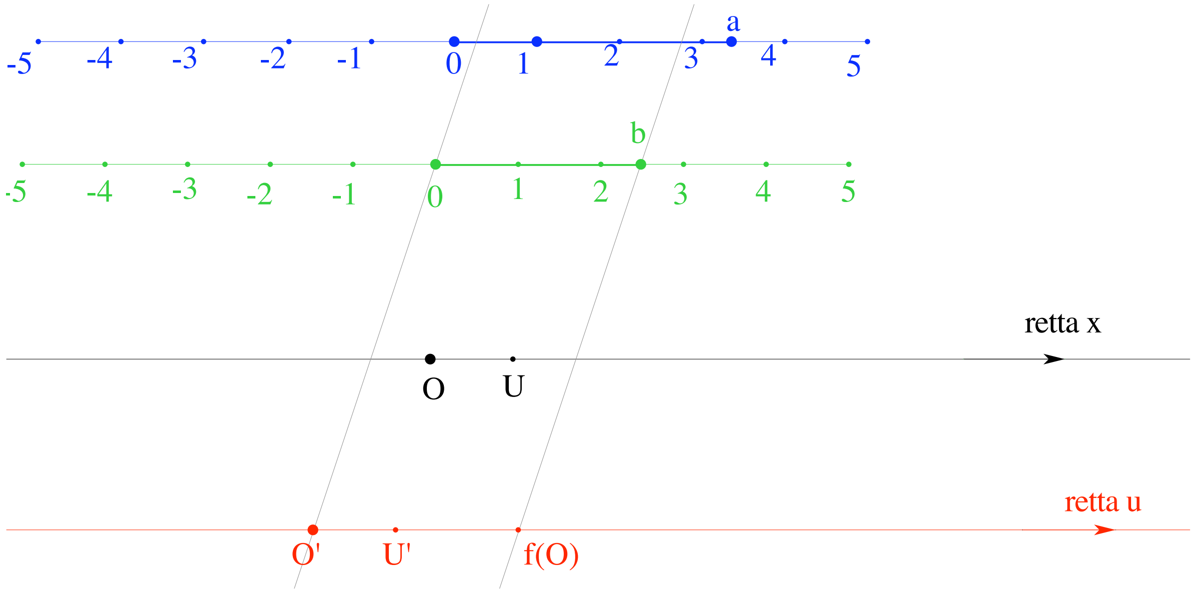
2. A partire da O disegniamo un segmento più spesso contenuto nella retta graduata: la lunghezza di questo segmento darà il valore del parametro a. Nascondiamo i cerchi e facciamo un segmento da -5 a 5 e nascondiamo la retta. Ripetiamo l'operazione precedente per il parametro b. Per riportare i punti sulla nuova scala possiamo questa volta usare rette parallele che poi nascondiamo.



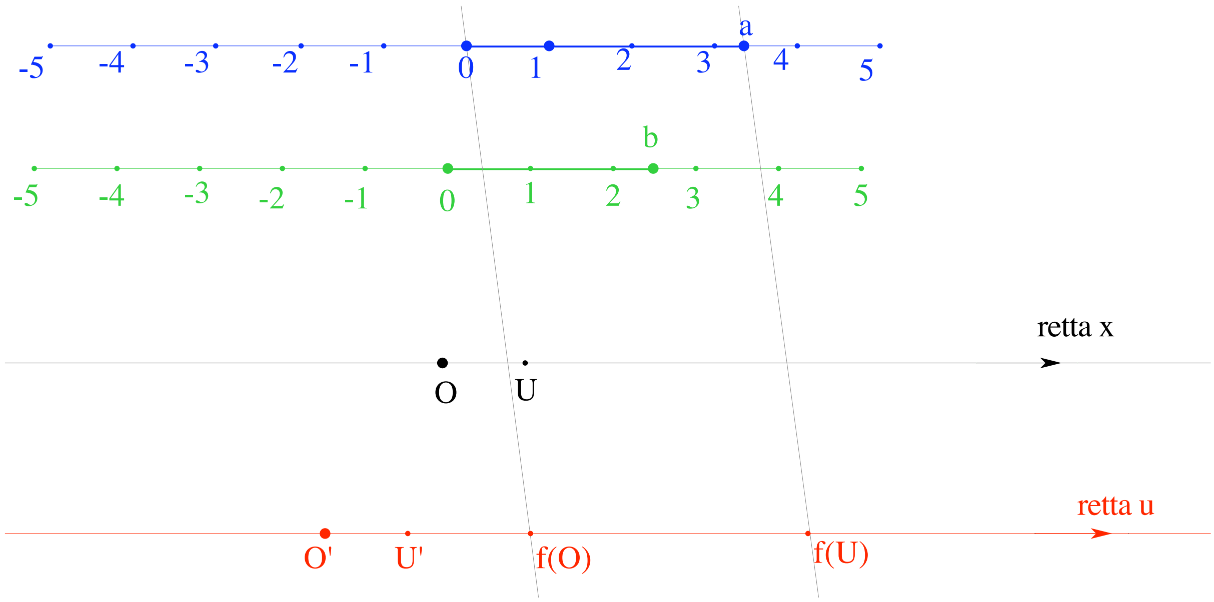
3. Disegniamo ora le due rette con le loro origini e i punti unità riportando col compasso sulle due rette la distanza dell'unità di misura.



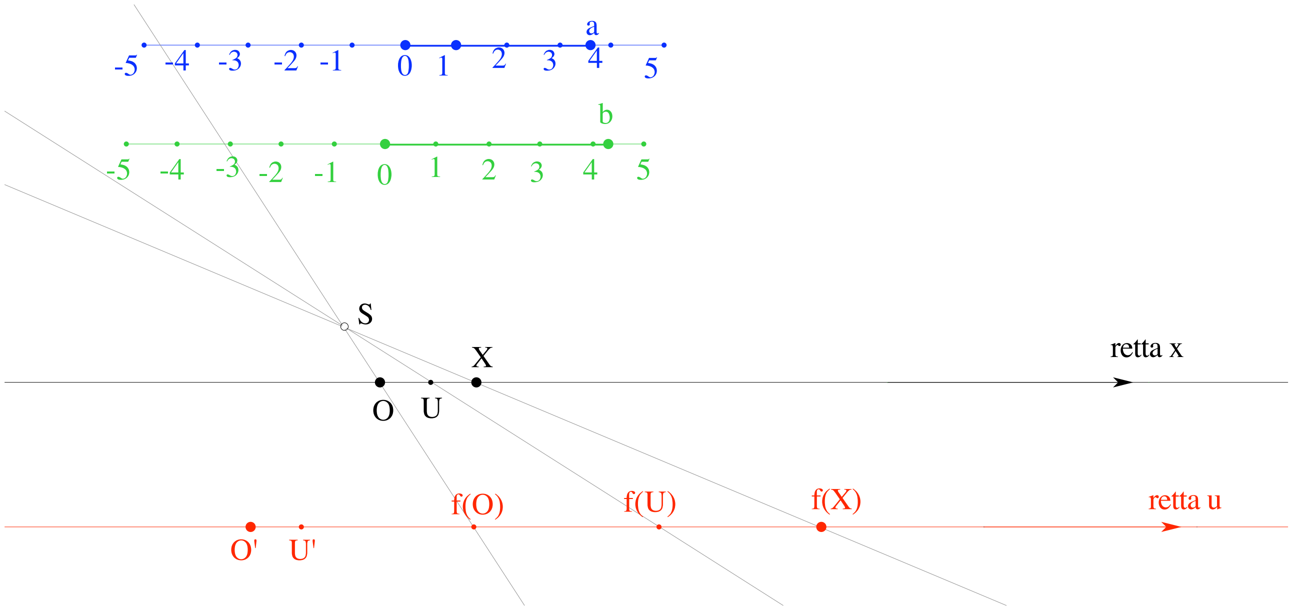
4. Riportiamo il punto O* sulla retta rossa: ricordiamo che O* = f(O) e quindi l'ascissa di O* è u=a.0+ b = b. Basta quindi riportare b sulla retta rossa usando rette parallele (che poi nascondiamo) in modo che se b è positivo O* si ritrova alla destra di O' mentre se negativo alla sinistra.



5. Calcoliamo ora l'immagine f(U) del punto U: poiché l'ascissa di U è 1, il punto f(U) avrà ascissa u=a.1+b = a+b. Riportiamo quindi con rette parallele (che poi nascondiamo) il valore a sulla retta rossa a partire da f(O) che ha ascissa b.



6. La trasformazione u=ax+b trasforma O in f(O) e U in f(U) e poiché, per il teorema fondamentale, esiste una e una sola similitudine che manda due punti della retta nera in due punti della retta rossa, la proiezione che ha centro nel punto S dove si incontrano le rette O f(O) e U f(U) avendo quella caratteristica deve coincidere con la data similitudine. Dunque qualunque sia il punto X sulla retta nera, la sua immagine f(X) può essere costruita proiettando da S il punto X sulla retta rossa.



Muovendo il punto X possiamo trovare la sua immagine. E' interessante anche notare come cambia la trasformazione cambiando il parametro a ($a<0$, $0<a<1$, $a>1$) e cosa succede cambiano il parametro b.