Trasformazioni puntuali

0. Introduzione

In questo Laboratorio matematico parleremo di trasformazioni puntuali, di morfismi cioè che trasformano i punti di una determinata figura nei punti di un'altra. Attraverso questi laboratori farete una didattica d'insieme: tutti sarete coinvolti con le vostre intuizioni ed idee.

Questi laboratori vi avvicinaranno a degli elementi della matematica contemporanea. Quali studi si fanno oggi in geometria? perchè li facciamo? Che interesse hanno? come si legano ad altri aspetti del mondo e al contesto esterno? e in particolare come il pensiero matematico e geometrico ci aiuta a creare dei modelli per comprendere realtà complesse?

L'argomento che tratteremo si lega in particolare a tre importanti campi di applicazione: l'Informatica, la biologia e la storia dell'arte. E' noto a tutti come la presenza del calcolatore, di questo strumento ludico, di calcolo, di lavoro, di simulazione, in gran parte delle famiglie italiane abbia conseguenze enormi. Nuove forme di alfabetizzazione si impongono con forza e in questo il linguaggio matematico ha un ruolo fondamentale. La lingua peculiare attraverso la quale il calcolatore può lavorare è la la logica matematica, quella parte della matematica più astratta e rigorosa, mentre la grafica, diventata nei nuovi sistemi operativi basati sulle "finestre" di grande importanza, sposta e modifica le immagini, attraverso la geometria delle trasformazioni.

In biologia è molto interessante lo studio delle forme. Cos'è una forma? come la forma cambia? qual è il suo destino? cosa diventerà alla fine della sua evoluzione? Lo studio della forma e delle sue mutazioni lo studio cioè della morfogenesi, ci ha permesso di ricostruire attraverso l'analisi di pochi reperti, il passato di una specie e cj ha permesso di prevedere in un qualche modo il futuro attraverso una matematica in grado di descrivere con precisione l'evoluzione di una data forma, e delle sue modificazioni. Su questo ci sono studi importanti basati su una matematica difficile, della quale daremo, anche in questo laboratorio, qualche piccolo cenno attraverso un'attività pratica che svilupperemo insieme.

Anche la storia dell'arte si lega profondamente alla geometria delle trasformazioni puntuali. La possibilità di creare un oggetto bello, un affresco, una pittura, una statua, è legata non solo alla fantasia libera e creatrice dell'artista, ma anche alla sue conoscenze geometriche che gli permettono di scegliere determinati effetti piuttosto di altri. Diceva Alberti[1]

Piacemi il pittore sia dotto, in quanto e' possa, in tutte l'arti liberali; ma in prima desidero sappi geometria.

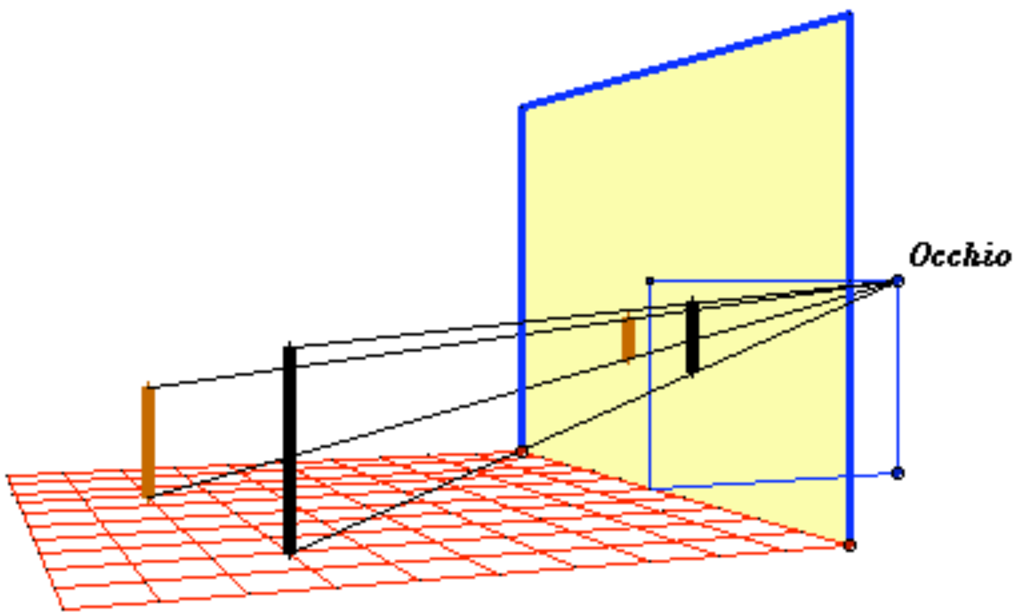
Come è noto, nel rinascimento il concetto di proporzionalità era alla base non solo della geometria e della matematica in generale, ma era anche canone di bellezza. La prospettiva poi, cioè la possibilità di rappresentare un oggetto su un dipinto in modo che il cono visivo col quale vedo l'oggetto rappresentato sia identico al cono visivo col quale vedrei l'oggetto reale, da origine alle trasformazioni proiettive di enorme importanza nella geometria del XIX secolo e ancora oggi. L'oggetto che vedo, l'oggetto reale, ha una sua forma geometrica precisa, ad esempio è un quadrato, mentre la sua rappresentazione sul quadro, cambia completamente a seconda del punto di vista: può essere un rettangolo o un trapezio o anche un segmento se l'occhio si trova sul piano del quadrato. La geometria della visione studia il rapporto che si crea tra l'essere geometrico dell'oggetto e il suo apparire, in funzione della posizione del punto di vista. Euclide nella sua opera *Ottica* pone per primo le basi di questa geometria consentendo ai pittori dell'epoca di realizzare affreschi spettacolari come *La stanza delle maschere* al Palatino a Roma dove si nota una straordinaria e non casuale coerenza prospettica. Questi studi, ripresi nel Rinascimento da Alberti e soprattutto Piero della Francesca, portranno nel XVII secolo alla concezione ad opera di Desargues dello spazio proiettivo. Desargues immaginò uno spazio nel quale aggiungere dei nuovi punti,

[1] Leon Battista Alberti, De pictura, libro III, n. 53.

all'infinito, risolvendo coerentemente un incomprensibile paradosso: un punto infinitamente lontano io lo vedo, vedo due rette parallele che si allontanano verso l'orizzonte convergere in un punto, punto che tuttavia non esiste perché le rette sono parallele ma che pure io vedo e che il pittore vede e che quindi disegna sul suo quadro. E qui il paradosso. Questo punto infinitamente lontano in realtà non c'è ma lo vedo, e quindi lo disegno. E non vedo solo un punto infinitamente lontano, ma ne vedo infiniti che si dispongono sulla linea dell'orizzonte. Per rendere la corrispondenza tra i punti che vedo e quelli che ci sono biunivoca, occorre aggiungere dei nuovi punti postulando, come Desargues ha l'ardire di fare, che due rette in un piano hanno sempre un punto comune al finito se non sono parallele, all'infinito se sono parallele. La corrispondenza tra i punti che vedo e quelli che formano lo spazio che in questo modo diventa biunivoca è una corrispondenza proiettiva.

1. Lo spazio albertiano.

Per cominciare cerchiamo ci capire cosa sia una *figura*. Per parlare di figura abbiamo bisogno di uno sfondo, uno sfondo sul quale questa figura si colloca. Lo sfondo è un particolare spazio, una retta, un piano, lo schermo del computer, una sfera ad esempio, che ha una sua esistenza oggettiva anche se non contiene alcuna figura. Questa idea nasce con Alberti che, per primo, scrive una teoria che permette di rappresentare prospetticamente lo spazio indipendentemente dalle figure che in tale spazio saranno collocate. E proprio perché lo spazio va rappresentato, e poiché questa rappresentazione ne cambia le reciproche distanze, esso assume necessariamente la dignità di oggetto matematico in se anche se di fatto è vuoto. Tale oggetto viene descritto innanzi tutto pensandolo come formato da infiniti punti alcuni dei quali vengono raffigurati nelle loro distanze reciproche attraverso i nodi di una griglia generalmente quadrata. La rappresentazione prospettica di questa griglia dirà come lo spazio e le distanze tra i punti si trasformino per effetto della visione. Solo in un secondo tempo sarà possibile mettere delle figure all'interno di questa griglia: la trasformazione della griglia si porterà con se la trasformazione della figura.



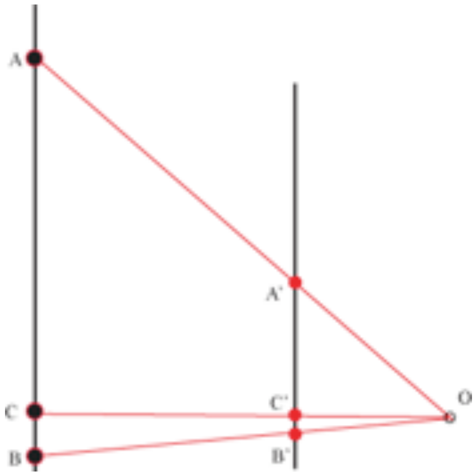
L'animazione interattiva (**Prospettiva**) permette di ruotare la figura e vederla da diverse angolazioni.

2. Figure rettilinee

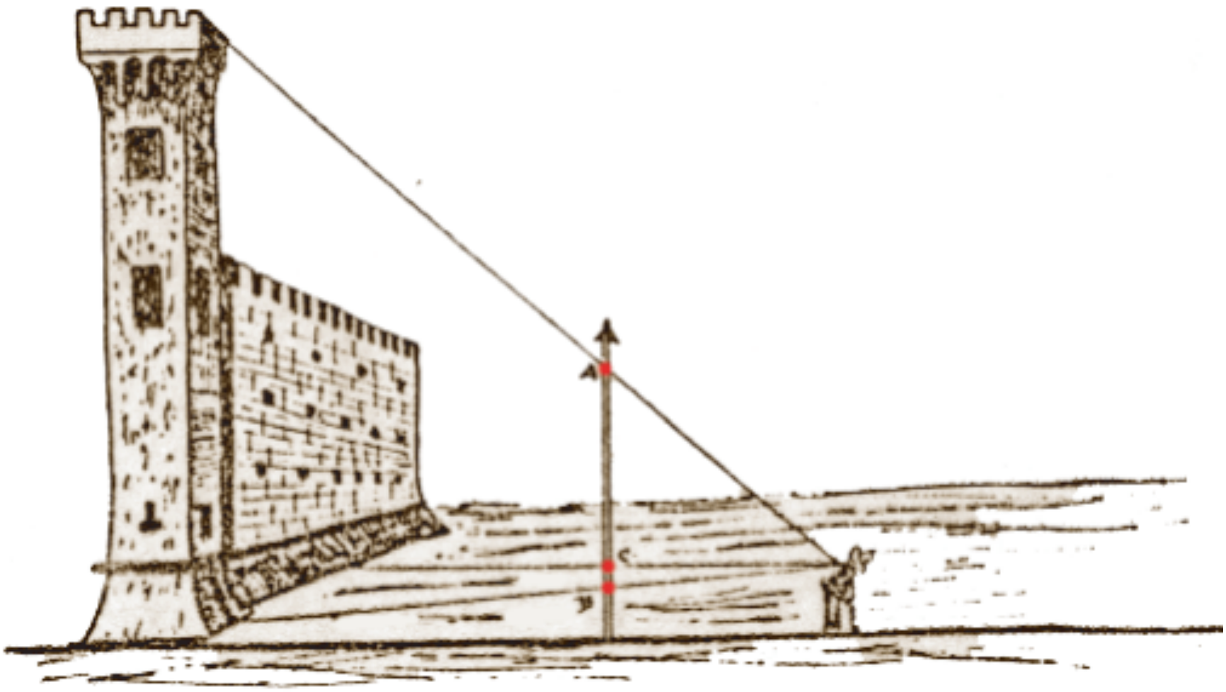
Cominciamo le nostre considerazioni sulle figure dal caso più semplice: quello nel quale lo sfondo è è una retta o un segmento. Più avanti considereremo il caso più interessante di figure piane.
Consideriamo la semplicissima figura seguente: ci sono tre punti A, B, C su un segmento (lo sfondo).

Come si può descrivere questa figura?
Potremmo semplicemente dire ci sono due punti vicini e uno lontano. Ma qual è la sua forma? Questo nome forma è fondamentale perché per noi sarà fondamentale capire cosa essa sia.
Prendiamo quest'altra figura: anche qui ci sono tre punti, sempre due vicini e uno lontano.

Ci si può chiedere se queste due figure hanno la stessa forma, e qui la forma sarebbe "due punti vicini e uno lontano". Ci si potrebbe però chiedere quanto "più vicino", quanto "più lontano"? Uno potrebbe incominciare con il mettere delle tacchette, una griglia unidimensionale, per dare una descrizione più precisa della figura, e fatte tutte le misurazioni dire "la distanza AB è nove volte la distanza tra BC". E questa è sicuramente un'informazione più precisa di "più vicino" o "più lontano" e se questo è anche vero per la seconda figura, cioè se anche A'B' è nove volte B'C' diciamo che le due figure hanno la stessa forma anche se la seconda è più piccola della prima.
Questo modo di considerare con la stessa forma le due figure precedenti è coerente con la geometria della visione, nel senso che esiste una particolare posizione O del punto di vista dalla quale le due figure sono viste uguali dato che sono colte dagli stessi raggi visivi.



Se immergo nel piano queste due figure su due rette parallele e congiungo A con A’, B con B’, C con C’ allora il fatto che il rapporto tra punti A,B,C (AB=9BC) è lo stesso di quello tra A’, B’, C’ (A’B’=9B’C’) è equivalente al fatto che i tre raggi convergono in uno stesso punto O. La proprietà che i tre punti della retta nera e i tre punti della retta rossa danno luogo a due figure con la stessa forma, implica che le due figure sono viste da O nello stesso modo.
Questo concetto di forma ha avuto ed ha grande importanza in tutta la storia della matematica antica, perché permetteva trasformare una figura, magari grandissima come quelle formate dalle stelle, in un’altra più piccola, ma con la *stessa forma* creando così una analogia (ana logos= stesso rapporto) tra la figura reale e quella analoga sulla quale era però possibile fare delle misurazioni.



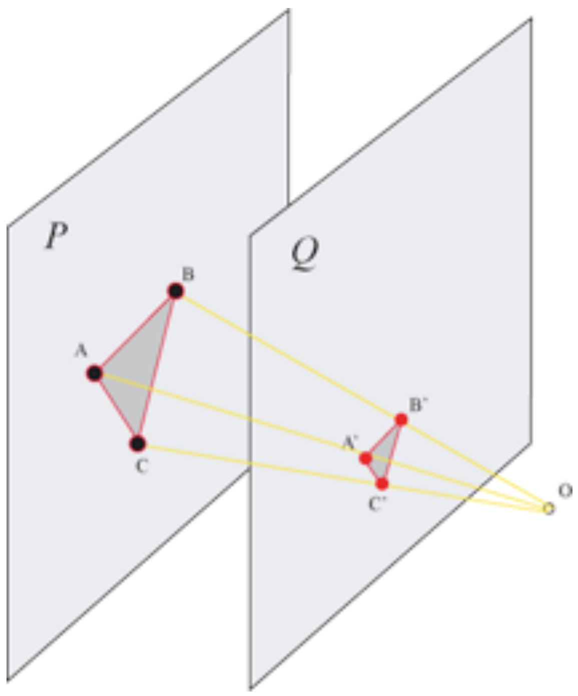
La torre è alta 9 volte l’altezza della porta proprio perché nella figura formata dai tre punti A,B,C, figura analoga alla torre, AB=9 BC. Possiamo dunque concludere che se la porta è alta 5 braccia la torre è alta 45 braccia.
Cosa vuol dire tutto questo? Vuol dire che si è creata un’ analogia tra un oggetto inaccessibile: la torre e un oggetto geometrico: il dardo. La corrispondenza puntuale ha “trasportato” la torre sul dardo e, sul dardo è possibile fare quelle misure che direttamente era impossibile eseguire, l’uguaglianza dei rapporti permette di trasferire queste misure sulla torre. Nello stesso modo possiamo rappresentare gli astri del cielo, inaccessibili ad ogni misura diretta, su un piccolo strumento; l’astrolabio che, per analogia, disegna la forma del cielo e dei suoi movimenti.

3. Figure piane

Passiamo da una dimensione a due dimensioni considerando figure che invece di avere come sfondo una retta hanno come sfondo un piano. Ma cosa sono questi piani? Dobbiamo pensare a un piano come un insieme di punti, come ad esempio lo schermo del computer. Lo schermo del computer è strutturato da un insieme di pixel, dei piccoli quadratini, 1024 in orizzontale e 768 in verticale a seconda della risoluzione scelta per la scheda grafica. Tali quadratini sono talmente piccoli che il l'occhio non li distingue e il tutto appare di un colore omogeneo. La figura è un sottoinsieme di pixel ognuno di un determinato colore che evidenzia, sullo schermo bianco del computer, o sullo sfondo scelto, una determinata immagine.

4.Proiezioni su piani paralleli

Supponiamo anche ora di avere nello spazio euclideo due piani paralleli ***P*** e ***Q***, pensati, come si è detto, come insieme di punti. Una figura del piano ***P*** sarà un sottoinsieme di punti di ***P***. Una trasformazione di ***P*** in ***Q*** è una applicazione tra i punti di ***P*** e quelli di ***Q***. Questo è un concetto fondamentale della matematica contemporanea su cui, in questo Laboratorio, rifletteremo lungamente. Se A,B,C è una figura del piano ***P***, una trasformazione di ***P*** in ***Q*** induce, ovviamente, una trasformazione della figura e il triangolo ABC si trasforma nel triangolo A'B'C' di ***Q***. Se supponiamo che, come nel caso precedente, la trasformazione sia una proiezione su piani paralleli ci possiamo chiedere quali proprietà abbia questa particolare trasformazione.



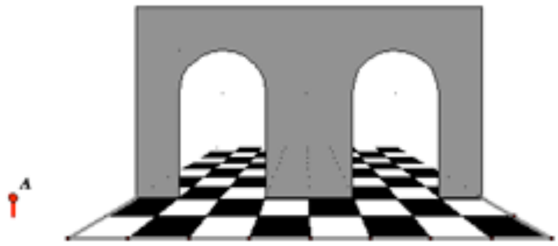
Una proprietà evidente è che se i punti A,B,C sono allineati le loro immagini A',B',C' restano allineate e questo perché se A,B,C sono su una retta i tre raggi AO, BO, CO sono su un piano che interseca ***Q*** in una retta sulla quale si trovano i punti A' , B', C'. Questa corrispondenza dunque conserva l'allineamento. Si vede poi abbastanza facilmente che conserva anche gli angoli. Come nel caso di figure rettilinee i due triangoli sono diversi ma hanno la stessa forma, sono simili. La proiezione su piani paralleli è una similitudine. Naturalmente nel caso dei triangoli è facile vedere quando due figure triangolari hanno la stessa forma, cioè quando sono simili: esistono vari criteri di facile applicazione (uguaglianza degli angoli corrispondenti, proporzionalità dei lati corrispondenti ecc.).

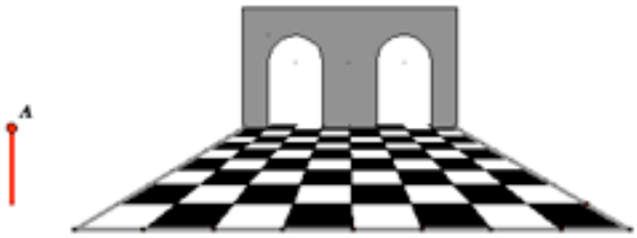
5. La *forma* di figure piane

In generale per figure più complicate come ad esempio per una figura umana posso ancora parlare di forma: posso ancora dire quando due figure hanno la stessa forma. Un modo potrebbe essere quello di decomporre le due figure in tante parti ad esempio segmenti e far corrispondere le parti dell'una alle parti dell'altra e richiedere che i rapporti tra le vari parti di una figura siano uguali ai rapporti tra le parti corrispondenti dell'altra. Dice Alberti per spiegare questo concetto

Vedi uno picciolo uomo certo proporzionale ad uno grande; imperò che medesima proporzione, dal palmo al passo e dal piè all'altre sue parti del corpo, fu in Evandro qual fu in Ercole, quale Aulo Gelio conietturava essere stato grande sopra agli altri uomini. Né simile fu nel corpo di Ercole proporzione altra che nei membri d'Anteo gigante, ove all'uno e all'altro si congiugneva con pari ragioni e ordini dalla mano al cubito e dal cubito al capo, e così poi ogni suo membro. Simile truovi ne' triangoli misura, per la quale il minore al maggiore sia, eccetto che nella grandezza, equale. E se qui bene sono inteso, istatuirò coi matematici quanto a noi s'apertenga, che ogni intercisione di qual sia, pure che sia equidistante dalla base, fa nuovo triangolo proporzionale a quello maggiore.

Alberti spiega con una similitudine il concetto di proporzione tra figure complesse. Evandro che era un uomo piccolo aveva un corpo *proporzionale* a quello di Ercole dato che i rapporti tra le varie parti del suo corpo erano gli stessi nelle due persone, ugualmente Ercole rispetto al gigante Anteo aveva un corpo piccolissimo ma con le stesse proporzioni. Ma la metafora mitologica serve ad Alberti per illustrare la formalizzazione matematica di questo concetto: se il triangolo A,B,C è la base di una piramide, ogni altro triangolo A' B' C' ottenuto intersecando la piramide con un piano equidistante dalla base (cioè parallelo alla base) avrà i lati nella medesima proporzione (AB:BC=A'B':B'C' , BC:CA=B'C':C'A' ecc).
L'idea per definire la forma di fugure complesse viene ancora dalla pittura e ancora una volta è quella di legare questo concetto alla geometria della visione. Due figure hanno la stessa forma se è possibile collocarle nello spazio in modo che, da un determinato punto, siano viste uguali cioè con lo stesso cono visivo.





Questa figura rappresenta lo stesso portico visto da vicino, nella figura a sinistra e visto da lontano in quella a destra. Un animazione interattiva (**Portico**), realizzata con Cinderella permette di allontanare il portico agendo col mouse sul punto A. Le due figure sono diverse ma hanno la stessa forma. I due portici sono ottenuti intersecando la stessa piramide visiva con due piani paralleli uno vicino all'occhio e l'altro lontano. Tutto questo, ovviamente è molto importante per il pittore perché se lui vuole disegnare un portico come questo lontano lo deve disegnare con gli stessi rapporti di quello vicino.
Abbiamo dunque due modi di vedere l'uguaglianza della forma di due figure piane: il primo consiste nel far corrispondere biunivocamente i punti dell'una nei punti dell'altra in modo che si conservino i rapporti il secondo consiste nel verificare se le due figure disposte su piani paralleli sono una proiezione dell'altra. Un importante teorema matematico stabilisce che questi due modi di

vedere la forma sono equivalenti cioè due figure piane hanno la stessa forma nel senso delle proporzioni se e solo se l'hanno nel senso delle proiezioni.

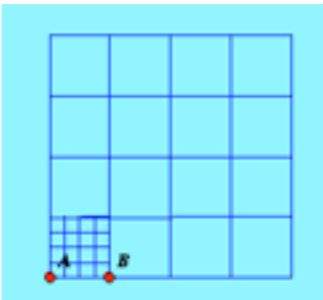
6. Similitudini tra piani

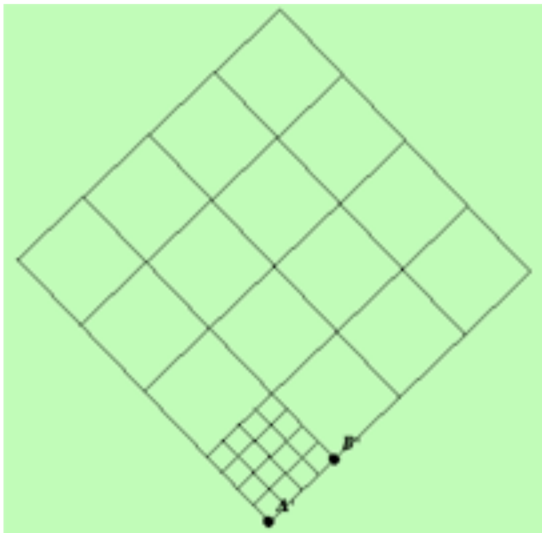
Il modo matematico per formalizzare questi concetti e poter quindi articolare delle dimostrazioni rigorose consiste nell'introdurre il concetto astratto di *similitudine tra due piani*. dati due piano ***P*** e ***Q*** una similitudine di ***P*** in ***Q*** è una trasformazione f dei punti di ***P*** nei punti di ***Q***

$$f: \boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$$

che sia biunivoca e conservi l'allineamento e gli angoli. Una figura del piano ***P*** sarà simile a una figura del piano ***Q*** (cosa che equivale a dire che le due figure hanno la stessa forma) se esiste una similitudine di ***P*** in ***Q*** che trasforma una figura nell'altra.

Sulle similitudini come su altre trasformazioni puntuali esiste un *teorema* detto *fondamentale*, un teorema di estensione. Il teorema dice la cosa seguente: ho una trasformazione biunivoca di un piano ***P*** (il piano azzurro della figura) nel piano ***Q*** (il piano verde), che supponiamo conservi l'allineamento, gli angoli e l'orientazione. Ora se di questa trasformazione conosco l'immagine di soli due punti, posso ricostruire la trasformazione di tutti gli altri punti del piano ***P***.





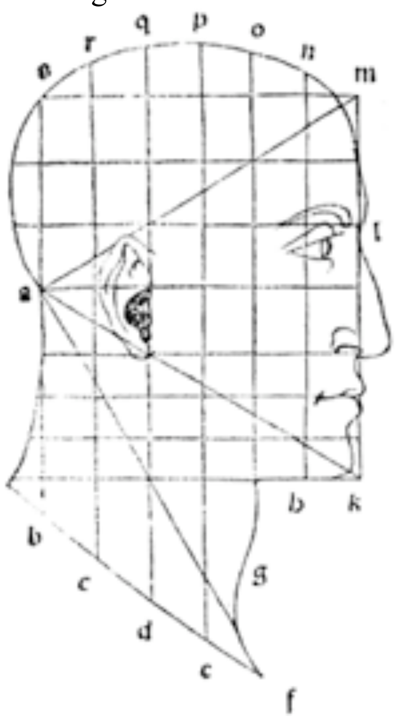
E come facciamo?

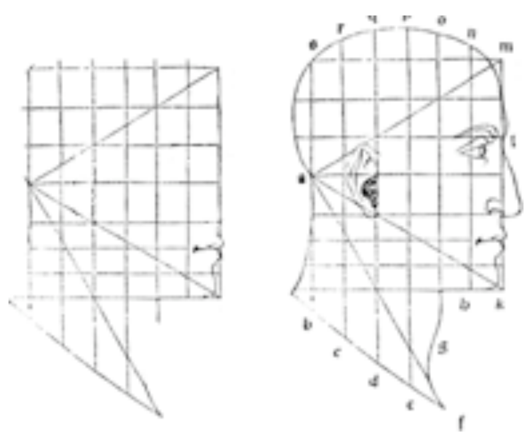
Supponiamo di conoscere l'immagine A' di A e B' di B. Dato che la trasformazione mantiene l'allineamento la retta AB deve andare nella retta A'B' e dato che conserva gli angoli e l'orientamento la retta perpendicolare ad AB in senso antiorario si dovrà trasformare nella retta perpendicolare ad A'B' in senso antiorario. Dato poi che la trasformazione è biunivoca rette che non si intersecano (cioè parallele) si devono trasformare in rette che non si intersecano (cioè parallele) e dunque la retta per B perpendicolare ad AB che passa per B deve trasformarsi nella retta perpendicolare ad A'B' per B'. Ugualmente la diagonale inclinata di 45° deve trasformarsi nella diagonale e in definitiva tutta la griglia deve trasformarsi nella corrispondente griglia. Poiché la griglia può essere arbitrariamente infittita possimo determinare l'immagine di ogni punto di ***P*** a partire dai punti A e B.

L'animazione interattiva (**Similitudine**) permette di spostare i punto A' e B' con il mouse e vedere come cambia di conseguenza la griglia.

L'importanza di questo teorema consiste nel fatto che possiamo ricostruire delle figure a partire da pochi dettagli (due soli punti) se sappiamo che la figura da ricostruire è simile ad un originale noto.

Conosciamo la figura originale[2] e un pezzo della bocca e del mento della figura da ricostruire. Il lavoro dell’archeologo consiste nel ricostruire l’intera figura utilizzando solo l’ipotesi plausibile che la figura sia simile al suo prototipo. L’idea per ricostruire la figura è quella di costruire una griglia su entrambe le figure.



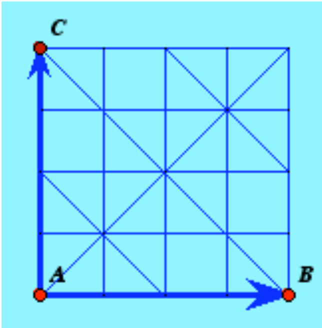


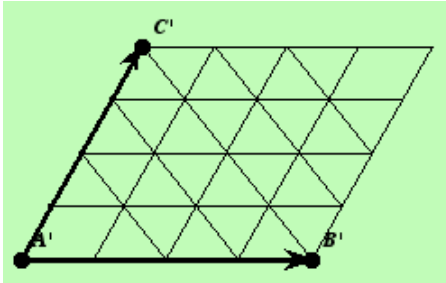
Le due figure sono simili;una più grande e l’altra più piccola secondo un determinato rapporto di scala. Posso ricostruire l’una a partire dall’altra usando un dettaglio e ricostruendo prima di tutto lo sfondo e poi tramite la griglia la figura.

[2] Il viso è preso dalla *Divina proporzione* di Luca Pacioli

7. Trasformazioni affini

Le trasformazioni che consideriamo ora sono trasformazioni biunivoche di un piano ***P*** in un piano ***Q*** che conservano l'allineamento ma non necessariamente gli angoli: tali trasformazioni si chiamano *affinità*. Anche in questo caso esiste un *teorema fondamentale*: dati tre punti A,B,C non allineati del piano ***P*** e date le loro immagini A',B',C' del piano ***Q*** c'è un'unica trasformazione di ***P*** in ***Q*** biunivoca e che conserva l'allineamento. La dimostrazione è nella sostanza uguale a quella data per le similitudini e passa attraverso la costruzione di una griglia sempre più fitta.





L'animazione interattiva (**Affinità**) permette di spostare i punto A' B' e C' con il mouse e vedere come cambia di conseguenza la griglia e quindi l'affinità.

Queste immagini provengono dagli studi di un importante biologo del XIX secolo D'Archy Tompson

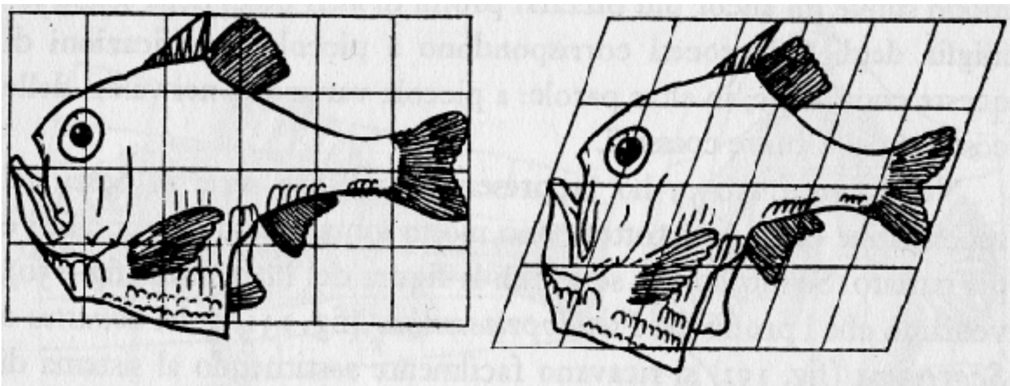
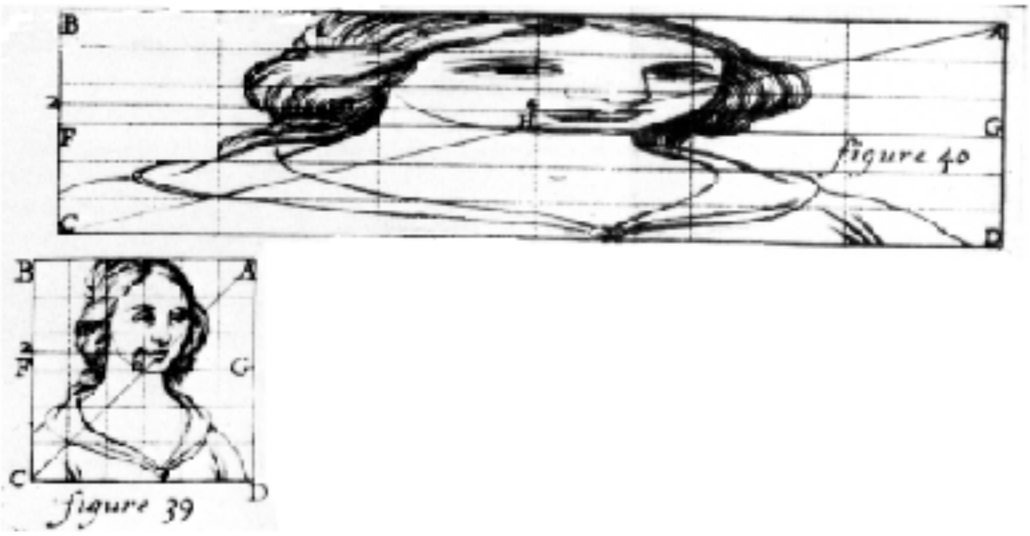


Fig. 146. *Argyropelecus olfersi.* Fig. 147. *Sternoptyx diaphana.*

Il secondo pesce è ottenuto dal primo operando un'affinità. Si può ipotizzare che la forma del secondo pesce derivi per effetto di una trasformazione affine che modifica l'ambiente (cioè lo sfondo) dove il pesce si sviluppa .



Qui abbiamo un altro esempio legato alla pittura: è uno studio di Huret, un pittore del XVII secolo che ha analizzato come cambia una immagine operando determinate trasformazioni sullo sfondo dove la figura viene tracciata. In questo caso si tratta di una affinità che dilata la dimensione orizzontale senza alterare quella verticale.

In informatica le similitudini vengono utilizzate nei font per cambiare la grandezza di una lettera. Nella figura seguente abbiamo preso la lettera A del font Times a diversi punti 20, 48, 72 rispettivamente

A A A

In questa figura abbiamo trasformato in corsivo le medesime lettere

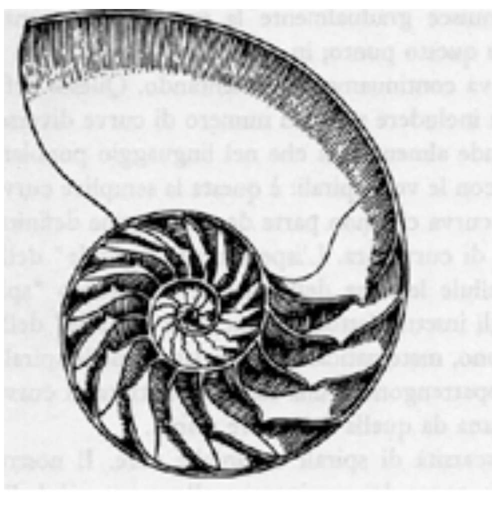
A A A

come si vede la trasformazione che fa passare da una lettera alla stessa lettera in corsivo è una affinità

Vediamo la genesi di una conchiglia: partiamo da una forma minima di materia, un triangolino ad esempio. Costruiamo un secondo triangolo simile al primo che si appoggia sulla sua ipotenusa e proseguiamo nello stesso modo.

Tutti questi triangoli hanno la stessa forma ma crescono progressivamente, e questo è legato al principio biologico che un individuo crescendo mantiene sostanzialmente la stessa forma. Un bambino ha la stessa forma dell'adulto, solo che è più piccolo.
Andando avanti a costruire quest'oggetto si arriva ad una forma molto bella, la spirale logaritmica studiata fin dall'antichità da Archimede e che si ritrova in molte strutture naturali.

La figura animata (**Spirale**) permette di modificare la forma della spirale modificando con Mouse la posizione di alcuni punti. La figura seguente rappresenta invece la conchiglia del *Nautilus pompilius*.



Un'altra applicazione più moderna delle similitudini interviene nella così detta *foglia di felce*. Questa foglia che ha una forma molto complessa non viene descritta *per scansione*, dando cioè il colore di tutti i pixsel della figura, ma viene descritta attraverso un processo generatore analogo a quello che genera la conchiglia. Si parte ancora da una figura elementare F_0 molto piccola, ad esempio un quadrato. Si trasforma poi questo quadrato mediante quattro trasformazioni affini ottenendo una nuova figura F_1 formata da quattro pezzi. Si ripete la stessa operazione su F_1 orrenendo la figura F_2 formata da 8 pezzi. Si itera il procedimento. Nelle figure seguenti abbiamo riportato i primi cinque passi

Dopo 27 passi si trova la seguente figura

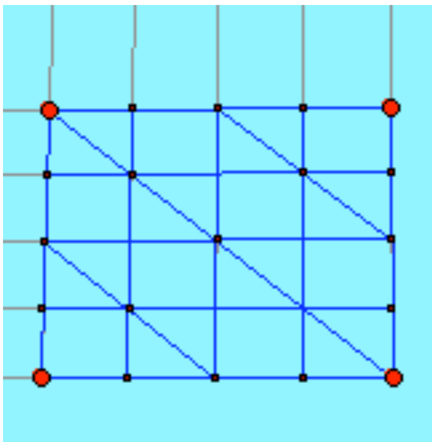
Se partiamo invece che da un quadrato da un punto e iteriamo il processo per 20.000 volte otteniamo la figura nera sulla destra. Un applett Java (**Felce**) permette di vedere come si genera la forma della foglia nei due casi e di scegliere il numero di iterazioni.
Le quattro trasformazioni (una similitudine, due affinità e una proiezione) che realizzano la foglia di felce, trovate negli anni 70 dal matematico americano Barnsley, sono definite da queste equazioni

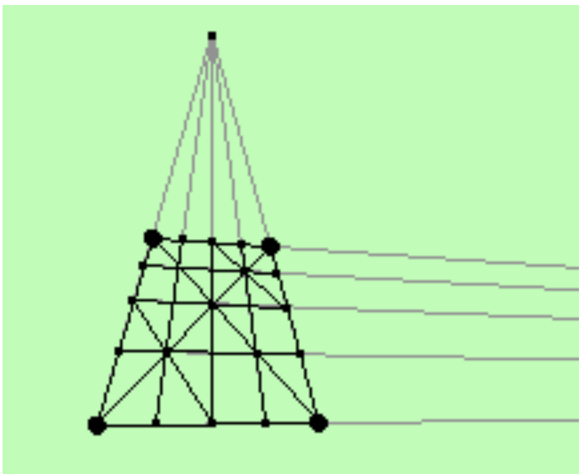
$$\begin{cases} u = 0.85x + 0.04y + 0.075 \\ v = -0.04x + 0.85y + 1.6 \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0.2x + 0.26y + 0.408 \\ v = 0.23x + 0.22y + 1.0 \end{cases} \quad \begin{cases} u = -0.15x - 0.28y + 0.57 \\ v = 0.264x + 0.24y + 0.44 \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0 \\ v = 0.16y \end{cases}$$

Sono equazioni di primo grado non difficili da studiare se si possiede una buona tecnica algebrica. La foglia di felce, ottenuta in questo modo è una forma definita a partire da un processo che la genera. Ciò significa che se si deve trasmettere questa immagine attraverso una informazione codificata non occorre dare di ciascun pixel il suo colore (vi sono 1024x768=786.432 pixsel sullo schermo di un computer) dando così un'informazione formata da quasi 800.000 unità di informazione, basterà dare il processo generatore cioè i 20 numeri che definiscono le quattro trasformazioni e il punto iniziale.
Un'immagine quindi in informatica è generalmente un oggetto pesante perché occorrono molti numeri per descriverle e, di conseguenza, molto tempo per trasmetterlo. La possibilità invece di definire la forma attraverso un processo con cui essa si genera, come di fatto avviene in natura, permetterebbe una compressine dell'immagine di grande efficacia. Purtroppo le ricerche in questo settore sono solo all'inizio e, a parte la foglia di felce vi sono per ora poche strutture descritte con queste tecniche.

8. Trasformazioni proiettive

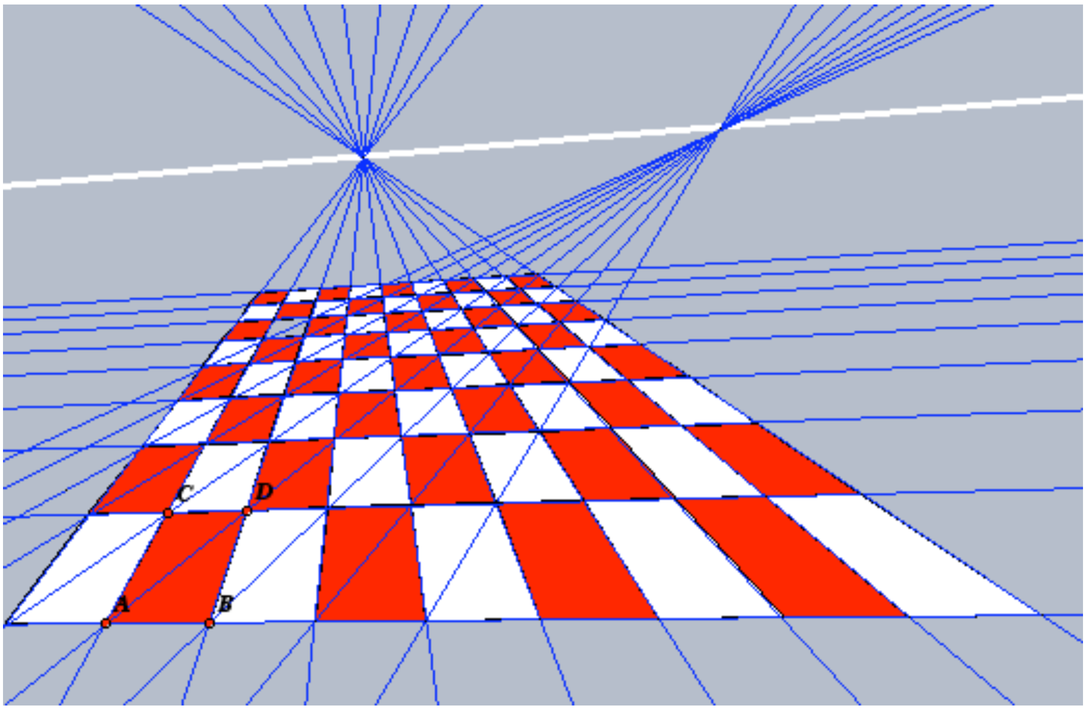
L'ultima trasformazione che considereremo nei dettagli in questo laboratorio è quella che conserva l'allineamento ma è biunivoca solo localmente. Queste trasformazioni non conservano il parallelismo ma trasformano fasci di rette parallele in fasci di rette convergenti. Si chiamano proiettività. Anche per loro c'è un *teorema fondamentale*. Secondo questo teorema ci vogliono quattro punti per individuare univocamente una proiettività: le griglie si trasformano nel modo indicato dalla figura seguente





Queste trasformazioni sono molto utili in pittura: la visione conserva l'allineamento e non gli angoli. L'animazione interattiva (**Proiettività**) permette di spostare i punto A', B', C', D' con il mouse e vedere come cambia di conseguenza la griglia.

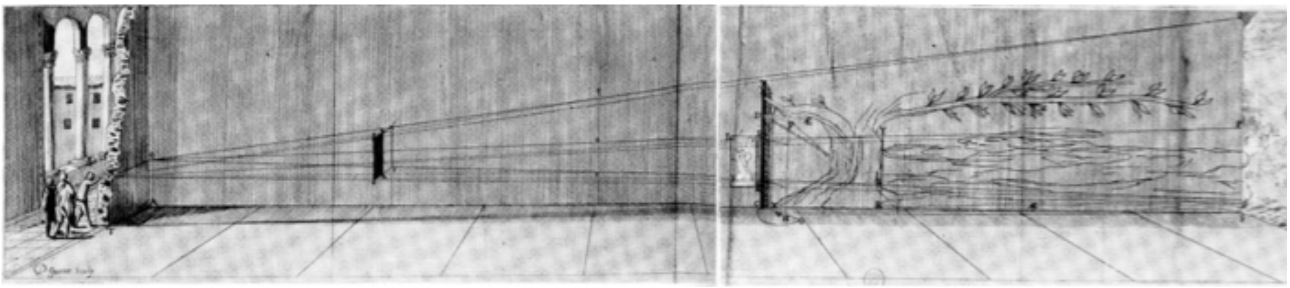
In questa nuova animazione (**Mattonato**) è possibile modificare i punti A,B,C,D e vedere come, di conseguenza, canbia l'immagine prospettica di un piano mattonato con mattonelle quadrate rosse e bianche.



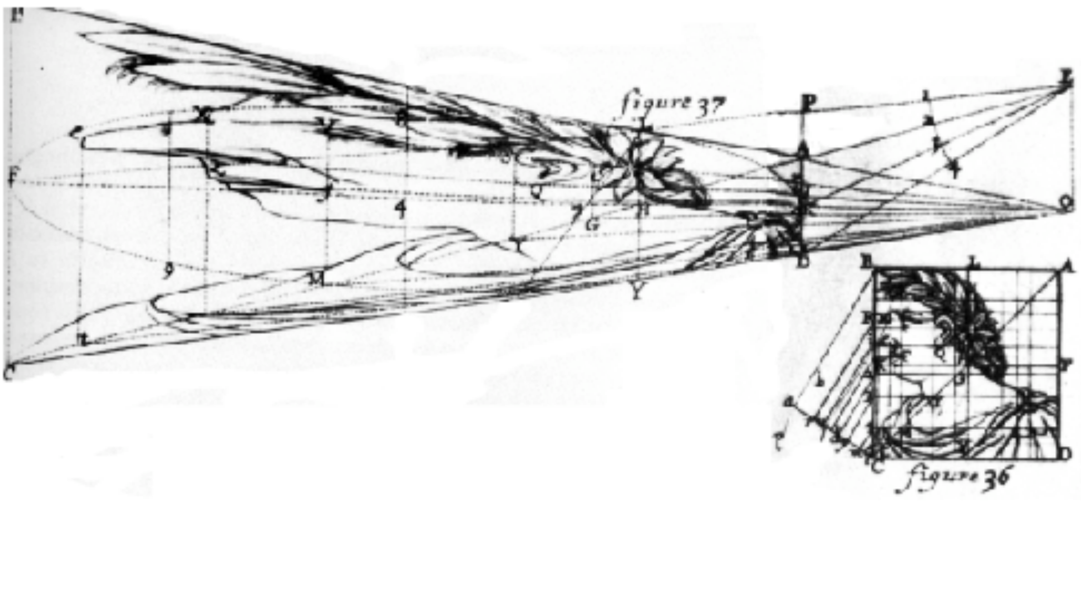
Le trasformazioni proiettive sono state usate dai pittori in vari modi. Un esempio di straordinaria efficacia e una *anamorfosi* che si trova a Roma a piazza di Spagna realizzata dal pittore francese .... nel XVII secolo. Questo affresco ha questa particolarità: è disegnato su una parete molto lunga, un corridoio, se si guarda l'affresco di fronte lo stretto di Messina con il mare, le navi, il porto e le colline limitrofeUna grande pianta che incornicia la pittura.

Se invece si guarda la pittura di sbieco dall'inizio del corridoio le cose cambiano, si vede la faccia di un santo: il santo protettore di Messina. Si vedono le mani giunte che pregano, la croce che è messa.

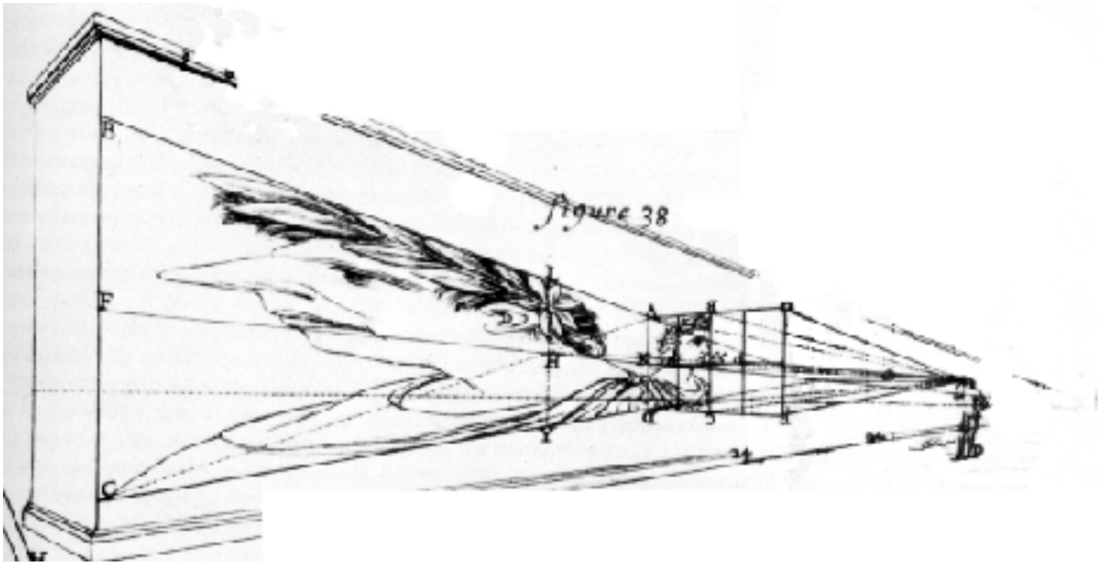
Questo non è un miracolo o magia. Quest'opera è resa possibile da una precisa teoria matematica che si basa sulla geometria delle trasformazioni puntuali.



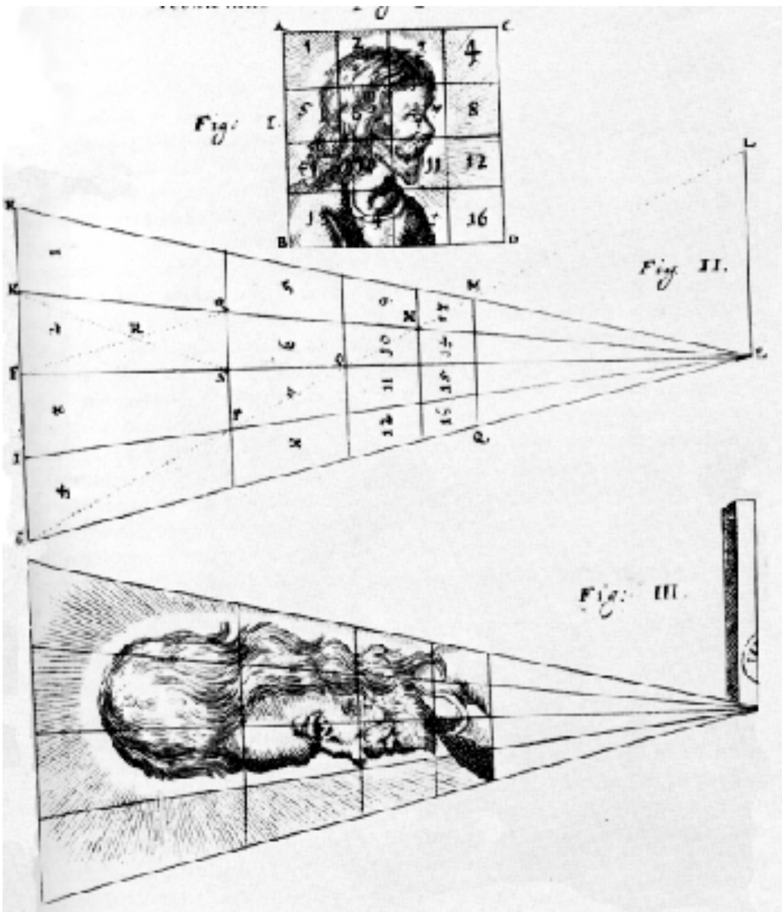
In questo affresco si vuole significare un fatto profondamente mistico cioè l'unità intrinseca tra il santo e la sua terra: la distinzione dipende dalla necessità di scegliere un punto di vista. Ma c'è anche la sorpresa di vedere come la stessa immagine cambi completamente il so significato cambiando punto di vista. Nel periodo barocco questi studi erano molto sviluppati.

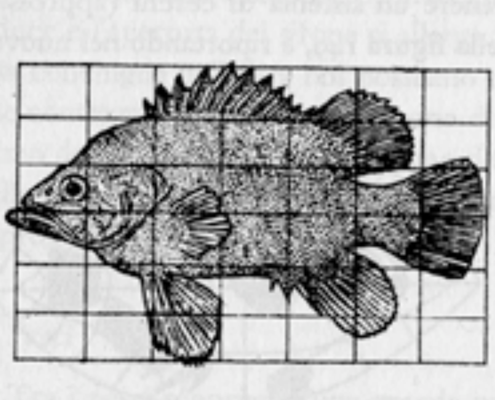


Qui invece c’è lo studio di una anamorfosi di un console romano il cui ritratto viene deformato con una trasformazione proiettiva.



Se la figura deforme viene disegnata su una parete e se la parete è vista di fronte il console appare orrendo con un naso lunghissimo e un viso mostruoso, ma se si guarda la parete di sbieco la figura del console si ricompone in tutta la sua bellezza. In questo studio viene mostrata la tecnica geometrica per realizzare una anamorfosi.





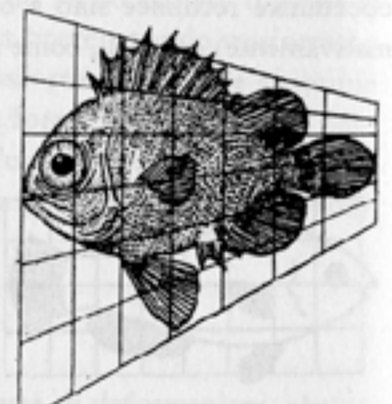


Fig. 150. *Polyprion.* Fig. 151. *Pseudopriacanthus altus.*

Questi disegni si riferiscono ancora agli studi di D'Archy Tomson sulla forma dei pesci: in questo caso la trasformazione considerata assomiglia ad una proiettività.

9. Diffeomerfismi

Le ultime trasformazioni di cui parliamo sono quelle più complicate, ma dal punto di vista della ricerca matematica contemporanea sono le più interessanti. Si chiamano diffeomorfismi e possiamo descriverli geometricamente facendo vedere come trasformano una griglia di quadrati. Queste trasformazioni non conservano l'allineamento hanno solo delle proprietà di regolarità relative alle funzioni che le definiscono

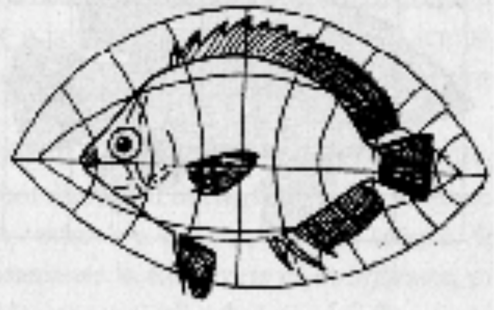


Fig. 148. *Scarus.* Fig. 149. *Pomacanthus.*

Sia le linee orizzontali che le verticali si trasformano in archi. Osserviamo tuttavia che gli angoli tra le curve della griglia della seconda figura restano angoli retti. Questa trasformazione conserva gli angoli ma non l'allineamento. Trasformazioni di questo tipo sono molto importanti sia in matematica che in fisica: si chiamano *trasformazioni conformi*. Il loro studio è piuttosto complicato e richiede strumenti matematici avanzati.

Un altro esempio di diffeomorfismo sempre ricavato dagli studio sui pesci

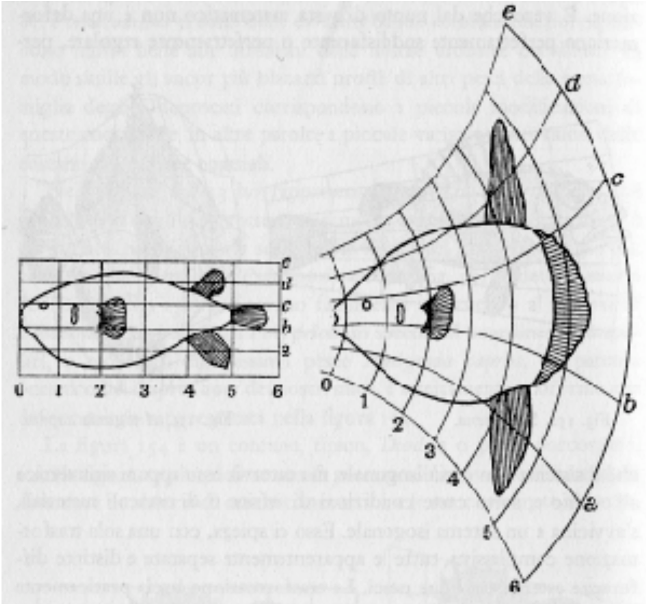


Fig. 154. Diodon. Fig. 155. Orthagoriscus.

Lo studio di questi diffeomorfismi non solo tra parti di piano, ma anche tra parti di una superficie ad esempio la sfera, sono degli studi molto importanti per la ricerca matematica degli ultimi cinquanta anni. In questo caso Thompson usa i diffeomerfismi per lo studio dell'evoluzione dell'uomo.

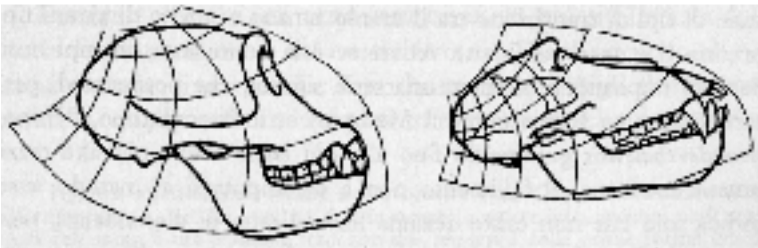
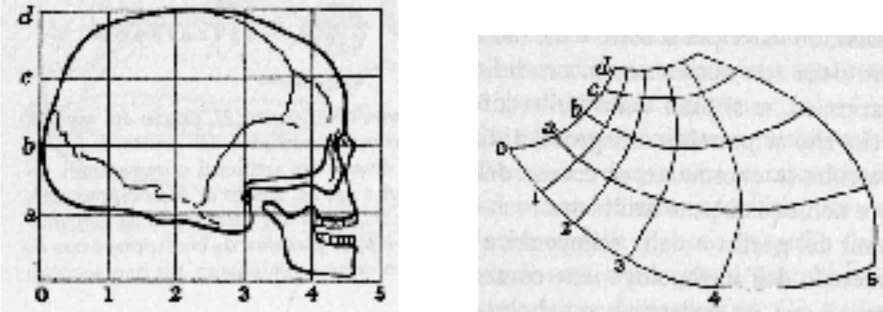


Fig. 179. Cranio di scimpanzé. Fig. 180. Cranio di babbuino.

Nel passaggio dal babbuino allo scimpanzè la regione che comprende le zanne e la mascella si è molto ridotta mentre la regione che comprende la scatola cranica si è molto ingrandita. Il processo inverso che porta dal cranio dell'omo sapiens allo scimpanzé è descritto dal seguente diffeomerfismo



L'evoluzione dell'uomo sviluppa la parte che racchiude il cervello che diventa sempre più importante mentre quella destinata a sbranare la preda diventa sempre più piccola. Nello stesso modo mi auguro che voi diate più importanza a quella parte del vostro corpo dove hanno sede le immagini mentali ed i vostri pensieri, rispetto a quest'altra parte che l'evoluzione ha rimpicciolito sempre più e che cerchiate di sviluppare la vostra intelligenza anche con lo studio della matematica, avendo fiducia nelle vostre capacità mentali e nel vostro spirito creativo.