<u>Scheda di lavoro n. 8</u>

La trasformazione del fornaio

La trasformazione dell'intervallo [0,1] in sé definita ponendo:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n, & x_n < 1/2 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1, & x_n > 1/2 \end{cases}$$

prende il nome di spostamento di Bernoulli. Possiamo anche scrivere:

$$x_{n+1} = 2x_n (\mathrm{mod}1)$$

<u>Proposta di lavoro</u> – 1

1. Utilizzando il sistema binario, per cui un numero compreso tra 0 e 1 può essere scritto come $x = \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{4} + \frac{n_3}{8} + \frac{n_4}{16} + \ldots$, dove gli n_i valgono 0 o 1, scrivere l'espansione binaria di *0,13*.
2. Dati due numeri che differiscono di pochissimo, per esempio a partire dalla quarantesima cifra binaria $\left(\frac{n_{40}}{2^{40}} \right)$, mostrare che dopo 40 iterazioni dello spostamento di Bernoulli questi numeri differiranno di $\frac{1}{2}$.
3. Mostrare che lo spostamento di Bernoulli non è invertibile.

La trasformazione

$$\begin{cases} (x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(2x_n, \frac{y_n}{2} \right), & x_n < \frac{1}{2} \\ (x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(2x_n - 1, \frac{y_n + 1}{2} \right), & x_n > \frac{1}{2} \end{cases}$$

è detta trasformazione del fornaio, in quanto procede ad una successione di piegamenti e stiramenti che ricorda la realizzazione di un impasto.

<u>Proposta di lavoro</u> – 2

1. Mostrare che la trasformazione del fornaio è invertibile.
2. Mostrare con un esempio numerico, come nel caso dello spostamento di Bernoulli, che iterando la trasformazione del fornaio due punti vicinissimi finiscono con l'allontanarsi.