3°
La funzione logistica

L'applicazione della matematica allo studio di popolazioni biologiche vede il suo esordio con la teoria di Thomas Malthus, secondo il quale la crescita di una popolazione è proporzionale al numero degli individui che la costituiscono.
Questa ipotesi prevede che la popolazione si accresca all'infinito; ad esempio, la velocità di crescita media della popolazione umana nella prima metà del '900 è stata del 2,5% circa all'anno. La legge di Malthus è alquanto irrealistica prevedendo una crescita illimitata tendente all'infinito, in quanto questa eventualità non potrebbe mai verificarsi per questioni di sopravvivenza che impedirebbero la crescita stessa. Tuttavia, in condizioni normali, finchè la popolazione è lontana dall'esaurire le risorse a disposizione, la statistica accetta per buona la crescita di una popolazione secondo la legge di Malthus.

$y(n+1) = r\,y(n)$, dove r è il coefficiente che indica la capacità riproduttiva della specie

E' stato detto che il modello malthusiano è poco realistico in quanto essendo le risorse ambientali limitate, se il numero di individui aumenta si riduce la disponibilità di cibo e si ha una competizione fra gli individui che tende a diminuire la capacità riproduttiva effettiva. Introduciamo allora un fattore sociale c detto coefficiente di competizione che influirà su $y(n)$. La capacità riproduttiva sarà ridotta di una quantità $cy(n)$, per cui il coefficiente di riproduzione r ne risulterà modificato e diventerà $r(1 - c\,y(n))$. L'equazione diventa:

$$y(n+1) = r(1 - cy(n))y(n) = ry(n) - rcy(n)^2$$

Semplifichiamo il problema considerando il coefficiente di competizione costante. Allora possiamo introdurre una nuova variabile $x(n) = cy(n)$ che praticamente incorpora c nello stato del sistema. Sostituendo ad ambo i membri avremo:

$$x(n+1) = rx(n) - rx(n)^2$$

E' questa un'equazione alle differenze la cui mappa ricorsiva non lineare, detta *mappa logistica*, è una legge deterministica che regola l'evoluzione nel tempo di un sistema dinamico non lineare: essa, per un dato r, genera, a partire dallo stato iniziale $x(0)$, la successione degli stati $x(n)$.

Trovare gli stati di equilibrio del sistema dinamico significa studiare l'andamento asintotico delle iterate:

$$y=r(1-x)x$$

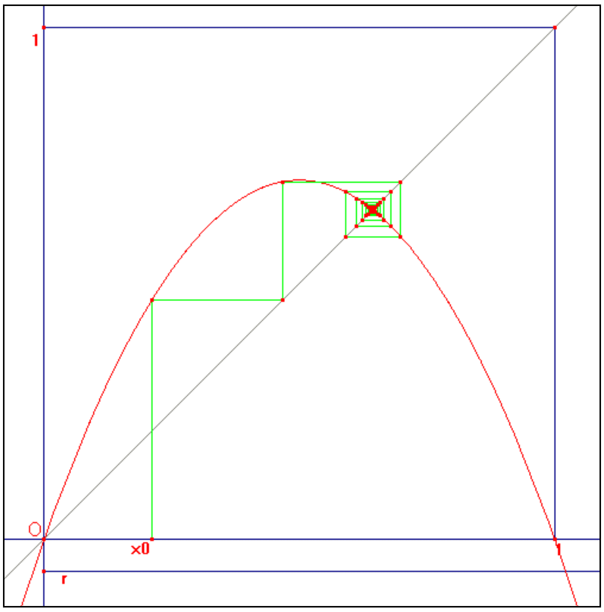
ossia determinare gli eventuali punti fissi delle reiterazioni.

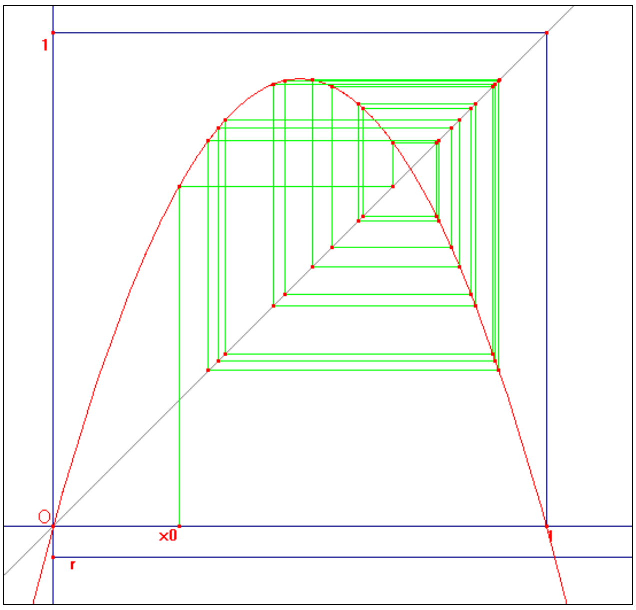
Scheda di lavoro 5

Scheda di lavoro 6

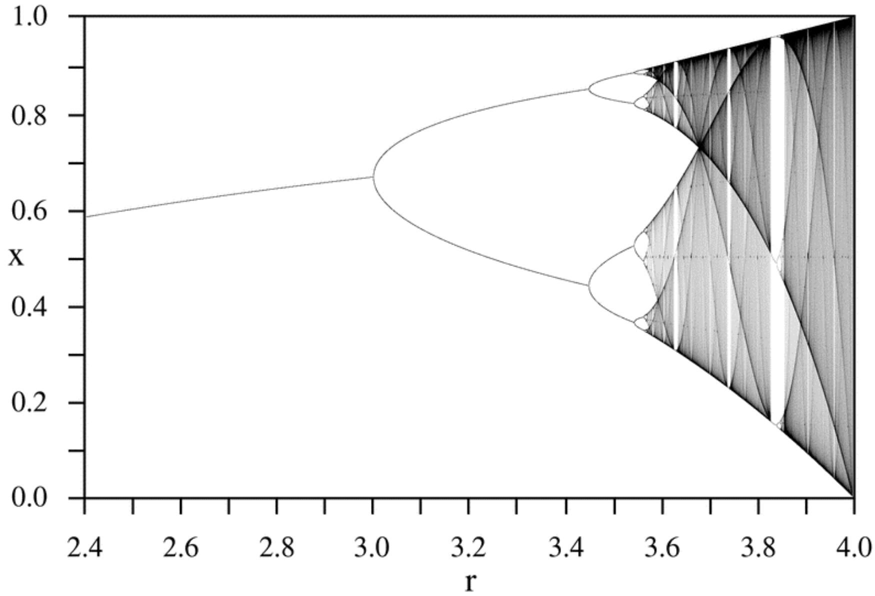
Scheda di lavoro 7

Le immagini seguenti rappresentano i risultati delle elaborazioni delle schede nei casi $2<r<3$ e $r>3$.





Le traiettorie, da un certo valore limite in poi, non sono più periodiche. Per rappresentare il comportamento con differenti fattori riproduttivi, si può ricorrere ad un *diagramma di biforcazione* in grado di visualizzare tutta l'informazione. Serviamoci di un sistema di riferimento cartesiano dove sull'asse delle ascisse poniamo i valori di r, mentre sull'asse delle ordinate facciamo corrispondere i valori di x(n), per n molto grande, rappresentativi dell'attrattore di turno.



Una delle caratteristiche delle traiettorie caotiche è la difficoltà di ottenerne due uguali. In linea di principio, date le stesse condizioni iniziali, le traiettorie dovrebbero essere identiche, questo è l'assunto fondamentale della teoria dell'evoluzione dinamica di un sistema secondo la meccanica classica. Inoltre, perché l'evoluzione di un sistema sia effettivamente predicabile, occorrerebbe che se le condizioni iniziali differiscono di poco, anche le traiettorie si discostino di poco. Negli andamenti caotici questo non si verifica affatto, piccole differenze delle condizioni iniziali non danno piccole differenze di evoluzione, ma addirittura dopo un certo numero di iterazioni generano traiettorie che si discostano completamente. Questo fenomeno si chiama "sensibilità alle condizioni iniziali" ed è una condizione che unitamente alle condizioni per cui le traiettorie devono essere densamente distribuite e devono esistere infiniti punti repulsivi caratterizza il *caos deterministico.*