# 2°

# Successioni iterative reali

## Definizione di successione iterativa reale

Una successione $a_n$ si dice iterativa se esiste una funzione *f* tale che $\forall n \in \aleph \;\; a_{n+1} = f(a_n)$. Se si assegnano un valore iniziale $\alpha$ e una funzione *f*, per il principio di induzione non può esistere più di una successione tale che

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

Una condizione di esistenza oltre che di unicità della successione iterativa è che *f* trasformi il suo dominio A in se stesso e che $\alpha$ appartenga a tale dominio.
Studieremo casi in cui $A \subseteq \Re$ .

<u>Esempio</u>. La funzione

$$x \longrightarrow x^2$$

può essere reiterata come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 \\ x_1 = x_0^2 \end{cases}$$

La successione $x_n$ è evidentemente iterativa.

E' interessante rappresentare graficamente l'iterazione di una funzione. Per far ciò si può seguire il seguente procedimento: si scelga un punto sull'asse x, detto $a_0$; da $a_0$ andiamo ad $a_1$, che è l'ordinata della funzione cioè $a_1 = f(a_0)$. Si tracci ora la bisettrice del 1° e 3° quadrante *y=x* e dal punto *($a_0$,$a_1$)* si conduca la parallela all'asse *x*, fino ad incontrare la bisettrice, tale punto di intersezione avrà coordinate $(a_1, a_1)$. Ad $a_1$ applichiamo di nuovo la *f* trovando così il punto $a_2$. Reiterando il procedimento, otteniamo il punto $(a_2, a_2)$ dal quale si costruisce $a_3$ e così via.

Se si eliminano le proiezioni superflue si otterrà un disegno più pulito e dunque più eloquente, il quale prende il nome di *mappa ricorsiva*.

Si propongono di seguito due schede di lavoro: la prima introduce il concetto di successione e dunque ha come obiettivo la familiarizzazione con l'idea di limite e di andamento asintotico; la seconda propone la costruzione della mappa ricorsiva lineare ossia la rappresentazione grafica dell'iterazione della funzione y =α x al variare di α.

Ulteriori schede di lavoro possono essere formulate proponendo:

- L'iterazione della funzione $y = \alpha x + b$ al variare di α
- L'iterazione della funzione $x \longrightarrow \sqrt{x}$

***Scheda di lavoro 1***

***Scheda di lavoro 2***

## Alcuni algoritmi iterativi particolari

*1° - <u>Calcolo della radice quadrata con il metodo di Erone</u>*

Data la funzione

$$x \longrightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{x}\right)$$

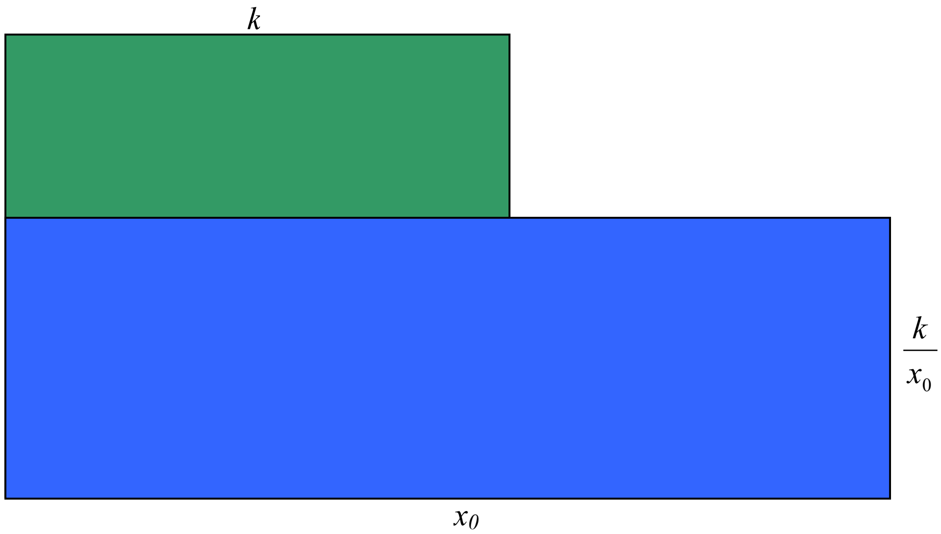
la sua mappa ricorsiva mostra una convergenzaa a $\sqrt{k}$.

Per conoscere la radice quadrata di un numero *x* la maggior parte delle volte si fa ricorso ad una calcolatrice o, per un valore approssimato, si procede a mente, eventualmente controllando poi il risultato con una moltiplicazione. Difficilmente si usa l'antico algoritmo, noto con il nome di Tolomeo (che inizia suddividendo il numero in gruppi di due cifre a partire da destra).

Un'alternativa più intuitiva a questo procedimento è data dall'algoritmo di Erone, un metodo meno noto didatticamente ma più efficace di quello di Tolomeo. Esso usato in tutte le calcolatrici e nei linguaggi di programmazione.

**Passo 0**. Partiamo da un qualsiasi numero positivo $x_0 > \sqrt{k}$ .

Costruiamo il rettangolo avente i lati che misurano $x_0$ e $\frac{k}{x_0}$. L'area di questo rettangolo è $x_0 \cdot \frac{k}{x_0} = k$ , cioè è uguale all'area del quadrato che cerchiamo. I lati del rettangolo sono uno minore e l'altro maggiore del lato del quadrato. La figura seguente rappresenta la situazione.




**Passo 1**. Calcoliamo la media aritmetica delle misure dei due lati del rettangolo, otteniamo un valore $x_1 = \frac{x_0 + \frac{k}{x_0}}{2}$, dove $x_1$ è sicuramente minore di $x_0$.

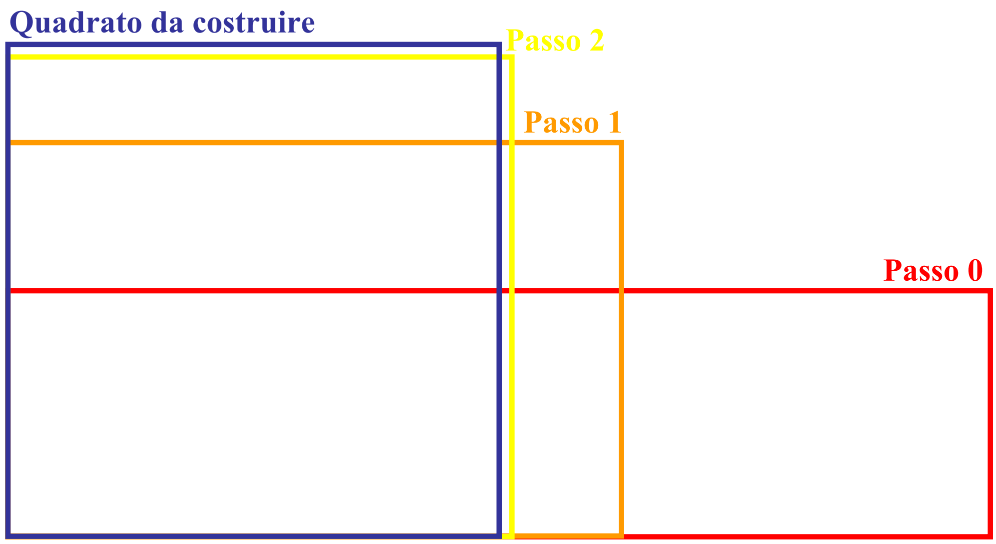
Costruiamo un nuovo rettangolo i cui lati misurano $x_1$ e $\frac{k}{x_1}$. L'area del rettangolo è $x_1 \cdot \frac{k}{x_1} = k$ , cioè di nuovo uguale a quella del quadrato che stiamo cercando di costruire. Il numero $x_1$ è un valore approssimato per eccesso del lato del quadrato, mentre $\frac{k}{x_1}$ è un valore approssimato per difetto.

La media aritmetica delle due approssimazioni precedenti ha fornito un valore $x_1$ più vicino a $k$ di quanto fosse $x_0$.

**Passo 2**. Calcolando nuovamente la media aritmetica delle misure dei due lati del rettangolo ottenuti al passo precedente. Stavolta otteniamo $x_2 = \dfrac{x_1 + \dfrac{k}{x_1}}{2}$, con $x_2$ minore di $x_1$ e maggiore di $k$.

Costruiamo il rettangolo i cui lati misurano $x_2$ e $\dfrac{k}{x_2}$, la cui area è sempre uguale a $k$. Si ottengono di nuovo un valore approssimato per eccesso e uno per difetto del lato del quadrato. Il valore di $x_2$ è più vicino a $k$ di quanto lo fosse $x_1$.

Iterando questo procedimento otteniamo due successioni numeriche che approssimano, una per eccesso e una per difetto, il valore $\sqrt{k}$ che stiamo cercando.
La figura in basso riassume graficamente il procedimento.




La scheda di lavoro n. 3 porpone un'esercitazione di laboratorio che ha come obiettivo il calcolo ella radice quadrata di un numero attraverso l'algoritmo di Erone.

***Scheda di lavoro 3***

*2° - La congettura di Syracuse*

La trasformazione f che consideriamo va dall'insieme N dei numeri naturali in sé stesso. Si tratta pertanto di un'applicazione a valori discreti per la quale consideriamo due casi:

- Se n è pari allora $f(n) = \frac{n}{2}$

- Se n è dispari allora $f(n) = 3n + 1$

Possiamo formulare la seguente congettura: *iterando la f, la funzione finisce sempre a 1*.

A tale proposito si propone una scheda di lavoro che ha come obiettivo la verifica della plausibilità di congetture, ossia verificare attraverso la potenza del calcolo numerico la fondatezza di proposizioni non dimostrate.

***Scheda di lavoro 4***