

Università degli studi di Roma “Tor Vergata”

Liceo Scientifico “A.Righi” di Roma

Progetto Lauree Scientifiche

Laboratorio di Matematica

Iterazioni di funzioni

e loro andamento asintotico

Obiettivi del laboratorio

La rivoluzione informatica ha alterato in modo significativo il mondo della matematica, in particolare sviluppando la matematica sperimentale e diminuendo l'interesse per i problemi risolvibili in modo esplicito, vista la rapidità ed efficienza con cui sono disponibili metodi di approssimazione. Di questi cambiamenti non vi è quasi traccia nei programmi di matematica della scuola primaria e secondaria che in particolare privilegiano da sempre lo studio di problemi esattamente risolvibili con un numero finito di passi, trascurando i metodi di approssimazione.

Il laboratorio proposto mira ad aprire uno spiraglio sulla matematica “sperimentale” attraverso lo studio numerico (e in qualche modo teorico) delle iterazioni di alcune funzioni.

Gli obiettivi perseguiti hanno avuto anche una ricaduta sui programmi curriculari, visto che gli argomenti trattati hanno consentito la comprensione del concetto di limite introducendolo nel caso di successioni esplicitamente calcolabili, invece che nel caso di funzioni (approccio questo generalmente seguito ma non efficace). Altra importante ricaduta è stata la possibilità di utilizzare il concetto di convergenza per la risoluzione di equazioni che non ammettono soluzioni esplicite ed esatte, oppure per la comprensione di algoritmi ricorsivi comunemente utilizzati, come ad esempio nel calcolo di una radice quadrata.

Contenuti

La trattazione dell'argomento è stata così suddivisa:

- Prima parte: funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che convergono quando reiterate; metodo di Erone per il calcolo della radice quadrata.
- Seconda parte: casi di convergenza non garantita, che dipende da un parametro. Questa seconda parte ha previsto la trattazione di questioni più complesse come la ricerca di eventuali cicli limite. Sono stati studiati casi, come quello dell'equazione logistica, che forniscono modelli per evoluzioni di tipo caotico.
- Terza parte: studio di iterazioni di alcune funzioni in $\mathbb{R}^2$. Sono state studiate in particolare le trasformazioni di Hènon e del fornaio.

La metodologia didattica ha previsto l'uso del calcolatore come effettivo strumento di calcolo. Sono stati costituiti dei gruppi di lavoro misti nei quali alcuni studenti erano in grado di usare semplici linguaggi di programmazione. Si è anche cercato di ricostruire le motivazioni con le quali i vari esempi trattati sono storicamente nati.

Programma dei due incontri rivolti agli alunni delle classi IV

1°- Presentazione del progetto lauree scientifiche: motivazioni e obiettivi

2°- La rivoluzione informatica e “la matematica sperimentale”.

L'evoluzione dinamica di un sistema e l'iterazione di funzioni. Dinamiche caotiche ed attrattori.

Programma degli otto incontri di laboratorio

1° incontro

- Successioni iterative reali
- La funzione radice quadrata iterata
- La funzione $f(x)=ax$ iterata; la funzione $f(x)=ax+b$ iterata
- Esercizi

2° incontro

- Alcuni di trasformazioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$: $3n+1$ e $3n-1$ quando $n \in \mathbb{N}$
- La funzione $\frac{1}{2}(x + \frac{k}{x})$ iterata e il metodo di Erone per il calcolo della radice

3° incontro

- Convergenza non garantita
- L'equazione logistica

4° incontro

- L'equazione logistica
- Caos
- Biforcazioni

5° incontro

- Il diagramma di biforcazione

6° incontro

- La trasformazione di Bernoulli

7 ° incontro

- La trasformazione del fornaio

8° incontro

- L'attrattore di Hènon

Prof. Responsabili: Prof. Lucio Russo (responsabile scientifico); Prof.ssa Emanuela Salciccia.

Prof. Collaboratori Prof, F. Ghione (Tor Vergata); Prof.ssa Rita Fraioli(L.C. Tasso); Prof.ssa Letizia Prosperini (L.S. Righi); Prof. Costantino Gistro (ITIS Fondi) Berta Parisell (ITIS Fondi); Prof. Emilio Forgione (volontario ex-tirocinante SSIS Righi).