

DA AL-KHAYYAM A DESCARTES: SU LE CURVE

Roshdi Rashed

“Esiste – scrive Jules Vuillemin – un rapporto intimo sebbene meno apparente e più incerto tra le Matematiche pure e la Filosofia teoretica. La storia delle matematiche e della filosofia mostra che ogni rinnovamento dei metodi di quella ha, ogni volta, delle ripercussioni su questa¹”. Segue l’evocazione di qualche esempio famoso: la scoperta degli irrazionali e il platonismo; la geometria algebrica e la metafisica di Descartes; il calcolo infinitesimale e il principio di continuità nella filosofia di Leibniz.

Sottolineare questo rapporto tra le matematiche e la filosofia, così come il suo ruolo nella ricostruzione dei sistemi filosofici, ovviamente i più grandi, non è assolutamente, nello spirito di Jules Vuillemin, l’effetto di un partito preso. Si tratta per lui, mi sembra di ricordare, nello stesso tempo un fatto storico e una regola del metodo storico. A meno, in effetti, di sostenere che i sistemi delle filosofie sono delle semplici “dottrine” che si nutrono le une con le altre, oppure derivino in maniera pura e semplice da una riflessione solipsistica sull’esperienza vissuta, non si può evitare di tornare ai luoghi che vedono l’elaborarsi della conoscenza. E’ da là in effetti che i filosofi attingono i loro temi di pensiero e i loro modelli di argomentazione, in vista di elaborare dei veri sistemi che loro vogliono coerenti. Questo ritorno è dunque la prima regola del metodo. Ora questi luoghi sono eminentemente storici e anche le matematiche pure sono iscritte nella storia. Dimenticarlo, significherebbe all’incirca cadere inevitabilmente nell’illusione trascendentale di elevare il provvisorio al rango del definitivo e dell’essenziale. E’ per questo che molto della storia della matematica e delle scienze si impone a coloro che intendono ricostruire i sistemi filosofici con il rigore richiesto e di ritrovare, in filosofia questa volta, i principali temi della filosofia teoretica. Questa è una seconda regola del metodo. Tra i luoghi che ispirano le filosofie, le matematiche pure occupano un posto privilegiato. Esse hanno ereditato questo privilegio sia dalla storia – è il più antico dominio di conoscenza razionale – che dal diritto – sono quelle che hanno visto sviluppare i metodi argomentativi più rigorosi. Le matematiche pure non hanno tuttavia l’esclusività di questo ruolo. Jules Vuillemin non solo lo sapeva, ma l’ha ben mostrato, come attestano i suoi lavori su Aristotele, Sant’Anselmo, Kant, Russel, ecc...

Egli aveva fatte proprie queste concezioni e queste regole intorno al suo quarantesimo anno di età. Tra il 1960 e il 1962, pubblicherà uno dopo l’altro *Mathématiques Métaphysiques chez Descartes* e *La Philosophie de l’algèbre*. Nel primo libro, due questioni sono intimamente legate: come le matematiche di Descartes hanno potuto aprire la strada alle matematiche moderne, e in cosa hanno contribuito al rinnovamento della metafisica? Ne *La Philosophie de l’algèbre* siamo in pieno terreno delle matematiche moderne, quelle di Lagrange, di Gauss, Galois, Abel, Klein, Lie ecc., e del loro impatto filosofico.

In questa conferenza io mi situo nella prospettiva del primo di questi libri di Jules Vuillemin, per riprendere a mio modo la questione della modernità matematica a partire da Descartes e dei suoi contemporanei, ovviamente Fermat.

Distinguiamo prima di tutto la novità matematica dalla modernità matematica. Nel caso di quest’ultima, non basta che i risultati – teoremi o proposizioni – siano nuovi: devono in più essere parte di un programma di ricerca anch’esso nuovo. Ora in meno di un decennio, tra il 1630 e il 1640, si vedono enunciare molti programmi matematici. Nel 1643 Roberval inizia la ricerca su una nuova curva trascendente, la cicloide. Descartes e Fermat non tarderanno a raggiungerlo, e lui stesso, quattro anni più tardi, nel 1638, sempre seguito dagli altri due, trova l’area di un arco di cicloide. Lo stesso anno, traccia la tangente alla cicloide con un metodo cinematico. Vincent Viviani e Evangelista Torricelli la troveranno indipendentemente un anno dopo. Questa ricerca sulla curva trascendente più celebre del XVII secolo inaugura un’analisi geometrica delle funzioni

¹ *L’introduction à la philosophie de l’algèbre*, Paris, PUF, 1962, pg 4

trascendenti, analisi destinata al futuro che conosciamo. Durante questo stesso decennio, Descartes e Fermat avevano dato dei metodi per trovare la pendenza della tangente in un punto di ascissa x di una curva algebrica data. Nel 1639, Florimond de Beaune chiedeva al contrario un metodo che permettesse di trovare la curva a partire da una relazione algebrica nota tra l'ascissa del punto e la pendenza della tangente in quel punto. Così si pone il problema dell'inverso delle tangenti, e di colpo si inaugura una ricerca nuova in geometria differenziale. Sempre nel corso di questo decennio e precisamente nel 1639, anche Desargues completa il celebre Brouillon Project, che arricchisce la ricerca in geometria proiettiva. E' ancora in questi anni, nel 1640, che Fermat inventa il metodo della discesa infinita rinnovando così la teoria dei numeri. Tre anni prima, nel 1637, era già apparsa la *Géométrie* di Descartes.

Una tale molteplicità di lavori fondamentali in un così breve lasso di tempo è un fenomeno sufficientemente singolare nella storia da meritare di essere studiato come tale. Ma è anche importante situare ciascuno di essi con rigore nella storia delle matematiche. Io qua mi limito, per ragioni evidenti, al principale dominio studiato da Descartes: la geometria algebrica.

La *Géométrie* di Descartes è il prodotto di un nuovo programma di ricerca e porta a risultati inediti? Se sì, in che senso? Queste questioni riportano, volenti o nolenti, alla storia della geometria e dell'algebra prima di Descartes; esse ci portano anche a calarci nell'evoluzione del suo proprio pensiero tra il 1619 e il 1637. C'è l'abitudine a focalizzare la rappresentazione di questa storia su due momenti: le Coniche di Apollonio e la *Géométrie* di Descartes. Ma, per rispettare le regole dell'armonia, è necessario algebrizzare un libro puramente geometrico, cioè le Coniche. Questa è la strada seguita dagli storici come Mahoney e recentemente da J. Dieudonné negli studi che ha dedicato alla geometria algebrica. La ricerca recente ha rinnovato le nostre conoscenze su questa storia; illuminando le ragioni dell'avvento della geometria algebrica, essa ha nello stesso tempo permesso di situare meglio il contributo di Descartes.

Si sa in effetti oggi che nel corso del X secolo, molti matematici hanno tradotto l'algebra in termini di una nuova disciplina a partire da problemi geometrici sia piani che solidi. Tra questi matematici alcuni hanno pensato di risolvere l'una o l'altra delle equazioni cubiche ottenute attraverso l'intersezione di due curve coniche. Ma bisognava attendere mezzo secolo fino a quando al-Khayyam (1048-1131) si desse i mezzi teorici (unità di misura, dimensione, calcolo geometrico, ecc.) per elaborare una teoria generale e fondare così un nuovo capitolo dell'algebra, il cui oggetto è la soluzione con l'aiuto della geometria di tutte le equazioni di grado minore o uguale a tre. Infatti Al-Khayyam si è dato i mezzi teorici per una doppia traduzione: ridurre i problemi geometrici solidi a equazioni algebriche; risolvere le equazioni algebriche di terzo grado irriducibili con le intersezioni di due curve coniche. Se si vuole esprimere questa doppia traduzione con una formula si potrebbe dire che l'atto di nascita della geometria algebrica si trova nel punto di incontro tra l'algebra dei polinomi sviluppata da più di un secolo prima di Al-Khayyam a partire dal libro fondante di al-Khwarizmi e la ricerca su le sezioni coniche iniziata a metà del IX secolo a partire dalle Coniche di Apollonio. Questo incontro che avviene nel X secolo nel caso dell'uno o l'altro dei problemi geometrici è stato sistematizzato con Al-Khayyam.

Tutto il problema è dunque nel capire le ragioni di questo incontro e perché questo si è prodotto in quel momento e in quel luogo. Per questo occorre cominciare a ricordare che questo si è fatto in relazione con la costruzione e l'evoluzione di due gruppi di discipline, nel corso dei due secoli che hanno preceduto al-Khayyam – ragione per cui molti matematici precedenti a al-Khayyam (Abu al-Jud per esempio) l'avevano parzialmente intravisto. Il primo gruppo di discipline è quello dell'algebra polinomiale e la teoria delle equazioni algebriche. Il secondo è composto da due capitoli geometrici, il primo relativo alle costruzioni geometriche attraverso l'intersezione di coniche. Non si tratta più, come nella geometria antica, quella di Eutocio per esempio, di problemi isolati che nascono in maniera sporadica e che vengono risolti attraverso l'intersezione di curve, coniche o altre; c'è questa volta un metodo per esplorare il dominio dei problemi geometrici, in grande maggioranza solidi, ma eventualmente ed anche, potremmo dire, inutilmente, quadratici, che

si costruiscono con l'aiuto delle *sole* curve coniche eccetto tutte le altre. Nel quadro di questo nuovo capitolo, certi matematici – Ibn al-Haytham per esempio – studiano generalmente con cura, l'esistenza delle soluzioni e il loro numero. Questo studio condotto con l'analisi e la sintesi si basa sulle proprietà asintotiche e locali delle coniche e in particolare i loro contatti.

Coltivato dai matematici a partire dalla metà del IX secolo, questo nuovo capitolo è diventato con quelli della seconda metà del X secolo – al-Quhi, Ibn Sahl, al-Sijzi, Abu al-Jud, al-Saghani, ibn al-Haytham, tra gli altri – un attivo dominio di ricerca offrendo agli algebristi metodi e tecniche e soprattutto un nuovo criterio di ammissibilità². Ormai la costruzione con l'aiuto delle sezioni coniche è una costruzione ammissibile in geometria, con lo stesso titolo di quella con la riga e compasso. È evidentemente un passo considerevole che è stato compiuto. In più, questi stessi geometri che nel corso delle costruzioni procedevano con trasformazioni geometriche – similitudine, traslazione, omotetia, affinità... – alcune delle quali saranno prese in prestito dagli algebristi, si sono impegnati a introdurre il movimento negli enunciati e nelle dimostrazioni geometriche. Non si tratta qui del movimento cinematico, ma del movimento geometrico, cioè a dire facendo astrazione dei tempi o del tempo usato per completarlo. Questo movimento continuo – spostamento, rotazione... – è realizzato con l'aiuto di qualche strumento, e sempre riproducibile in maniera esatta. Al-Khayyam prende in prestito il nuovo criterio di ammissibilità così come le tecniche e i metodi delle costruzioni geometriche. Egli continua tuttavia ad aderire alla legittimità aristotelica ed euclidea e, di conseguenza, a differenza della maggior parte dei geometri che hanno coltivato questo nuovo capitolo, respinge il movimento fuori dalle frontiere della geometria. Il poco interesse che aveva per le dimostrazioni di esistenza dei punti di intersezione autorizzava questo rifiuto, dato che non aveva bisogno di pronunciarsi esplicitamente sulle curve stesse e sulla loro natura.

Il secondo capitolo di questo secondo gruppo di discipline si indirizza allo studio teorico e pratico dei metodi per riprodurre il movimento e quindi tracciare le curve coniche. Se in effetti la loro costruzione per punti era da lungo tempo oggetto di ricerca, ricerche che si sono accelerate nel corso del X secolo, è solo alla fine di questo secolo che si pone il problema di come tracciare con continuità tutte le curve utilizzate in algebra, in ottica, nella costruzione di specchi, lenti, astrolabi e meridiani... Certo si tracciava l'ellisse anche prima col metodo "del giardiniere" (Anthémios de Tralles³) ma non è che alla fine del X secolo che si pone da se stesso, e relativamente a tutta una classe di curve, il problema del tracciamento continuo, così come quello dell'invenzione di strumenti necessari alla sua realizzazione. Ora, se i matematici dell'epoca hanno intrapreso una tale ricerca, era, tra l'altro, per il fatto che sentivano necessario assicurarsi sulla continuità delle curve. Quest'ultima nozione s'impondeva ormai nel corso delle dimostrazioni dell'esistenza dei punti di intersezione delle curve, le quali erano necessarie alle costruzioni dei geometri e alle soluzioni degli algebristi delle equazioni cubiche e biquadratiche. Ma questa ricerca sul tracciamento continuo non era solo teorica; bisognava anche inventare e costruire dei nuovi strumenti, tra i quali un nuovo genere di compasso come il "compasso perfetto" adatto a tracciare rette, cerchi e coniche.

Ora questi studi non hanno tardato a connettersi al problema maggiore, quello della classificazione delle curve in funzione del tipo e del numero di movimenti che intervengono nella loro costruzione. Così al-Quhi, il primo matematico che abbia scritto un trattato sul compasso perfetto, distingue le curve tracciate da questo – la retta, il cerchio e le tre coniche – e le battezza "misurabili" cioè suscettibili di essere studiate con la teoria delle proporzioni. Si tratta dunque di curve piane generate da un solo movimento continuo – eventualmente da più di un movimento ma di differente natura – alle quali si applica la teoria delle proporzioni; ciò che resta esatto quale che sia la caratteristica

² Vedere R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, 4 vol., London, al-Furqan, 1993-2002.

³ R. Rashed, *Les Catoptriciens grecs. I : Les miroirs ardents*, édition, traduction et commentaire, Collection des Universités de France, Paris, Les Belles Lettres, 2000.

delle coniche per *symptoma* ossia fuoco-direttrice. Un contemporaneo più giovane di al-Quhi, al-Sijzi, classifica le curve ugualmente secondo il tipo e il numero di movimenti: quelle “misurabili”, come in precedenza, e che sono geometriche; quelle generate da due movimenti continui differenti, che, senza essere “misurabili” né geometriche, ma secondo lui, solamente meccaniche, sono malgrado questo “regolari e ordinate”. Come esempio dà l’elica cilindrica, che è una curva sghemba generata da una rotazione uniforme intorno a un asse e una traslazione uniforme parallela all’asse. L’ultima classe è quella delle curve non misurabili, e che non sono né regolari né ordinate⁴.

Questa distinzione tra classi di curve è molto importante per la storia della geometria algebrica e per questo mi ci soffermo un po’.

Con la distinzione di questa classe di curve del primo e del secondo grado, è il criterio stesso di classificazione che cambia: la differenza si stabilisce ora tra curve “misurabili” e curve “non misurabili”, nel senso che queste sono o non sono sottomesse alla teoria delle proporzioni. Bisognerà ancora attendere lo sviluppo della geometria algebrica affinché, con Descartes, queste classi di curve trovino il loro vero nome: “geometriche” cioè a dire algebriche, e “meccaniche”, cioè a dire trascendenti.

Restano le curve non misurabili, “meccaniche”, di cui l’elica è un esempio singolare e, a causa della sua storia, privilegiato. Per rendere conto di questa singolarità sembra che sia stato necessario separare le “non misurabili” in due sottoclassi. È là che al-Sijzi introduce due nozioni, quella d’ordine (*tartib*) e quella di regolarità (*nizam*). Sul significato esatto di due questi due termini al-Sijzi non si spiega. Sono d’altra parte così ordinari che nessuna ricerca lessicale ci può venire in aiuto. Notiamo tuttavia che nel suo trattato *Sur la description des sections coniques*⁵, parla di «rotazione regolare (*idara muntazima*)”, del compasso perfetto per tracciare il cerchio - da cui la nostra scelta di tradurre *nizam* con “regolarità”. Quanto a *tartib* egli l’utilizza nelle sue ricerche in teoria dei numeri per designare l’ordine. Non abbiamo in niente ridotto il cammino delle congetture. Queste curve meccaniche, sappiamo, sono generate da due movimenti separati e dissimili. Rispetto a questo l’elica cilindrica non fa eccezione; soltanto, a differenza delle altre curve meccaniche, essa è ordinata e regolare. Ora se leggiamo attentamente la formulazione di al-Sijzi si osserva che queste nozioni qualificano la curva e non i movimenti: oltretutto questi stessi movimenti uniformi possono generare altre curve che non possono essere così qualificate. Questa singolarità è già stata stabilita da Apollonio, secondo Geminus *via* Proclo quando afferma che le parti della stessa lunghezza dell’elica cilindrica coincidono omeomericamente.

Ora noi sappiamo che l’elica tracciata sul cilindro di rivoluzione è la sola curva sghemba i cui raggi di curvatura e di torsione sono costanti. Il problema resta dunque di sapere se la formula di Apollonio, così come le nozioni di al-Sijzi, fossero gli strumenti per esprimere qualitativamente queste qualità che loro vedevano senza ancora conoscerle.

Giovane contemporaneo d’Ibn Sahl e d’al-Quhi, al-Sijzi aveva la possibilità di conoscere una proprietà caratteristica di questa curva: le sue tangenti formano un angolo costante con l’asse. Si tratta chiaramente di una proprietà d’ordine di regolarità.

Comunque in questa classificazione delle curve meccaniche al-Sijzi procede con due caratteristiche: il numero e la natura dei movimenti che intervengono nel generare la curva; le proprietà geometriche “d’ordine e regolarità” destinate a caratterizzare o non caratterizzare queste curve.

Inoltre bisogna ricordare, per finire, che la classificazione proposta è l’eco, cosa di più naturale, del sapere matematico del tempo che riflette i suoi domini e le sue frontiere. essa prende in effetti alcuni tratti distintivi da due limitazioni di quella. Non si è dimenticato di sottolineare che al-Sijzi

⁴ R. Rashed, *Œuvre mathématique d’al-Sijzî*. Volume I: *Géométrie des coniques et théorie des nombres au x^e siècle*, Les Cahiers du Mideo, 3, Louvain-Paris, Éditions Peeters, 2004 ; *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, London, al-Furqæn, 2005.

⁵ *Id.*, *Œuvre mathématique d’al-Sijzî*. Volume I : *Géométrie des coniques et théorie des nombres au x^e siècle*, Les Cahiers du Mideo, 3, Louvain-Paris, Éditions Peeters, 2004.

non evoca curve "meccaniche" a parte l'elica cilindrica: in questo lui non è un'eccezione. A meno di essere smentiti da una scoperta sorprendente si può pensare che i matematici del X secolo, così come i loro successori, non si interessassero alle curve "meccaniche". Non si può, per spiegare questo fatto, attenersi alla storia delle trasmissioni del *corpus* geometrico greco. È noto che il trattato di Archimede sulla spirale, per esempio, non è stato tradotto in arabo, cosa che ha privato i matematici di questa curva; ma neppure il suo trattato su *Le Conoidi e le Sferoidi* è stato tradotto ma questo non ha impedito loro di reinventare il contenuto e di andare più lontano. Bisogna dunque cercare altrove la spiegazione che ci apparirà come l'altra faccia di un fatto lui stesso positivo.

Abbiamo dimostrato che è nel corso del X secolo, con matematici come al-Quhi, che nuove esigenze si impongono ormai come norme: bisogna dare una vera prova di esistenza quando è necessario e fondare i procedimenti di costruzione su basi geometriche solide. Così il sistema meccanico d'Ibn Sahl, il compasso perfetto di al-Quhi, destinato a costruire le coniche, non sono strumenti qualunque, ma sono essi stessi confezionati con l'aiuto della teoria delle coniche che essi incarnano. I matematici si sono dunque limitati alle sole curve per le quali avevano i mezzi per stabilirne l'esistenza e per procedere alla loro costruzione. In breve e in chiaro è grazie a queste stesse esigenze che i matematici hanno potuto distinguere la classe delle curve piane dei due primi gradi e si sono distolti da uno studio attivo delle curve "meccaniche".

La seconda limitazione del sapere matematico del tempo si riferisce a questa stessa classe di curve piane. Perché, in effetti, una volta definita la classe delle "curve misurabili" i matematici si sono fermati ai due primi gradi malgrado avessero incontrato problemi solidi e "soprasolidi"? Il problema si impone tanto più che al-Quhi ha generalizzato una teoria delle applicazioni delle aree ai solidi. Come dire salvo errore che nessuno ha mai tentato di tracciare una cubica. Ci voleva per questo la definizione di curva piana qualunque attraverso la sua equazione, in altri termini l'edificazione di un nuovo capitolo nel quale le curve sono studiate a partire dalle loro equazioni. Affinché questo si realizzi, bisognerà dunque attendere la fine del XVII secolo almeno.

Questa distinzione in classi di curve non ha manifestamente interessato al-Khayyam, del quale abbiamo detto avesse orrore del movimento in geometria. Cioè a dire che il respingere il movimento insieme allo scarso interesse per la dimostrazione dell'esistenza dei punti di intersezione, riduce il progetto di al-Khayyam a quello di una teoria geometrica delle equazioni algebriche. È sotto questa forma che si è dichiarato il primo contributo in geometria algebrica

Il successore di al-Khayyam, Sharaf al-Din al-Tusi⁶, era di contro preoccupato da questa dimostrazione di esistenza. Introduce la nozione di movimento per assicurare la continuità delle curve, definisce la nozione di massimo per un'espressione algebrica su un intervallo, studia certe proprietà algebriche delle curve coniche. Così, mezzo secolo appena dopo al-Khayyam, sposta in senso analitico la geometria algebrica dei suoi predecessori. Le cose sono essenzialmente rimaste ferme là fino alla geometria di Descartes alla quale bisognerà ora ritornare.

Si può dimostrare come credo di aver fatto altrove⁷, che da un lato la *Géométrie* rappresenta il compimento di questa tradizione e dall'altro, in questo compimento, Descartes ha ritrovato tutte le questioni del movimento – classificazione delle curve, tracciamento continuo, nuovo compasso per effettuarlo ecc. – iniziando così una nuova tradizione il cui sviluppo sarà opera dei suoi successori. Spieghiamoci brevemente.

Possiamo essere d'accordo nel riconoscere nella *Géométrie* una organizzazione centrata su due assi principali. Il primo: ridurre un problema geometrico dato a una equazione algebrica in una sola

⁶ R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyam mathématicien*, Paris, A. Blanchard, 1999 ; *Sharaf al-Din al-Tusi*, *Œuvres mathématiques. Algèbre et Géométrie au XII^e siècle*, texte établi et traduit par R. Rashed, 2 vol., Paris, Les Belles Lettres, 1986.

⁷ « La *Géométrie* de Descartes et la distinction entre courbes géométriques et courbes mécaniques », dans J. Biard et R. Rashed (éds), *Descartes et le Moyen Âge*, Études de philosophie médiévale LXXV, Paris, Vrin, 1997, p. 1-22.

incognita. Il secondo: ridurre la risoluzione dell'equazione ottenuta alla sua costruzione attraverso l'intersezione di due curve "geometriche" di cui, nella misura del possibile, una sarà un cerchio.

Se si ricostruisce l'evoluzione del pensiero di Descartes in relazione al primo asse, si sottolinea che, a partire dal 1619 fino al gennaio del 1632, data della sua soluzione del problema di Pappo, aveva risolto proprio come al-Khayyam, tutte le equazioni di terzo grado attraverso l'intersezione di coniche. Nel 1637, nella sua *Géométrie*, procede, sempre secondo l'esempio di al-Khayyam, nella soluzione di tutte le equazioni del terzo e del quarto grado attraverso l'intersezione di due coniche, ma lui si limita a una parabola e a un cerchio variabile secondo il tipo di equazione. Ma non più di al-Khayyam non si occupa al momento dell'esistenza delle radici. Per le equazioni del quinto e del sesto grado alle quali al-Khayyam deliberatamente non si interessa, Descartes ha concepito una parabola cubica o una concoide parabolica, una curva di equazione $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = xy$.

Ma, in presenza di una equazione cubica, per esempio, Descartes, come il suo predecessore, si era ridotto ad affermare che ella è, al più, solida; non poteva dunque, non più di lui, precisare la natura degli irrazionali che intervengono nella soluzione. Si constata dunque che, se ci si limita al primo asse, Descartes reitera il cammino di al-Khayyam. Sicuramente lo affina, lo generalizza, lo porta fino ai limiti logici possibili; in breve lo completa ma senza toccare veramente la sostanza né rifondarne il senso. Che ne è del secondo asse?

A vent'anni (lettera a Beeckman), con una conoscenza matematica molto modesta, Descartes enunciava un programma per sua propria confessione "ambizioso" senza avere ancora i mezzi per realizzarlo. Ecco le idee principali di questo programma: una classificazione dei problemi geometrici grazie alle curve che potevano essere utilizzate per risolverle; una classificazione delle curve stesse grazie ai movimenti per i quali sono tracciate; e, infine, una fede incrollabile, che nulla poteva tuttavia giustificare, nel valore euristico di queste classificazioni per esaurire nella dimostrazione tutte le questioni della geometria.

L'intenzione che presiede questo programma è, sembra, l'andare oltre le coniche e il distinguere nettamente questa classe di curve, mediante la stretta condizione di non ricorrere ad alcun concetto ignoto agli antichi che, privati dell'algebra, non potevano trovare questa sfaldatura tra le classi di curve. Il concetto di cui dispone Descartes, o quello che perlomeno gli si è presentato, non è altro che l'antico concetto di movimento tal quale noi lo ritroviamo nella tradizione aristotelica. Nella *Géométrie* questa nozione di movimento continuo è adoperata, è vero, senza alcuna considerazione cinematica apparente, ma neppure senza essere rivestita della minima dimensione algebrica.

Nel corso della ricerca iniziata nelle linee di questo programma, Descartes sembra essersi reso conto che in essa la sola nozione di movimento non era sufficiente per giustificare completamente la distinzione che enunciava nel 1619 tra curve "geometriche" e curve "meccaniche". La differenza tra queste due classi di curve sembra difatti rinviare a due problemi mischiati: quello della costruibilità dei punti della curva; e quello dell'esistenza dei punti di intersezione quando le curve di incontrano. Questi problemi erano stati incontrati da al-Tusi nel XII secolo. Ma dato che si trattava solo di curve coniche, l'appartenenza del punto di intersezione a ciascuna delle curve, è dedotta dal *symptoma*. Ora Descartes non si ferma più alle sole coniche ma tratta di cubiche e, più generalmente, di curve "geometriche". Lui riconosce, diversamente dai suoi predecessori, il ruolo delle equazioni per rappresentare la curva. Tuttavia questa equazione non gli permette il più delle volte che la costruzione per punti, la quale non è sufficiente che per le curve "geometriche". Descartes si trova allora di fronte a una situazione asimmetrica: mentre per la classe delle curve geometriche si può parlare la lingua delle equazioni, questo è impossibile per le curve "meccaniche". Bisognerà, in vero, attendere Leibniz e soprattutto Jacques Bernoulli per sapere che queste ultime curve non hanno equazioni algebriche; esse hanno equazioni differenziali algebriche che legano tra loro non l'ascissa e l'ordinata, ma i loro differenziali. Descartes non ignora tuttavia che tutte le proprietà delle curve "geometriche" devono essere dedotte dalla loro equazione. Ma su questo programma, non si è mai dedicato. Per questo bisognerà aspettare il giovane Newton.

E di fatti, prima di Descartes, la nozione di equazione di una curva era ben limitata, e non si prestava in nessun modo alla costruzione di un programma di ricerca. Al-Tusi, nel corso delle sue

ricerche sui *maxima* o più esattamente sull'esistenza dei punti di intersezione, studia certe curve con l'aiuto della loro equazione. Resta il fatto che non distingue nettamente tra l'equazione polinomiale e la curva, al di fuori delle coniche. Ora è precisamente grazie all'estensione dello studio delle curve, al di là delle coniche, e alla distinzione che egli stabilisce tra queste classi di curve che può studiare con i metodi dell'algebra, che Descartes ha potuto concepire questo nuovo programma. La realizzazione di questo restava un pegno per l'avvenire., sorgente di due correnti, quella della geometria algebrica con Kramer e Bezout e quella della geometria differenziale con i fratelli Bernoulli.

Ma Descartes non era il solo a prospettare questo panorama per la geometria algebrica. Fermat vi ha contribuito a sua volta, inizialmente indipendentemente da Descartes, e poi in funzione di lui e un po' anche contro di lui;

Situazione doppiamente interessante perché rappresenta una via di ricerca differente in uno stesso dominio. Per capire questa via intrapresa da Fermat ci occorre ricordare due capitoli matematici sviluppatasi anch'essi nel corso del X secolo e nei quali Fermat investigherà moltissimo. Il primo tratta le trasformazioni geometriche mentre il secondo verte sull'analisi diofantina. A differenza dei matematici ellenistici i loro successori a partire dalla metà del IX secolo, iscrivendosi nella tradizione della geometria di Apollonio, cominceranno a prendere come oggetto di studio le trasformazioni dei luoghi geometrici attraverso omotetie, traslazioni, similitudini, inversioni. Già nel XII secolo, queste ricerche erano state coltivate in geometria algebrica da Sharaf al-Dîn al -Tusi. Ora è precisamente quelle che ritrova Fermat nel suo *De locis planis* finito nell'aprile del 1636. Per illustrare la similitudine tra gli studi iniziati nel IX secolo e questo ultimo libro di Fermat, è sufficiente paragonare la struttura e i risultati a quelli del libro di Ibn al-Haitham intitolato *Les Connus*⁸. Quanto all'analisi diofantina, Fermat se ne è occupato nel 1636, a partire da Bachet da una parte e Viète dall'altra.

Nel 1637 Fermat diffonderà un manoscritto del suo trattato *Ad Locos planos et solidos isagoge* (*Isagoge*). Si tratta dunque di un trattato indipendente dalla geometria di Descartes. In quest'opera Fermat intende trovare le equazioni polinomiali delle curve. Ci si rende conto leggendo questo trattato che questo progetto non è indipendente al libro sui luoghi piani già menzionato. Fermat non tratta in effetti nella *Isagoge* che dei luoghi incontrati in quello (retta, cerchio, sezioni coniche) e seguendo un metodo che altro non è se non la traduzione algebrica delle trasformazioni puntuali che si trovano messe in opera. Se dunque nella *Isagoge* Fermat traduce ogni luogo con una equazione è essenzialmente per caratterizzare la curva. Tutto indica del resto che il ruolo dell'equazione polinomiale si limita a questa caratterizzazione, nella misura in cui Fermat non vi ha ancora fatto ricorso per dedurre altre proprietà della curva. Evidentemente, il suo progetto è, nel 1637, diverso da quello di Descartes nella sua *Géométrie*. Qual è dunque l'ispirazione che anima Fermat nella *Isagoge*? Si può mostrare che essa ha per fonte l'afferrare intuitivamente le relazioni tra l'analisi diofantina e le equazioni polinomiali a due incognite.

Nell'*Isagoge* Fermat dunque non tratta la teoria delle equazioni algebriche. Ci arriva alla fine del 1637, in una appendice che redige all'*Isagoge*, verosimilmente una volta messe a profitto le sue ricerche cartesiane. Vi tratta in effetti, scrive, della "costruzione di ogni problema cubico e biquadrato per mezzo di una parabola e di un cerchio"⁹.

Non è che molto più tardi che Fermat arriva allo studio delle equazioni e delle curve algebriche. Vi entra, se si può dire, attraverso una grande porta, attraverso la via di una critica alla classificazione delle equazioni e delle curve proposta da Descartes nella sua *Géométrie*. Ma criticare la classificazione cartesiana vuol dire anche necessariamente riconsiderare qualche idea della geometria algebrica¹⁰. È quello che propone Fermat nella *Dissertation en trois parties*, un libro

⁸ Voir *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. IV, Chap. II.

⁹ *Cœuvres de Fermat*, publiées par P. Tannery et Ch. Henry, vol. III, Paris, 1896, p. 99.

¹⁰ R. Rashed, « Les premières classifications des courbes », *Physis*, 2005.

contro Descartes ma dove l'impatto della *Géométrie* si fa sentire con una forza e una presenza tutte particolari. Senza soffermarci qui su queste critiche che non sono neppure giustificate, notiamo solamente il loro effetto sulle idee di Fermat. Queste gli hanno di fatto aperto la strada di una distinzione tra due classi di equazioni algebriche: quelle che sono, lui dice, “costitutive delle linee curve” e quelle a una sola incognita. Preoccupato per molto tempo, abbiamo notato, dalle equazioni dei luoghi geometrici, Fermat mobilita questa distinzione che, molto più nettamente dei suoi predecessori, utilizza per definire le curve attraverso le loro equazioni. In questo contribuisce alla realizzazione del programma cartesiano. Fermat afferma in seguito che ogni equazione di grado $2n + 1$ o di grado $2n + 2$ si risolve con intersezione di due curve di grado $n + 1$. Siamo sicuramente sulla strada che porterà successivamente al reciproco del teorema di Bezout. D'altra parte, il metodo che propone per risolvere le equazioni di grado $2n + 1$ o di grado $2n + 2$ si ispira singolarmente all'analisi diofantina. È, che io sappia, il primo a essere ricorso alle tecniche dell'analisi diofantina nella geometria algebrica.

In una parola, partito dalla ricerca sulla trasformazione puntuale dei luoghi, Fermat voleva, man mano che avanzava, trovare tutte le equazioni dei luoghi, in maniera particolare delle coniche. Ora è precisamente questo orientamento che ha preparato il terreno ai suoi lavori in geometria algebrica, cioè a dire quando, sotto l'influenza di Descartes, si è interessato alla teoria delle equazioni e delle curve algebriche; da questo incontro con Descartes, Fermat ha attinto i mezzi per rinnovare questo dominio. Era allora capace di gettare un ponte tra due terre sino ad allora separate, per promuovere, per così dire, la realizzazione di quello che era il programma cartesiano: le tecniche dell'analisi diofantina e la geometria algebrica. Ora, per questa innovazione, Fermat si distingue bene sia dai predecessori che dai contemporanei. Cioè a dire che, fintanto che le curve che si studiano algebricamente si riducono essenzialmente alle sole coniche, nulla imponeva di fare un raffronto esplicito tra la geometria algebrica e l'analisi diofantina – è precisamente la situazione di al-Khayyam e quella stessa di al-Tusi. In più, i matematici che si interessavano all'analisi diofantina al di fuori di questa tradizione della geometria algebrica, sia per ragioni d'epoca sia per interesse, non potevano evidentemente pensare a un tale raffronto. Essi si interessavano infatti allo sviluppo sia del calcolo algebrico astratto (Abu Kamil, al-Karaji, Bombelli, Viète...), sia della teoria dei numeri (al-Khujandî, al-Khæzin, Fibonacci dans son *Liber quadratorum*, al-Yazdî...). È Descartes chi ne ha fornito le condizioni di possibilità: possibilità, infatti, a trattare generalmente di equazioni quale che sia il grado, di trattare più chiaramente più, algebricamente tutta una classe di curve. È dunque grazie a Descartes e alla sua teoria delle curve algebriche che Fermat ha potuto investire i metodi diofantini in geometria algebrica. Ora è precisamente questo investimento che gli ha permesso di portare più lontano di Descartes la realizzazione del progetto di questi.

Tra le discipline che si citano per rappresentare la modernità matematica nel corso della prima metà del XVII secolo – se questa non è la modernità classica stessa – figura la geometria algebrica con ovviamente Descartes. Ora, precisamente, l'esempio della geometria algebrica è una buona illustrazione della complessità di questa stessa nozione di modernità matematica. Fino a che si ignoravano le attività matematiche a partire dal IX secolo in Arabia o si saltava a piè pari quello che si poteva sapere, questa nozione sembrava limpida e si imponeva ella stessa senza sollevare nessun problema. Pure si vedeva questa modernità al crocicchio dell'algebra e delle *Coniche* di Apollonio (dei primi quattro libri precisamente); o all'incrocio della *Spécieuse* di Viète e dei suoi ultimi libri. Ma è piuttosto, lo sappiamo, un incontro tra l'Algebra e i nuovi capitoli di geometria sviluppati a partire dalle *Coniche* che si è prodotto sei secoli prima della *Geometria* di Descartes. Senza i capitoli sulle *Constructions géométriques à l'aide des sections coniques*, e quello sul tracciamento continuo non si potrebbe in effetti comprendere la nascita della geometria algebrica con al-Khayyam e la sua trasformazione una prima volta con al-Yazdî. La modernità matematica del XVII secolo non sarebbe dunque che una riproduzione di quella che è avvenuta nel secolo XI? Affatto, invece. Sarebbe, come ci si compiace di affermare, un inizio radicale? Neppure.

Abbiamo dimostrato che una tale alternativa non è pertinente: per leggere la *Géométrie* di Descartes, bisogna anche guardare a monte verso Al-Khayyam e al-Yazdî e, a valle verso Newton, Leibnitz, Cramer, Bezout e i fratelli Bernoulli. Lo stesso se si tratta di situare l'*Isagogé* e la *Dissertation* di Fermat: in effetti si impone un ritorno a monte a degli scritti come quelli di Ibn al-Haytham e di Descartes, così come bisogna avere lo sguardo diretto a valle verso i Bernoulli, Cramer e Bezout. Soltanto allora tutti questi libri innovatori troveranno il posto che non ha mai smesso di essere il loro. La *Géométrie*, per esempio, non è affatto un inizio assoluto, ma nello stesso modo delle altre opere fondatrici, inaugura uno stile: quello di una ripresa, di un adattamento e di una rettifica delle tradizioni di cui lei è erede. Ma, come queste opere, lei apre la strada ad altri sviluppi in geometria algebrica e anche in geometria differenziale. La modernità si presenta così come la realizzazione di potenzialità ereditate dalla tradizione e nello stesso tempo è generatrice di nuove potenzialità per il futuro. Ma potrebbe essere altrimenti? Nulla lo impedisce se si sostiene per partito preso che la continuità e le rotture sono iscritte l'una nelle altre. Ma ogni discorso sulla *Géométrie* di Descartes o sui due libri di Fermat è condannato ad essere inadeguato se si negano gli intimi legami che radicano queste opere nella tradizione, così come le nuove possibilità che loro ospitano e che dovranno attendere per realizzarsi effettivamente che la modernità sia essa stessa diventata tradizione. La vera forza intellettuale di J. Vuillemin è precisamente d'avere perfettamente compreso questa dialettica latente, quando la tradizione era ancora così poco conosciuta.