

# La scienza delle grandezze estese

o

## L'*Ausdehnungslehre*

di Hermann Grssmann

### Prefazione

Se si considera l'opera, di cui il presente libro è la prima parte per il pubblico, come l'elaborazione di una nuova disciplina matematica, l'affermazione non può essere giustificata che attraverso l'opera stessa. Saltando, di conseguenza, qualunque altra giustificazione, preciso subito il cammino che mi ha portato, passo dopo passo, ai risultati che qui presento per dimostrare anche l'estensione di questa nuova disciplina nella misura in cui questo è qua possibile.

La considerazione del negativo in geometria mi aveva dato il primo impulso; mi abituavo a vedere i segmenti AB e BA come delle grandezze opposte; da cui risultava che se A, B, C sono tre punti su una retta, è ugualmente sempre vero che  $AB + BC = AC$  sia quando AB e BC sono disegnati di seguito sia quando sono opposti cioè quando C si trova tra A e B. In questo ultimo caso AB e BC non venivano visti come semplici lunghezze, ma come segmenti nei quali era stato fissato anche un verso per mezzo del quale essi risultavano, giustamente, opposti<sup>1</sup>. S'imponeva quindi la distinzione tra la somma di lunghezze e la somma di tali segmenti nei quali era stato anche fissato il verso. Da questo nasceva l'esigenza di definire questo concetto di somma non solamente nel caso in cui i segmenti sono diretti nello stesso senso o in senso opposto, ma anche in tutti gli altri casi. Questo poteva farsi nel modo più semplice possibile mantenendo ancora la legge  $AB + BC = AC$  anche quando A,B,C non erano sulla stessa retta. - Così fu fatto il primo passo verso una analisi che avrebbe condotto, proseguendo, verso un nuovo capitolo della matematica che qua espongo. Ma io non avevo nessuna idea della ricchezza e del carattere fruttuoso del dominio al quale ero arrivato; al contrario questi risultati non mi sembravano interessanti fino a quando non li ho combinati con una idea a loro connessa.

Riflettendo sul concetto di prodotto in geometria, come mi fu presentato da mio padre<sup>2</sup>, avevo trovato che non soltanto il rettangolo ma soprattutto anche il parallelogramma va considerato come il prodotto di due lati contigui, quando si prenda in effetti, ancora una volta, non il prodotto delle lunghezze, ma quello dei due segmenti tenendo conto delle loro direzioni. Combinando allora il concetto di prodotto con quello di somma esposto precedentemente, ho ottenuto una straordinaria armonia; quando infatti - al posto di moltiplicare la somma di due segmenti, nel senso che ho specificato sopra, per un terzo nello stesso piano - moltiplico i pezzi presi separatamente per lo stesso segmento e faccio l'addizione dei prodotti, osservando i loro valori positivi o negativi, accade che, nei due casi, viene lo stesso risultato e ogni volta deve venire lo stesso risultato<sup>3</sup>. Questa

---

<sup>1</sup> Questa considerazione è l'atto di nascita dell'algebra lineare:

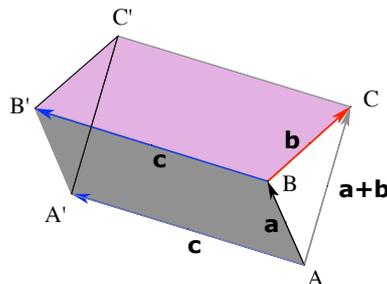


<sup>2</sup> Il padre di Hermann era un insegnante di Matematica e Fisica al Liceo di Stettino, dove diventerà professore anche Hermann

<sup>3</sup> La *straordinaria armonia* di cui Grassmann parla è la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma

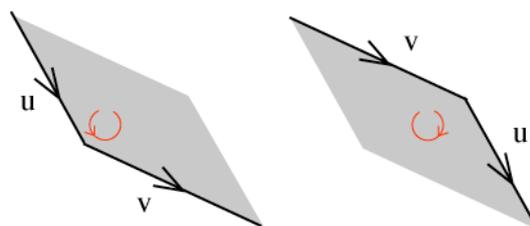
armonia mi faceva allora presentire che, in ogni caso, si apriva così un dominio assolutamente nuovo dell'analisi, cosa che avrebbe potuto portare a dei risultati importanti. Ma per molto tempo questa idea sonnecchiava, dato che il mio mestiere mi occupava in altre attività; ma c'era un altro risultato che mi aveva all'inizio impressionato, cioè che per questa nuova specie di prodotto, mentre restavano valide le regole della moltiplicazione usuale, in particolare la sua relazione con l'addizione, si potevano commutare i fattori solamente invertendo contemporaneamente anche il segno (+ in - e viceversa)<sup>4</sup>. Un lavoro sulla teoria delle maree che avevo iniziato più tardi mi condusse alla meccanica analitica di Lagrange e, da la, di nuovo a queste mie idee, a questa Analisi. Grazie ai principi di questa nuova Analisi, gli sviluppi dell'opera di Lagrange si trasformavano in un modo talmente semplice che, spesso, il calcolo diventava dieci volte più corto di quello che si trovava in quel lavoro.

Questo mi incoraggiò ad applicare la nuova Analisi alla difficile teoria delle maree; bisognava sviluppare per questo concetti nuovi e dargli forma nell'Analisi. Il concetto di rotazione mi porterà alle grandezze esponenziali geometriche. e l'analisi dell'angolo a delle funzioni trigonometriche, ecc. Ebbi la gioia di vedere non solamente come, grazie all'Analisi che avevo concepito e sviluppato, le formule spesso molto complicate e asimmetriche, che sono alla base di questa teoria<sup>5</sup> si trasformavano in formule molto semplici e simmetriche, ma anche come il modo di svilupparle si armonizzava con i concetti. Infatti, non solo ogni formula che subentrava nel corso della trattazione poteva molto facilmente essere espressa a parole (ed era allora ogni volta l'espressione di una legge specifica), ma anche i passaggi da una formula all'altra apparivano al primo sguardo in modo semplice, come l'espressione simbolica d'un ragionamento concettuale condotto parallelamente. Con il metodo abituale l'idea era completamente oscurata dall'introduzione di coordinate arbitrarie che non avevano nulla a che fare con il soggetto, e il calcolo consisteva in uno sviluppo meccanico di formule che non apportavano nulla allo spirito e che dunque lo uccidevano. Al contrario qua, dove l'idea, che non era alterata da qualcosa di estraneo, traspariva in tutta la sua chiarezza attraverso le formule, lo spirito era coinvolto, anche durante lo svolgimento di una formula, dallo sviluppo progressivo dell'idea. – Ora, questi successi mi sembravano giustificare la



$$(AB+BC) \wedge AA' = AB \wedge AA' + BC \wedge BB'$$

<sup>4</sup> Grassmann si trova a tu per tu, per la prima volta nella storia della matematica, con la proprietà oggi detta *anticommutativa*



$$u \wedge v = - v \wedge u$$

<sup>5</sup> Grassmann si riferisce alla Meccanica Celeste di Laplace

speranza di avere trovato in questa nuova Analisi il solo metodo conforme alla natura secondo il quale dovevano progredire tutte le applicazioni della matematica alla natura e secondo il quale bisognava ugualmente trattare la geometria se questa doveva condurre a dei risultati generali e fruttuosi. Fui così portato alla decisione di consacrare la mia vita alla dimostrazione, allo sviluppo e all'applicazione di questa Analisi. Dedicando tutto il mio tempo libero a questo soggetto ho colmato a poco a poco le lacune che avevo lasciato nel lavoro episodico di prima.

.....  
Attraverso le applicazioni alla fisica ho creduto di aver mostrato il carattere, indispensabile della nuova scienza e dell'analisi che contiene. Con l'occasione spero di poter dimostrare che questa scienza nella sua forma concreta, cioè nelle sue applicazioni alla geometria, costituisce una eccellente materia d'insegnamento, suscettibile di una trattazione elementare. Questa trattazione, vista la destinazione di questa opera, non ha potuto trovare posto qua. Tuttavia nel corso di uno studio elementare della statica, quando si voglia vederne i risultati concreti e generali (che si possono anche presentare come costruzioni) è assolutamente necessario adoperare il concetto di somma e di prodotto di segmenti e sviluppare attraverso questo le leggi principali. Sono sicuro che chi abbia provato una sola volta a servirsi di questi concetti non li abbandonerà mai più.

Se ho riconosciuto ogni suo diritto a questa nuova scienza, della quale ho presentato qui una elaborazione almeno parziale e se non voglio minimamente ridurre i diritti che lei può reclamare nel dominio del sapere, non penso di aver meritato per questo il rimprovero di essere presuntuoso; perché la verità domanda il suo diritto; lei non è l'opera di chi la fa conoscere e scoprire; lei ha la sua essenza e la sua esistenza in lei stessa; sarebbe tradire la verità ridurre i suoi diritti per falsa modestia. Ma io devo domandare molta indulgenza per quello che è stato il mio lavoro in questa scienza. Perché sono consapevole, malgrado gli sforzi che ho compiuto per presentarla, di tutte le imperfezioni presenti in questa opera.

E' vero che ho lavorato su questa materia più volte in più modi: talvolta attraverso una spiegazione dei teoremi alla maniera euclidea col massimo rigore, talvolta sotto la forma di uno sviluppo coerente che presenti la migliore vista d'insieme, talvolta sotto una forma che combini le due; è in questo senso che ho cominciato con una introduzione che dia una visione d'insieme e ho continuato sviluppando il materiale alla maniera euclidea. Sono in effetti ben cosciente che una versione ulteriore mostrerebbe certe cose in modo più rigoroso e più chiaro. Ma convinto che non vi sarebbe mai completa soddisfazione e che la presentazione sarebbe stata sempre deficitaria rispetto alla semplicità e alla verità, ho deciso di pubblicare la forma che mi sembra attualmente la migliore. Spero nell'indulgenza del lettore in modo particolare perché il mio mestiere mi lascia poco tempo e non mi dà la possibilità di fare conferenze su questa scienza o per lo meno su argomenti vicini e raggiungere così la freschezza che deve ispirare e vivificare ogni cosa se deve apparire come una parte vitale dell'organismo del sapere. Anche se aspiro a una attività professionale che sia basata essenzialmente su tali comunicazioni scientifiche non ho tuttavia creduto di dover rinviare l'elaborazione di questa scienza fino a quando non abbia ottenuto questo risultato tanto più che spero che la pubblicazione di questo lavoro possa avvicinarmi a questo obiettivo.

Stettino 28 Giugno 1844