

IV Lezione

1. Baricentro di un parallelogramma

Per calcolare il baricentro del parallelogramma Archimede suggerisce due metodi uno si basa su un ragionamento per assurdo e l'altro su un ragionamento diretto.

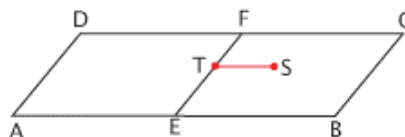
Vediamo i due metodi

Teorema 5

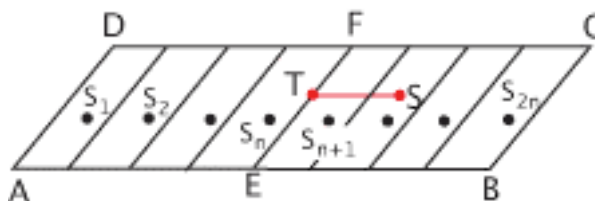
Il baricentro di un parallelogramma si trova sul segmento che congiunge i punti medi di due lati opposti.

Dimostrazione.

Sia S il baricentro del parallelogramma $\mathcal{A}$. Se, per assurdo, S non si trova sulla mediana EF , facciamo la parallela al lato AB per S e sia T il punto in cui questa parallela incontra il segmento EF .



Dividiamo il dato parallelogramma in tanti piccoli parallelogrammi uguali tra loro e in numero pari, come in figura col lato più piccolo di TS .



Risulta

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{2n}$$

e essendo i parallelogrammi tra loro congruenti avranno i baricentri $S_1, S_2, \dots, S_{2n}$, nella stessa posizione dunque questi punti saranno allineati su una retta parallela ad AB e la distanza tra due baricentri consecutivi sarà uguale al lato del piccolo parallelogramma e quindi, per costruzione, sarà minore di TS . Le figure $\mathcal{A}_i$ hanno dunque tutte lo stesso peso e i baricentri allineati ed equidistanziati. Possiamo allora applicare il teorema 3 e concludere che il baricentro S di $\mathcal{A}$ dovrà trovarsi nel punto medio del segmento $S_n S_{n+1}$. Ma questo è assurdo dato che la distanza del punto medio tra $S_n S_{n+1}$ da EF , calcolata su una parallela a AB , è sicuramente minore della distanza di S_n da S_{n+1} che è minore di ST per costruzione.

Notiamo che la dimostrazione non suppone nulla sul baricentro del parallelogramma ipotizza solo che figure congruenti (che sono particolari figure simili) hanno il baricentro nella stessa posizione (postulato 5).

Corollario

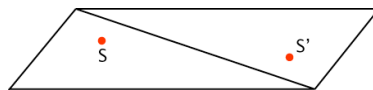
Il baricentro di un parallelogramma è nel punto di incontro delle diagonali

Infatti, per il teorema precedente, esso si trova sul punto di incontro delle due mediane che è anche il punto di incontro delle diagonali.

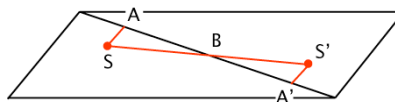
Archimede da una seconda dimostrazione di questo teorema senza usare il ragionamento per assurdo.

Seconda dimostrazione del teorema 5.

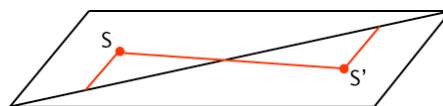
Dividiamo con una diagonale il parallelogramma in due triangoli uguali. I due baricentri (che non sappiamo dove si trovino) si devono trovare nella stessa posizione: se S si trova in una determinata posizione S' si trova nella stessa posizione nel secondo triangolo.



I due triangoli che hanno lo stesso peso perché sono uguali e quindi il baricentro della loro somma, cioè il baricentro del parallelogramma, sarà nel punto medio tra S ed S' . Possiamo trovare questo punto con un po' di geometria. Dato che i due punti S ed S' sono nella stessa posizione nei due triangoli, tracciando le parallele SA e $S'A'$ allo stesso lato del parallelogramma, abbiamo i segmenti SA e $S'A'$ uguali. Congiungiamo S con S' e sia B il punto in cui questa retta incontra la diagonale



I due triangoli ASB e $A'S'B$ che si vengono a formare sono uguali. Infatti, come abbiamo visto, $AS = A'S'$, l'angolo ASB è uguale all'angolo $A'S'B$ perché AS è parallela ad $A'S'$ e anche l'angolo SAB è uguale all'angolo $S'A'B'$ dato che AS è parallelo ad $A'S'$. Ne segue che $SB = BS'$ e quindi il baricentro del parallelogramma si trova nel punto B sulla diagonale.



Ripetendo lo stesso ragionamento con l'altra diagonale deduciamo che il baricentro si trova anche sulla seconda diagonale e dunque si trova nel loro punto d'incontro.

Vediamo ora come Archimede calcola il baricentro di un triangolo

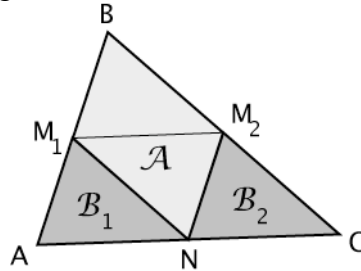
2. Baricentro di un triangolo

Teorema 6

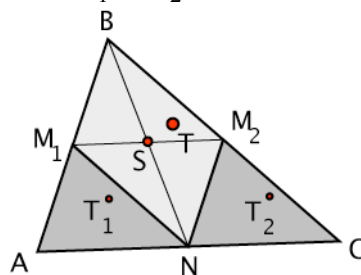
Il baricentro di un triangolo si trova sulla mediana.

Dimostrazione

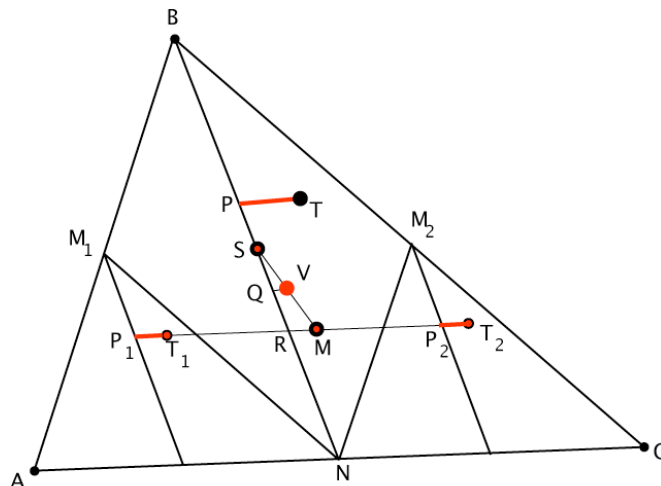
Siano N , M_1 e M_2 i punti medi dei tre lati del triangolo. La retta NM_1 è parallela al lato BC mentre la retta NM_2 è parallela al lato AB . Il dato triangolo resta diviso in quattro triangoli uguali simili al triangolo iniziale ma con le misure lineari dimezzate.



I triangoli B_1 e B_2 sono uguali tra loro e simili al triangolo ABC i loro baricentri, per il postulato 5, sono similmente collocati. Del parallelogramma $\mathcal{A}$ conosciamo il baricentro (per il teorema precedente) e il suo peso che è il doppio di quello dei due triangoli essendo doppia la sua area. Sia T il baricentro del triangolo ABC , T_1 e T_2 i baricentri dei due triangoli piccoli B_1 e B_2 e S il baricentro del parallelogramma.



Calcoliamo il baricentro della somma $B_1 + B_2 + \mathcal{A}$. Il baricentro di $B_1 + B_2$ si trova nel punto medio M di T_1 e T_2 e, dato che $B_1 + B_2$ pesa come $\mathcal{A}$, il baricentro di $(B_1+B_2) + \mathcal{A}$ si trova nel punto medio tra M ed S . Sia V tale punto. Supponiamo che tale punto V , che è il baricentro del triangolo, non si trovi sulla mediana BN e sia TP la sua distanza (calcolata su un segmento parallelo alla base AC) dalla mediana.



Anche i baricentri T_1 e T_2 dei due triangoli simili AM_1N e CM_2N si troveranno a una distanza dalla mediana uguale alla metà di TP (dato che le dimensioni lineari dimezzano). Dunque

$$2P_1T_1 = 2P_2T_2 = PT.$$

Dato che M è il punto medio tra T_1 e T_2 ed R si trova sulla mediana abbiamo che

$$RM = P_1T_1$$

ma allora, dato che V è il punto medio tra M ed S , la distanza QV di V dalla mediana sarà la metà di RM cioè un quarto di PT

$$QV = PT/4$$

Ma V è il baricentro del triangolo dunque i due punti T e V dovrebbero coincidere e quindi dovrebbero avere la stessa distanza dalla mediana cioè dovrebbe risultare

$$QV = PT = PT/4$$

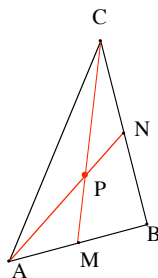
e questo è possibile se e solo se $PT = 0$ cioè T si trova sulla mediana.

Corollario

Le tre mediane di un triangolo si incontrano in un unico punto che è il baricentro del triangolo
Infatti il baricentro è unico e, per il teorema precedente, si trova sulle tre mediane.

Ricordiamo un risultato sulle mediane di un triangolo che ha, in questo contesto, conseguenze fisiche.

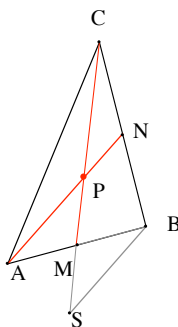
Consideriamo un triangolo ABC e sia P il punto di incontro delle due mediane CM e AN .



risulta allora che

$$CP = 2PM,$$

Costruiamo la retta BS parallela a AN



abbiamo che i triangoli CSB e CPN sono simili e dato che $CN = NB$ risulta $CP = PS$. D'altra parte i triangoli APM e BSM sono uguali perché hanno i tre angoli uguali e il lato $AM = MB$. Ne segue che $PM = MS$ e quindi $CP = 2PM$.

Il baricentro P di un qualsiasi triangolo resta dunque univocamente determinato su una mediana come quel punto che la divide secondo il rapporto $2:1$.

Questo risultato si può interpretare in termini di distribuzioni discrete di pesi nel modo seguente

Corollario

Sia ABC un triangolo omogeneo e siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ tre distribuzioni elementari di peso u (stesso peso) applicate in A , B , C rispettivamente. Allora il baricentro del triangolo pieno è uguale al baricentro della distribuzione $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}$.

Basta usare il teorema della leva: $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ ha baricentro nel punto medio M del lato AB del triangolo e peso doppio dunque il baricentro tra $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C}$ è nel punto P del segmento MC per il quale $MP : PC = 1 : 2$.

La tavola seguente confronta il baricentro di un triangolo pieno col baricentro di un triangolo vuoto
Tavola 16

Per i quadrilateri le cose vanno diversamente che per i triangoli. Intanto i soli quadrilateri per i quali il baricentro dei vertici (ugualmente pesanti) coincide col baricentro del quadrilatero pieno sono i parallelogrammi. La tavola seguente riguarda un caso particolare ma significativo.

Tavola 17

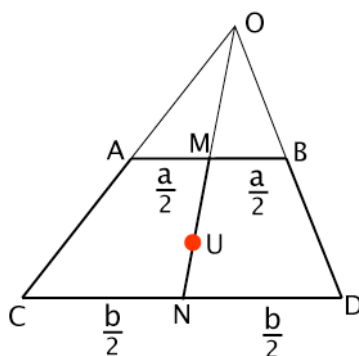
3. Baricentro di un trapezio

Teorema 7

Dato un trapezio di lati paralleli AB e CD il baricentro si trova in un punto U sulla retta che congiunge i punti medi M di AB e N di CD in modo che il rapporto

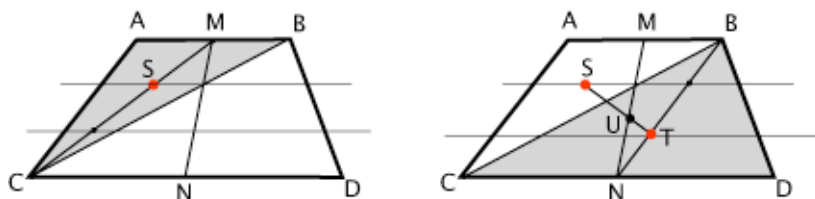
$$MU : UN = (2b+a) : (2a+b)$$

Essendo a e b le misure di AB e CD rispettivamente

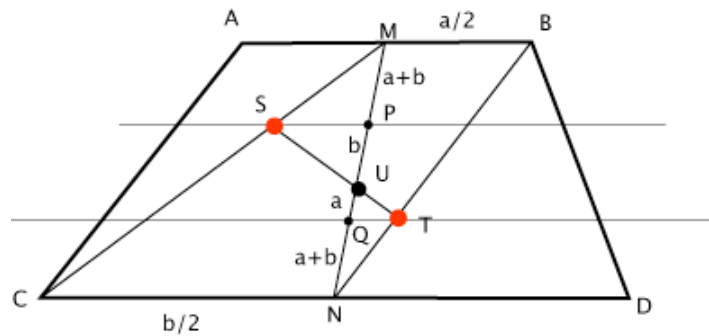


Dimostrazione

Che il baricentro si trovi sulla retta MN è chiaro perché su quella retta si trova il baricentro dei triangoli OAB e OCD . Dividiamo ora in trapezio in due triangoli e calcoliamo i baricentri di questi:



Il baricentro del trapezio sarà sulla retta ST e, dovendo trovarsi anche sulla retta MN si troverà nel loro punto U di intersezione. Ragionando su triangoli simili si arriva alla tesi.



- SPM simile a CNM quindi $SP : b/2 = 1 : 3$
- TQN simile a BMN quindi $TQ : a/2 = 1 : 3$
- segue che $SP : QT = b : a$
- Il segmento PQ viene diviso da U nel rapporto $a : b$
- $PQ = MP = QN$ e quindi $MU : UN = a+2b : 2a+b$.

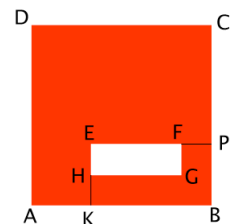
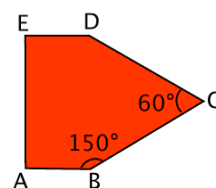
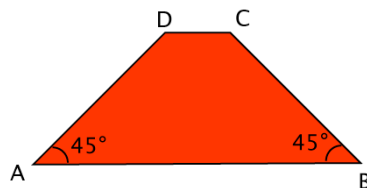
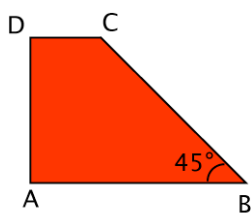
Più dettagliatamente

$PU : UQ = b : a$ implica che $PU : b = UQ : a$ e ponendo tale rapporto uguale a k si ottiene $PU = kb$, $UQ = ka$. Dunque $PQ = ka + kb$ e $MU = MP + PU = (ka + kb) + kb$ e $UN = UQ + QN = ka + (ka + kb)$. Facendo i rapporti si ottiene la tesi.

4. Calcolo del baricentro di figure composte.

Si danno ai ragazzi, divisi in gruppi di lavoro, delle sagome di legno e una tavola con la sagoma disegnata e si chiede di risolvere teoricamente alcuni problemi tra cui il calcolo del baricentro della sagoma assegnata e si chiede poi di trasportare il punto trovato sulla tavoletta per verificare che la corrispondenza del calcolo teorico con l'esperienza concreta.

Queste sono alcune delle forme assegnate.



[Tavola 18](#) , [Tavola 19](#) , [Tavola 20](#) , [Tavola 21](#) , [Tavola 22](#)