II Lezione

Archimede scrisse un giorno al re Gerone, del quale era parente ed amico, che si poteva con una certa forza sollevare un certo peso. E si dice che, preso da entusiasmo per il vigore della propria dimostrazione, Archimede aggiunse che se fosse esistita un'altra terra, egli avrebbe sollevato questa dopo essersi trasferito sull'altra.

Plutarco, Vita di Marcello

1. Le prime conseguenze dei postulati di Archimede

Viene distribuita agli studenti la scheda "**Postulati di Archimede**" che riassume i 5 postulati. E vengono suggeriti semplici esercizi sul calcolo di figure equivalenti usando i postulati

Tavola 3

Tavola 4

Si propongono esercizi sul calcolo del baricentro usando solo i postulati

Tavola 5

Tavola 6

2. I primi teoremi

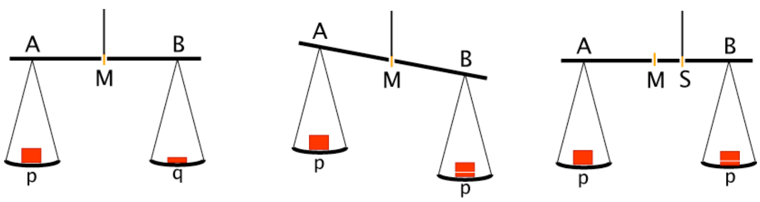
Il primo teorema che Archimede dimostra è dimostra è l'affermazione inversa del postulato 2.

Teorema 1

Se due distribuzioni elementari si equilibrano nel loro punto medio allora i due pesi sono uguali.

Dimostrazione.

Sia $\mathcal{A}$ la distribuzione elementare di peso p applicato in A e $\mathcal{B}$ la distribuzione elementare di peso q applicato in B. Supponiamo che il baricentro di $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ sia nel punto medio M tra A e B, vogliamo dimostrare che, in queste ipotesi p=q.



Supponiamo per assurdo che sia q < p. In questo caso se aggiungiamo a B il peso p - q , il baricentro della nuova distribuzione si sposta in un punto S più vicino a B (postulato 3). Ma questo è assurdo perché questa distribuzione è costituita da due distribuzioni elementari di pesi uguali e quindi, per il postulato 2, ha il baricentro nel punto medio tra A e B e non in S come avevamo detto. Lo stesso ragionamento si applica se fosse q > p. Poiché dunque q non può essere ne più piccolo ne più grande di p ne segue che p=q.

Teorema 2

Se $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, ... , $\mathcal{A}_m$, *sono m distribuzioni (non necessariamente elementari) dello stesso peso p e se i loro baricentri* A_1 , A_2 , ... , A_m *sono equidistanziati, e allineati allora il baricentro della distribuzione*

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + ... + \mathcal{A}_m$$

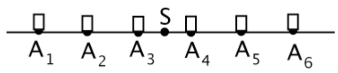
si trova nel punto medio del segmento A_1A_m.

Dimostrazione

L'idea della dimostrazione è semplice. Cominciamo con l'osservare che le n distribuzioni date $\mathcal{A}_i$ sono equivalenti, per il postulato 1, alle distribuzioni elementari $\mathcal{A}_i$' con peso p applicato in A_i . Per il postulato 4 abbiamo allora che

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + ... + \mathcal{A}_m \approx \mathcal{A}'_1 + \mathcal{A}'_2 + \mathcal{A}'_3 + ... + \mathcal{A}'_m$$

Supponiamo che m=2n sia pari. Dato che i punti A_1 , A_2 , ...A_m sono equidistanziati, e allineati, il punto medio S di A_1A_m coincide col punto medio di A_2A_{m-1} che, a sua volta coincide col punto medio di A_3 A_{m-2} e così via.



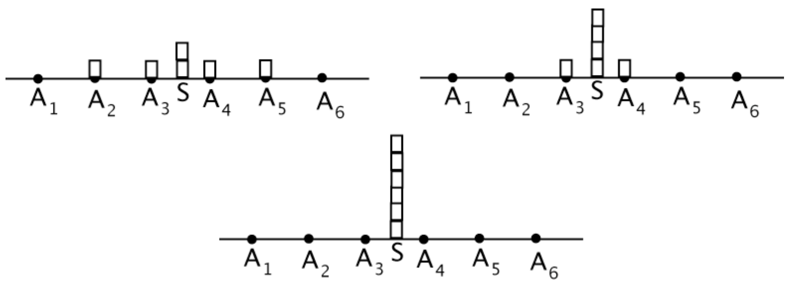
Sia $\mathcal{B}$ è la distribuzione elementare di peso 2p applicato in S.
Sommando gli estremi a due a due abbiamo per i postulato 1 e 2

$$\mathcal{A}'_1 + \mathcal{A}'_{2n} \approx \mathcal{B} \quad , \quad \mathcal{A}'_2 + \mathcal{A}'_{2n-1} \approx \mathcal{B} \quad , ... , \quad \mathcal{A}'_n + \mathcal{A}'_{n-1} \approx \mathcal{B}$$

e quindi, per il postulato 4,

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + ... + \mathcal{A}_m \approx n\mathcal{B}$$

La seguente successione di figure illustra la dimostrazione nel caso m=6



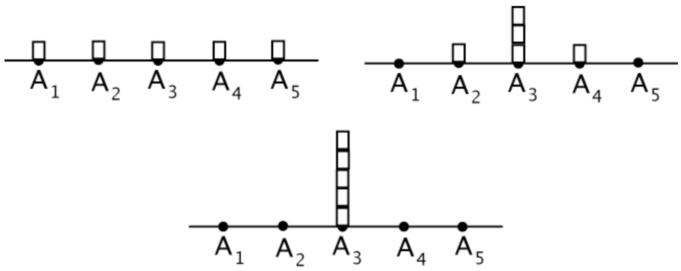
Se m=2n-1 è dispari il punto medio tra A_1A_m che coincide col punto medio tra A_2A_{m-1} ecc è il punto A_n . Tenendo conto di questo e usando la medesima strategia otteniamo

$$\mathcal{A}'_1 + \mathcal{A}'_{2n-1} \approx \mathcal{B} \quad , \quad \mathcal{A}'_2 + \mathcal{A}'_{2n-2} \approx \mathcal{B} \quad , ... , \quad \mathcal{A}'_{n-1} + \mathcal{A}'_{n+1} \approx \mathcal{B}$$

e quindi

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + ... + \mathcal{A}_m \approx (n-1)\mathcal{B} + \mathcal{A}'_n$$

dove $\mathcal{A}'_n$ è la distribuzione elementare di peso p applicato in S = A_n. La seguente successione di figure illustra la dimostrazione nel caso m=5



La seguente tavola è una applicazione di questo teorema per il calcolo del punto di equilibrio per una distribuzione complicata. Si raggiunge facilmente lo scopo se si riescono ad individuare lunghe file di pesi equidistanziati.

Tavola 7

Tavola 8

3. Se fosse esistita un'altra terra ..

I celebri teoremi 6 e 7 del trattato di Archimede sull'equilibrio delle figure piane permettono di trovare il baricentro di una distribuzione $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ conoscendo i baricentri di $\mathcal{A}$ di $\mathcal{B}$ e i rispettivi pesi (totali) delle due distribuzioni. Essi si riducono al così detto *principio della leva* che ora viene dimostrato a partire dai postulati e dai teoremi precedenti e non accettato come evidenza sperimentale.
Se p e p sono i pesi delle due distribuzioni Archimede considera prima il caso in cui i due pesi siano tra loro commensurabili (teorema 6) e poi il caso generale nel quale il rapporto tra i pesi è un qualunque numero reale razionale o irrazionale (teorema 7). Ricordiamo che due grandezze p e q (lunghezze, aree, volumi, pesi, temperature ecc) sono tra loro *commensurabili* se esiste una grandezza u a loro omogenea tale che

$$p = n\,u \ , \ q = m\,u$$

in questo caso il rapporto $p : q$ è uguale al rapporto tra i numeri interi n ed m ed è un numero razionale

$$p : q \ = n : m$$

L'uguaglianza tra rapporti che abbiamo scritto stabilisce una "analogia" (in greco analogos = stesso rapporto) tra il modo di rapportarsi tra loro dei pesi con quello dei numeri: q è ottenuto da p dividendo p in n parti uguali e prendendo m di quelle parti esattamente come in numero m è ottenuto da n, m è dato da n unità e una unità è la n-esima parte di n.
Una scoperta straordinaria, risalente alla scuola pitagorica, fu l'esistenza di *rapporti incommensurabili* per i quali non era possibile trovare una grandezza u per quanto piccola fosse che misurasse esattamente sia p che q. Per fare un esempio di due pesi tra loro incommensurabili consideriamo un quadrato e un triangolo equilatero entrambi di lato a e supponiamo che queste figure siano formate da un materiale pesante e omogeneo uguale per le due figure. I loro pesi saranno dunque proporzionale alle loro aree.

Peso quadrato : peso triangolo = area quadrato : area triangolo = $a^2 : (a^2\sqrt{3})/4 = 4 : \sqrt{3}$

e il rapporto tra questi numeri è un numero irrazionale.

Teorema della leva nel caso commensurabile

Se $\mathcal{A}$ *è una distribuzione di peso* p *e baricentro in* A *e* $\mathcal{B}$ *è una seconda distribuzione di peso* q *e baricentro in* B, *allora* $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *ha il baricentro sul segmento* AB *in quel punto* S *per il quale*

$$AS : SA = q : p.$$

In particolare $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *è equivalente alla distribuzione elementare* $\mathcal{E}$ *di peso* p + q *concentrata in* S.

Possiamo intanto supporre che $\mathcal{A}$ sia una distribuzione elementare di peso p applicato ad A e che $\mathcal{B}$ sia una distribuzione elementare di peso q applicato in B dato che, per il postulato 4, questo non cambia il baricentro di $\mathcal{A}+\mathcal{B}$.

Dimostrazione nel caso commensurabile.

Consideriamo il caso in cui il rapporto tra i pesi sia razionale. Supponiamo cioè che

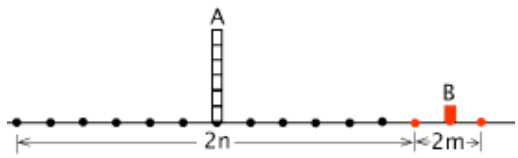
$$p = n\,u \;,\; q = m\,u$$

In figura $p = 6\,u$, $q = u$

Dividiamo la distribuzione $\mathcal{A}$ in 2n parti dello stesso peso e la distribuzione $\mathcal{B}$ in 2m parti dello stesso peso. Ogni parte di $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ avrà dunque il peso p/2. Abbiamo

$$\mathcal{A} = 2n\mathcal{A}_0 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B} = 2m\,\mathcal{B}_0$$

Dove $\mathcal{A}_0$ è la distribuzione elementare che ha peso u /2 applicato in A e $\mathcal{B}_0$ è la distribuzione elementare che ha peso u/2 applicato in B. Dividiamo ora il segmento AB in n+m parti uguali e aggiungiamo n parti dalla parte di A e m parti dalla parte di B.



In ognuna della parti intorno ad A sospendiamo 2n distribuzioni elementari $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{2n}$ ognuna di peso u/2 applicato nel punto centrale di ognuno dei 2n segmenti che abbiamo costruito in e facciamo lo stesso con le parti intorno a B: sospendiamo 2m distribuzioni elementari $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_{2m}$ di peso u/2 nei punti centrali dei segmenti intorno a B

La distribuzione $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{2n}$ così costruita ha peso n u = p, e per il teorema 2, baricentro in A essa è dunque equivalente ad $\mathcal{A}$. Analogamente $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \dots + \mathcal{B}_{2m}$ è equivalente a $\mathcal{B}$. Per il postulato 4 la distribuzione complessiva

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{2n} + \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \dots + \mathcal{B}_{2m}$$

è equivalente ad $\mathcal{A}$ +$\mathcal{B}$ ed ha quindi lo stesso baricentro. Ma questa ultima distribuzione è formata da 2n+2m parti dello spesso peso u/2 e coi baricentri equidistanziati quindi, per il teorema 2, il suo baricentro è nel punto di mezzo del segmento PQ.

Ne segue che il segmento PS= n+m = PA+AS ma PA = n per costruzione e quindi AS = m e quindi SB = n.