TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

DOTTORATO DI RICERCA
IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA

XXXII° Ciclo di dottorato

Capacità sensoriali e approccio intuitivo-geometrico nella pre-adolescenza

dottorando Daniele Pasquazi

A.A. 2019/2020

Docente Tutor: Prof. B. Scoppola

Coordinatore: Prof. A. Braides

a Franco

ai miei genitori

a Mirella, Edoardo e Lavinia

Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzi tutto, per questo mio lavoro durato circa 3 anni, le persone a cui è rivolta la dedica: i miei genitori che mi hanno permesso di studiare e raggiungere i miei desideri, mia moglie Mirella e i miei figli Edoardo e Lavinia che da quando fanno parte della mia vita hanno infuso dentro di me l'energia necessaria per superare tutti gli ostacoli che mi si pongono e mi pongo davanti.

Non basteranno mai le parole per ringraziare il mio maestro Franco Ghione: i suoi insegnamenti mi hanno permesso di conseguire un dottorato di ricerca in didattica della matematica e soprattutto di capire a quali ambiti della conoscenza fare riferimento per riuscire a far emergere le potenzialità dei ragazzi.

Un ringraziamento speciale va al relatore della mia tesi di dottorato, il prof. Benedetto Scoppola, per i suoi insegnamenti, per farmi continuamente partecipe delle sue intuizioni geniali, per la sua straordinaria umanità e, bene per me molto prezioso, per la sua amicizia.

Ringrazio tantissimo anche la prof.ssa Francesca Tovena che, nonostante i suoi numerosissimi impegni, mi ha sempre fornito spunti didattici molto interessanti.

Uno speciale e affettuoso ringraziamento è per Laura Catastini per avermi fatto conoscere per prima il rapporto esistente tra apprendimento della matematica e conoscenze neuroscientifiche.

Ringrazio con tutto il cuore i tre referee che hanno corretto la tesi: la prof.ssa Nicoletta Lanciano, la prof.ssa Gabriella Agrusti e il prof. Leonardo Fogassi; ringrazio quest'ultimo anche per la squisita cordialità con la quale mi ha ospitato ad alcune delle sue lezioni presso l'università di Parma.

Ringrazio anche la prof.ssa Manuela Piazza dell'università di Trento che mi ha consentito di seguire tutto il suo corso accademico e soprattutto per i preziosissimi colloqui di fine lezione.

Non dimentico di ringraziare il relatore della mia tesi di laurea, il prof. Corrado Falcolini che, attraverso un suo gesto ha permesso la mia introduzione nel mondo della ricerca in didattica.

Nel diparitmento di matematica, ringrazio per la loro amicizia i docenti con i quali ho avuto modo di parlare maggiormente: fra tutti, Alfonso Sorrentino, Riccardo Molle, Carmine di Fiore, Roberto Peirone, Andrea Iannuzzi; grazie anche al prof. Ciro Ciliberto per i preziosi consigli. Grazie, al prof. Casini Giovanni del dipartimento di fisica per la sua grande disponibilità e competenza.

Un caro saluto a tutti i dottorandi che ho incontrato in questi anni che mi hanno sempre donato, grazie alla loro giovane età, il loro sprint; voglio ricordare, a nome di tutti, Simone del dipartimento di psicologia cognitiva a Rovereto dell'università di Trento. Tra i dottorandi di Roma voglio ringraziare: Alessandra Boscolo per le interessanti chiacchierate in tema didattico, Flavio Blondeau, il mio compagno di stanza, soprattutto per avermi spronato a usare il Latex (finalmente!) per scrivere la mia tesi di dottorato, Riccardo Mariani per le varie consulenze sul latex e Alessio Troiani per la condivisione di pensieri.

Ringrazio infine tutto il personale della segreteria didattica del dipartimento di matematica con il quale ho potuto interagire: le dott.sse Luisa Montoro, Laura Filippetti, Solange Barcaccia, Simonetta De Nicola, Giorgio Chiarati e il grande Emanuele Gandola.

Introduzione

ll principale risultato di questa tesi è una chiara indicazione statistica del fatto che, nei preadolescenti, potenziando le capacità di percezione geometrica si determina un miglioramento nella risoluzione di problemi matematici, anche di carattere aritmetico e algebrico. Per ottenere questo potenziamento della percezione geometrica si possono utilizzare gli strumenti didattici tradizionali, che sono la riga e il compasso, ma anche materiali specifici che forniscano realizzazioni concrete di oggetti matematici astratti. Si mostrerà nella tesi che gli effetti positivi della manipolazione di oggetti concreti sono più duraturi della semplice rappresentazione geometrica dei concetti aritmetici ottenuta con riga e compasso. Inoltre, e questo sembra molto interessante in termini didattici, si discuterà l'evidenza sperimentale del fatto che la manipolazione continua a lavorare nella mente dei preadolescenti anche dopo le attività specifiche, permettendo di ottenere dopo un certo tempo risultati migliori di quelli che si erano ottenuti immediatamente dopo le suddette attività. La manipolazione di materiali, infine, può aiutare a comprendere, a partire da situazioni specifiche, la plausibilità di proprietà generali. Questa intuizione, nei preadolescenti, non è ancora la rigorosa deduzione assiomatico-deduttiva, ma è probabilmente ad essa propedeutica.

La prospettiva suggerita dalla tesi è dunque la seguente: le tecniche classiche di insegnamento, basate su lezioni frontali riguardanti algoritmi astratti e immediate verifiche scritte o orali, non rispettano i naturali processi di apprendimento dei preadolescenti. Una matematica basata su rappresentazioni geometriche e sulla manipolazione di materiali specifici permette un apprendimento molto più approfondito e duraturo.

Si vogliono qui di seguito accennare le argomentazioni che supportano queste idee che saranno da una parte fornite dai recenti contributi delle neuroscienze e dall'altra dalla storia dello sviluppo del pensiero matematico.

Nel Capitolo 1 si descriveranno i più importanti contributi forniti dalle neuroscienze relativamente all'apprendimento della matematica. In generale, gli studi che hanno portato a questi risultati, sono molto dettagliati perché ottenuti grazie alla rilevazione delle attivazioni di singoli neuroni nella corteccia dei macachi. Per ragioni di somiglianza, tali studi hanno guidato quelli analoghi sull'uomo anche se effettuati con strumenti meno precisi perché meno invasivi. Il modo in cui si attivano i neuroni coinvolti durante lo svolgimento di compiti «proto-aritmetici» confermano modelli teorici ideati per comprendere il fenomeno della rilevazione delle numerosità; vedremo che questi neuroni sono per lo più localizzati nella corteccia parietale. In particolare ce ne sono alcuni di questi che «scaricano» in maniera preferenziale quando si osserva un insieme costituito da un determinato numero di pallini. Altri, invece, aumentano la loro scarica durante l'osservazione di una successione di singoli pallini. Tutti questi neuroni occupano aree distinte del solco intraparietale e sono gli stessi che si attivano quando si eseguono compiti aritmetici anche mediante l'uso di simboli.

Ci sono diversi studi che portano a congetturare che, quando si pensa ad un numero, abbiamo la necessità di renderlo in qualche modo concreto: è noto che i bambini, come ancora gli adulti di popolazioni indigene, utilizzano parti del corpo per contare, come ad esempio le dita delle mani. Inoltre, si è scoperto che il solo pensare ad un numero induce uno spostamento della nostra attenzione verso una certa posizione dello spazio come a immaginare l'esistenza di una linea numerica sulla quale posizionare punti corrispondenti ai numeri pensati. Questa fenomeno, che prende il nome di effetto SNARC, già noto agli studiosi alla fine dell'ottocento, è conseguenza dell'attivazione di neuroni che si trovano in un altro punto della corteccia parietale più posteriormente rispetto ai precedenti: infatti, la loro scarica avviene sia per un calcolo mentale sia per il controllo dell'attenzione nello spazio. Abbiamo così la prova scientifica che, mediante un riferimento al concreto, si favorisce un approccio naturale alla matematica indispensabile, soprattutto, nei primi anni della formazione di un individuo.

Altri studi hanno permesso di capire che ci sono specifici neuroni della corteccia occipito-temporale dei macachi che rispondono in modo ultraselettivo durante la visione di determinati oggetti. In realtà questi neuroni scaricano anche durante la visione della medesima immagine semplificata il che dimostra una loro sensibilità alle forme elementari. Sempre per analogia è probabile che riconosciamo gli oggetti proprio per i loro tratti specifici piuttosto che per la loro forma globale. Il fatto veramente straordinario è che queste forme «elementari» sono ritrovabili in tutte le scritture del mondo con frequenze praticamente identiche a quelle delle immagini naturali. Quindi, «immagazziniamo» queste forme elementari naturalmente e le riutilizziamo nelle nostre produzioni grafiche e architettoniche.

Anche le figure geometriche si riconoscono dai loro tratti caratteristici. Nei poligoni però non basta, come nelle lettere, riconoscere le differenze a livello topologico tra una forma e l'altra (una «X» da una «L», ad esempio): due poligoni si diversificano anche per l'ampiezza dell'angolo tra due lati consecutivi (pensare a un parallelogramma e a un quadrato, per esempio).

Inoltre, il nostro sistema nervoso è predisposto ad accorpare, mediante meccanismi innati, gli elementi sensoriali sulla base di alcune regole dell'organizzazione percettiva per arrivare al riconoscimento di una determinata forma. Tutto ciò può rendere più difficile il riconoscimento degli elementi di una figura geometrica: infatti, la corretta percezione di un poligono, ad esempio, è ostacolata dal fatto che ogni sua parte può assumere diversi ruoli (una sua diagonale è un segmento ma può anche essere l'ipotenusa di un triangolo ecc.); oppure si pensi alla difficoltà che consegue la codifica delle parti in comune di due poligoni che s'intersecano.

E per tutti questi motivi che saper estrapolare le molteplici informazioni, non esplicite, che una figura geometrica possiede, richiede da parte nostra uno studio specifico molto approfondito che deve essere analitico così come lo è quello necessario per apprendere la lettura e imparare a scrivere.

Una volta che si è in grado di percepire completamente le figure si formeranno nella nostra mente dei loro modelli senz'altro utili per la formulazione di inferenze predittive. Quest'ultime più sono e più il modello mentale creato manifesta un maggior grado di «concretezza»: ciò incoraggia a fare riferimento ad esso sempre più frequentemente anche in contesti del tutto nuovi rispetto a quelli in cui è stato generato.

Inoltre, per la formazione di adeguati modelli mentali in ambito geometrico si ritiene il movimento, inteso come moto delle figure o di parti di esse, veramente essenziale. Si riporteranno le attuali scoperte neuroscientifiche che hanno permesso di attribuire al nostro sistema motorio compiti fondamentali in ambito cognitivo come non era mai stato fatto. Si mostrerà come il binomio percezione-azione, benché nascente in un contesto pragmatico, ha un peso fondamentale nella costituzione di significati e di compiti di ordine superiore.

Nel Capitolo 2 è spiegato in che modo si possono orientare le scelte didattiche per far si che gli studenti si approccino alla matematica seguendo il modo naturale di apprendere indicato dalle neuroscienze. Conoscere la storia dello sviluppo del pensiero matematico aiuta a seguire questo intento: le idee sono nate sempre da esigenze pratiche e, spesso, sono progredite, almeno negli stadi iniziali, richiedendo molti sforzi ma seguendo percorsi piuttosto elementari e primitivi. Il riferimento al concreto e, quindi, alla geometria era sistematico: da Pitagora ad Euclide, anche i concetti aritmetici erano spiegati facendo riferimento a segmenti, quadrati, figure in generale. Sappiamo che i progressi di tali idee non sono avvenuti senza difficoltà: questi ostacoli, frequentemente, sono gli stessi incontrati dagli allievi. L'insegnante deve essere in grado di esplicitarli prima per ideare poi adeguate attività finalizzate al loro superamento. Ciò è indispensabile agli studenti per fare autonomamente scoperte: il raggiungimento dei risultati sarà un elemento fondamentale per generare nuove e sempre più forti motivazioni all'apprendimento.

Sempre nel Capitolo 2 sono descritte, a titolo di esempio, le trattazioni di due argomenti importanti nella scuola del primo ciclo. A partire dalla congettura che le proprietà dei numeri necessitano di una concretizzazione per essere compresi più facilmente, viene riportata la descrizione di una attività didattica, svolta in due seconde medie, nella quale si era interessati alla ricerca di due numeri interi nota la loro somma e la loro differenza. Per creare adeguati modelli mentali è stato richiesto ai ragazzi di conferire ai numeri una forma usando un opportuno materiale: la sua manipolazione ha permesso di formulare congetture che potevano essere immediatamente verificate consentendo di pervenire, per lo più autonomamente, alla ideazione di una strategia risolutiva che portasse alla soluzione corretta del problema. L'efficacia dell'uso dei materiali è stata anche testata sottoponendo i ragazzi a problemi contestualizzati in ambiti diversi da quelli visti durante le attività didattiche. I risultati ottenuti hanno acquisito una maggiore rilevanza quando gli studenti, senza aver avuto la possibiltà di rivedere in classe tali argomenti, hanno affrontato problemi simili alcuni mesi dopo la fine delle attività.

Assolutamente fondamentale, nel primo ciclo d'istruzione, è senza dubbio il tema delle superfici e il concetto di equivalenza tra superfici. E' piuttosto semplice per gli studenti, riconoscendo due figure uguali, dedurre l'uguaglianza di ogni loro parte corrispondente; non è altrettanto agevole concepire in due figure diverse, la presenza di uguaglianze. E' indispensabile, dunque, per risolvere un problema geometrico, essere in grado di estrapolare tutte le informazioni che una figura contiene. Per tutti questi motivi riteniamo di assoluta importanza stimolare le capacità percettive degli studenti mediante l'uso di oggetti geometrici concreti.

Leonardo da Vinci sembra aver intuito la straordinaria potenza del movimento per favorire la percezione geometrica: era solito trasformare, immaginando opportuni spostamenti, le sue bellissime figure in quadrati o rettangoli ad esse equivalenti. Per questo sono state ideate diverse attività didattiche, adatte a studenti del primo ciclo d'istruzione ispirate ai disegni di Leonardo presenti nel Codice Atlantico.

Infine, si è voluto sottolineare che l'uso degli strumenti didattici aiuta senz'altro a ipotizzare la validità generale di certe proprietà scoperte in casi specifici. Non si può certamente parlare di dimostrazioni formali ma sicuramente si tratta di atti dimostrativi propedeutici alle deduzioni di tipo euclideo e assolutamente compatibili con le capacità degli studenti ai quali si sta facendo riferimento. E' in questo modo, infatti, che si vuole contribuire a formare il loro pensiero razionale.

L'attività didattica descritta nel Capitolo 2, per quanto abbia fornito interessanti indicazioni, è priva di un'indagine psicometrica necessaria per misurare rigorosamente i progressi che le attività hanno determinato negli studenti. Ecco perché nel Capitolo 3, per rilevare l'approccio predominante in un gruppo di preadolescenti di seconda media nella risoluzione di problemi geometrici, si è realizzata un'indagine statistica basata sulla CTT (Classical test theory). Non potendo indagare su tutti gli ambiti disponibili ci si è limitati ad un argomento che, come detto, è fondamentale nella didattica della matematica nella scuola secondaria di primo grado e cioè il concetto di area di superfici rettilinee e quello di equivalenza. L'esperienza maturata nel passato ha fatto ipotizzare che gli studenti predilagano giungere alla soluzione, in questo tipo di problemi, facendo affidamento soprattutto a calcoli anche in casi in cui evidenti deduzioni geometriche permettano di evitarli. Si ipotizza che questa preferenza dipenda da una scarsa fiducia nelle proprie capacità intuitive-geometriche probabilmente perché poco stimolate.

Poiché attraverso un test iniziale, somministrato dopo opportuna validazione, si è potuta verificare la veridicità della congettura, nella seconda fase dell'esperimento si sono avviate attività didattiche direttamente nelle classi, volte a potenziare le capacità percettive-geometriche degli studenti. Tipicamente, nei disegni di ricerca convenzionali, vengono coinvolti due gruppi di soggetti. In uno di questi, denominato gruppo sperimentale, viene effettuato uno specifico intervento che dovrebbe influire sull'acquisizione di una determinata capacità. Nell'altro, detto gruppo di controllo, invece, di solito, non viene effettuato alcun trattamento.

Il disegno utilizzato in questo esperimento, pur avendo preso spunto da altri già esistenti e comprovati, ha subito delle modifiche per essere adattato a esigenze specifiche: infatti, si è dovuto necessariamente tener conto della particolarità dell'indagine effettuata e, soprattutto, che questa era svolta all'interno di una scuola durante l'orario curricolare. Si sono quindi studiati interventi specifici che portassero un contributo efficace a tutti. Per questo motivo, anche gli studenti del gruppo di controllo sono stati impegnati in attività mirate. Tuttavia, quelle riservate al gruppo sperimentale, hanno avuto una natura prettamente laboratoriale: gli studenti hanno potuto rispondere ai vari problemi aperti che venivano posti aiutandosi con oggetti matematici concreti messi loro a disposizione. Gli studenti del gruppo di controllo, invece, di fronte ai medesimi problemi, hanno maturato le loro risposte senza poter usufruire degli stessi ausili didattici dei loro compagni limitandosi, per lo più, a eseguire disegni sul proprio quaderno.

Subito dopo gli interventi nelle classi, tre da circa due ore, si è proceduto somministrando in ciascun gruppo un secondo test volto a verificare se le attività eseguite avessero modificato l'approccio risolutivo degli studenti da aritmetico a intuitivo-geometrico. Tale test, era del tutto simile al precedente, per l'ambito disciplinare dei quesiti, per il loro numero, per la loro distribuzione, per gli obiettivi generali che s'intendevano verificare e ha confermato le ipotesi relativamente all'effetto dei trattamenti su entrambi i gruppi testati.

Infine, si è voluto verificare se gli studenti che avevano manifestato di aver cambiato o, quanto meno provato a cambiare, il proprio approccio risolutivo dal primo al secondo test, continuassero a mantenerlo ancora 6 mesi dopo. Per questo, dopo tale periodo di tempo, agli studenti dei due gruppi è stato somministrato un terzo test: ciò ha costituito un'altra particolarità del disegno di ricerca utilizzato.

L'analisi dei risultati ottenuti ha, anche in questo caso, confermato quanto era stato congetturato inizialmente: nel tempo, l'effetto dei due trattamenti si manifestava in modo significativamente diverso negli studenti appartenenti ai due gruppi. In questo modo, si è potuto apprezzare l'effetto che l'utilizzo dei materiali didattici ha generato sui risultati degli studenti e, in particolare, sulla loro modalità di approccio risolutivo dei problemi geometrici proposti.

Capitolo 1

Apprendimento della matematica: i contributi delle neuroscienze.

1.1 Introduzione

Saper leggere e scrivere, saper suonare uno strumento, comprendere la matematica, non sono abilità presenti alla nascita e non si sviluppano, nel corso della vita, naturalmente; hanno tutte, infatti, bisogno di un apprendimento specifico. Soffermandoci in particolare sulla matematica sappiamo che non ereditiamo né dalla nostra specie né da altre una struttura neuronale ad essa dedicata; l'essere umano si occupa di matematica da poco in confronto ai tempi di evoluzione di un vivente. Tuttavia, sappiamo che chiunque si occupi di questioni matematiche, utilizza i medesimi circuiti cerebrali: questo vuol dire che quei circuiti che per ragioni evoluzionistiche si sono specializzati per altre funzioni si sono successivamente adattati, evidentemente meglio di altri, per la matematica.

Ma quali erano, dunque, le funzioni primordiali di tali aree? Quali sono e dove si trovano le aree corticali che per un *reciclaggio neuronale* sono quelle maggiormente coinvolte durante lo studio della matematica?

Partiamo dai modi in cui possiamo valutare la numerosità di un insieme senza utilizzare il conteggio. Questi sono esattamente due e sono:

1) il sistema del senso del numero (Approximate Number System, ANS);

2) il sistema d'individuazione di oggetti multipli (Object tracking system, OTS o "subitizzazione").

Si descriverà il modello più accreditato atto a spiegare in che modo si valutano la numerosità di un insieme di oggetti. Poiché nei macachi è possibile fare indagini molto particolareggiate si è potuto comprendere che, per tali funzioni, sono coinvolti neuroni che si trovano per lo più nel solco intraparietale. Grazie a questi risultati si è potuto giungere, per mezzo di indagini meno invasive rispetto a quelle adottate per i macachi, ad analoghe scoperte per l'essere umano. Inoltre, molti esperimenti comportamentali hanno permesso di capire che quando si pensa ad un numero abbiamo bisogno di collocarlo nello spazio, ad esempio su una retta, per renderlo concreto: infatti, le rilevazioni corticali condotte con risonanza magnetica funzionale hanno permesso di capire che durante l'esecuzione di semplici compiti aritmetici si attivano le medesime regioni neurali, sempre nella corteccia parietale ma in una zona più posteriore al solco intraparietale, che si attivano quando effettuiamo degli spostamenti oculari.

Dopo aver descritto le aree del nostro cervello che si occupano di compiti aritmetici si tratterà di quelle che sono coinvolte nello studio della geometria: per quest'ultime non si hanno ancora a disposizione, comunque, informazioni parimenti dettagliate alle prime. Tuttavia, si ritiene che i molteplici studi a livello neuronale relativi alla lettura possono essere comunque molto utili per congetturare sulle modalità di apprendimento in geometria con particolare riferimento alla percezione delle figure: far sviluppare quest'ultima capacità nei preadolescenti è di fondamentale importanza in considerazione del peso che hanno nella risoluzione dei problemi geometrici.

Per questo motivo, nella parte finale del capitolo, si descrive il funzionamento del nostro sistema motorio: si comprenderà in che modo l'azione può influire sulla percezione. Tali scoperte consegnano al sistema motorio compiti cognitivi di ordine superiore: è per questi motivi che si ritiene debbano essere tenute in considerazione nella didattica della matematica.

1.2 Il sistema del senso del numero

La capacità d'estrarre informazioni relative alla numerosità d'insiemi, di percepire differenze numeriche tra insiemi diversi e di calcolare la loro somma, seppur in modo approssimativo, viene tipicamente denominata *senso del numero*. Gli esperimenti eseguiti da Izard (2009) dimostrano che neonati di 49 ore di vita sono in grado di discriminare per insiemi numerosi purché si trovino nel rapporto di 1 a 3 indipendentmente dallo stimolo sensoriale utilizzato ([28]). Un altro fatto sorprendente scoperto da McCrink (2004) è che natanti di 9 mesi sanno riconoscere sia un'addizione che una sottrazione congruente da una incongruente ([41]). Si è ormai certi che queste siano abilità innate ereditate per continuità filogenetica. Esperimenti di Jordan (2005) con i macachi ([35]) e di Rugani (2009) con i pulcini ([65]) dimostrano che certe capacità di discriminazione numerica sono presenti anche in certe specie animali. E' stato infine provato anche da Piazza (2010), che il senso del numero migliora nel corso della vita: raggiunge la capacita' dell'adulto intorno ai 15 - 20 anni, quando insiemi dal rapporto 7:8 diventano facilmente discriminabili ([55]).

1.3 Il sistema d'individuazione di oggetti multipli

Un'altra modalità, anch'essa innata, attraverso la quale l'essere umano valuta numerosità è data dal *sistema d'individuazione di oggetti multipli* o, più brevemente, *subitizzazione* che consiste nella capacità di fornire in modo rapido una stima numerica esatta degli elementi di un insieme senza effettuare alcun conteggio. Non dipende dalla disposizione spaziale degli stimoli, nè dalla forma degli oggetti presentati purché occupino posizioni ben distinte e gli elementi da individuare siano distinguibili dallo sfondo. La cosiddetta ipotesi *dominio-generale* stabilisce che la subitizzazione non riflette un sistema deputato alla percezione del numero, ma riflette l'architettura del nostro sistema visuo-attentivo, che ha una capacità limitata e ci permette di individuare non più di 3-4 oggetti contemporaneamente.

1.4 L'estrazione delle numerosità

Come fa il sistema del numero ad estrarre le numerosità? Non c'è una risposta definitiva, esistono vari modelli. Quello che vogliamo considerare in questa tesi è stato elaborato da Deahene (1993) e si chiama *detettore delle numerosità*([14]). Tale modello, che gli esperimenti condotti da Revkin (2008) ha confermato ([60]), prevede (Figura 1.1):

1. una fase di registrazione dello stimolo visivo e di segmentazione dell'immagine rispetto allo sfondo;

2. una fase di normalizzazione, che porta a non considerare le differenze per forma, per posizione, per dimensione. Quindi per ogni oggetto vi è un puntatore teorico nel nostro cervello;

3. fase dell'accumulazione: questi oggetti vengono sommati;

4. fase di rappresentazione del numero: ci sono popolazione di neuroni che si specializzano nella rappresentazione di singole numerosità. Naturalmente si riscontra sempre un certo errore proporzionale alle numerosità.

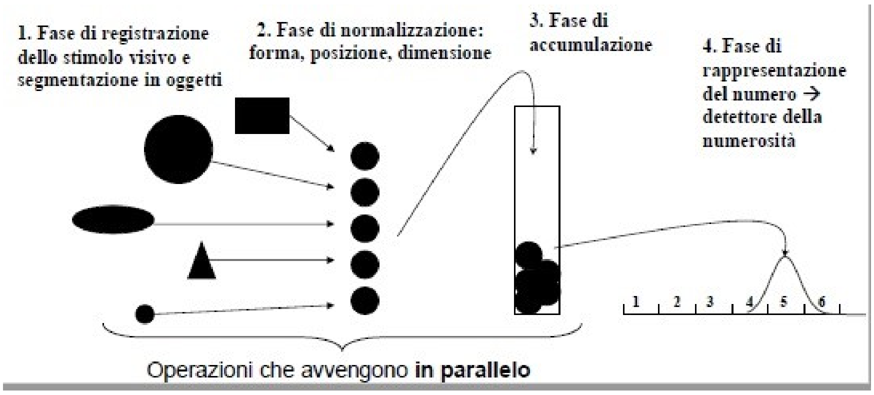


Figura 1.1: Il detettore delle numerosità

Nieder e collaboratori (2002), addestrarono alcune scimmie ad un compito non banale ([46]): queste, sedute e poste di fronte ad uno schermo, dovevano fissare un primo insieme costituito da pochi elementi (fase *sample*). Poi, dopo la comparsa di una schermata vuota (fase *delay*), compariva un nuovo insieme di elementi (fase *test*). Le scimmie venivano addestrate a lasciare un pulsante che inizialmente tenevano premuto quando il numero dei puntini del test erano uguali a quelli del sample.

Dalle ampiezze delle curve del grafico A della Figura 1.2 si evince che le scimmie riconoscevano bene l'uguaglianza d'insiemi quando questi erano costituiti da 1, 2, 3 elementi, mentre si confondevano sempre più quando il numero degli elementi degli insiemi aumentavano.

Sempre Nieder (2007), ha ripetuto un esperimento analogo con i macachi e con la medesima tecnica sample-delay durante il quale gli insiemi di pallini presentati avevano numerosità maggiori di quelli del precedente, da 1 fino ad un massimo di 48. I risultati ottenuti sono stati molto simili al precedente ([47]).

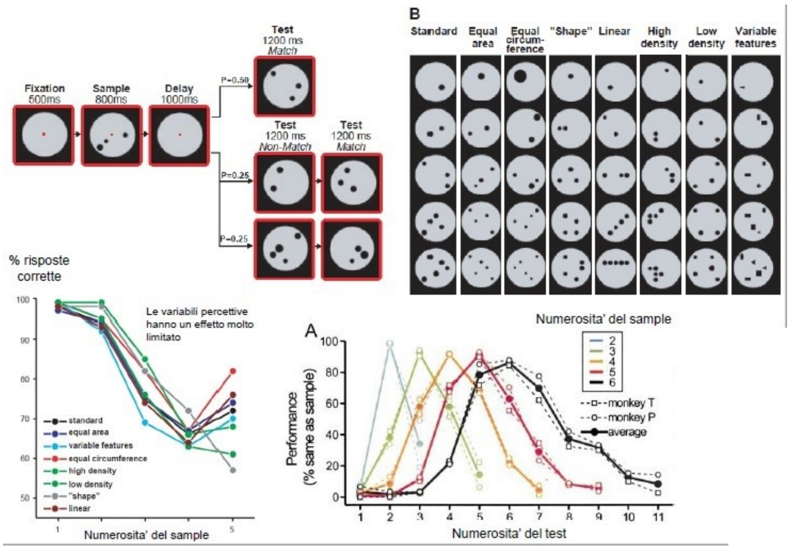


Figura 1.2: L'esperimento di Nieder

Tali risultati, tuttavia, non miravano solo ad una valutazione comportamentale degli animali ma avevano anche l'obiettivo di fare indagini a livello neuronale. Per tal motivo ai macachi vennero inseriti, direttamente nella corteccia, elettrodi in grado di rilevare scariche elettriche nei singoli neuroni.

Tale studio ha permesso di fare delle scoperte sensazionali: si è potuto rilevare un gruppo di neuroni che scaricano in modo preferenziale quando veniva presentato un solo elemento, mentre un altro gruppo aveva un picco di scarica quando si osserva un insieme di 2 elementi, un altro per un insieme di 3 elementi, un altro per 4 e così via.

In un altro esperimento, si sono registrati neuroni che scaricavano preferibilmente quando l'animale osservava insiemi costituiti da 20, 28, 30 pallini. Ciò ha fatto congetturare l'esistenza un neurone per ogni insieme di pallini presentati. In realtà, non si sa se sia effettivamente così. Ciò che è più probabile è che vi sia una forma di calibrazione ossia una forma di normalizzazione che fa presupporre l'esistenza di neuroni che codificano sempre per quantità relativamente piccole o relativamente grandi indipendentemente dal valore assoluto della numerosità presentata con una imprecisione che cresce con il numero di elementi presentati.

La scoperta di questi neuroni confermerebbe la validità della quarta fase nel modello ipotizzato da Deahene (Figura 1.1). Inoltre, non solo i gruppi di neuroni manifestano una preferenza per un certo numero ma la curva rappresentante la loro scarica ha una particolare forma intorno al picco (vedere ancora una volta il grafico A della Figura 1.2). Ciò sta a significare una preferenza da parte del neurone anche per numeri vicini a quello che determina la scarica massima. Si spiegherebbe, in questo modo, perché le risposte sono più difficoltose quando gli insiemi di pallini da confrontare hanno quasi lo stesso numero di elementi.

Infine si noterà, dal grafico di sinistra della figura, che le curve sono tutte molto simili tra di loro: questo vuole dire che pur cambiano la forma, la densità, la disposizione dei pallini, le risposte dei neuroni dipendono sempre da un intervallo di valori centrato nel numero preferito.

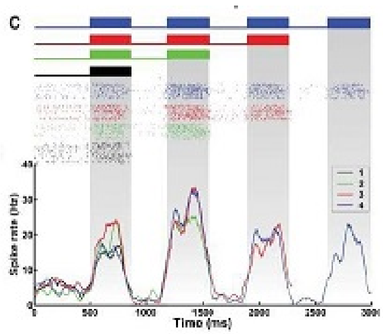


Figura 1.3: Neurone che "preferisce" il 2 in una presentazione sequenziale

In un seconda sessione dell'esperimento, Nieder, fece anche un altro tipo di indagine. Ai macachi, sempre posizionati davanti ad un monitor, appariva una successione di singoli pallini intervallati da schermate vuote. Successivamente, nella fase test, appariva nello schermo un insieme di pallini che poteva o non poteva corrispondere alla somma di quelli visti nella fase sample. Il compito consisteva nel decidere se la somma dei pallini presentati sequenzialmente era uguale al numero di pallini presentati nel test. In base alle congetture fatte i neuroni che codificano per la presenza sullo schermo di 2 pallini, ad esempio, avrebbero dovuto rispondere anche dopo la comparsa del secondo pallino di una successione. E' in effetti si è verificato essere proprio così: la preferenza di certi neuroni per specifiche numerosità non dipende dal tipo di presentazione dei pallini, sequenziale o simultanea che sia (Figura 1.3).

In quale zona della corteccia del macaco Nieder aveva localizzato questi *neuroni dei numeri* che scaricavano per specifiche numerosità? La maggior parte erano stati trovati nella profondità del solco intraparietale all'interno della cosiddetta area *VIP, Ventral Intraparietal Cortex* (Figura 1.4).

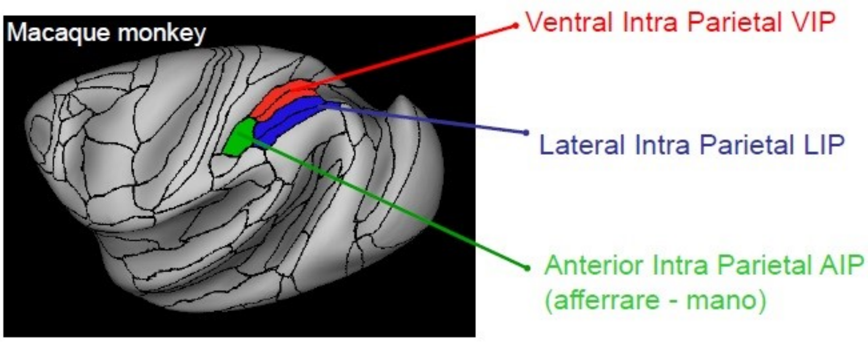


Figura 1.4: La regione Hips nel macaco

Ma non solo in questa zona: altri neuroni erano stati trovati nella *PFC, Pre - frontal Cortex*; tuttavia quest'ultimi neuroni si comportavano in modo leggermente differente dai precedenti. Infatti, se i neuroni dell'area VIP erano più attivi durante la presentazione dello stimolo, quelli della corteccia PFC scaricavano qualche decina di millesecondi dopo (Figura 1.5) e, più precisamente, durante il periodo di mantenimento dell'informazione in memoria (fase delay). Tale sensazionale scoperta permise di capire che i neuroni dell'area PFC archiviano le informazioni per essere reuperate in un successivo momento.

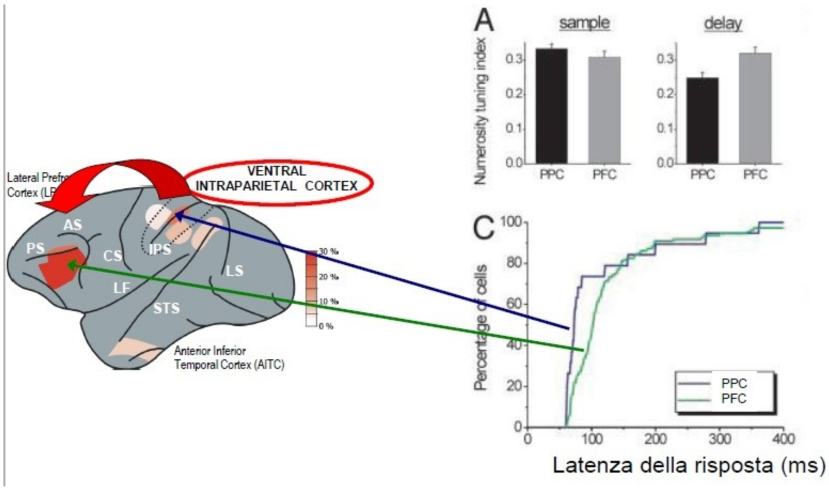


Figura 1.5: PFC - VIP

Un altro gruppo di ricercatori, Roitman, Brannon e Platt (2007), che facevano esperimenti sui movimenti oculari, effettuarono registrazioni in un'altra regione intraparietale che si chiama *LIP (Lateral Intraparietal Cortex)* che è contigua a VIP ma anatomicamente e funzionalmente ben diversa ([64]). I macachi erano sottoposti ad un compito puramente passivo: questi dovevano fissare un punto centrale dello schermo e soltanto di tanto in tanto eseguivano delle saccadi per osservare quadrati contenenti un diverso numero puntini (Figura 1.6).

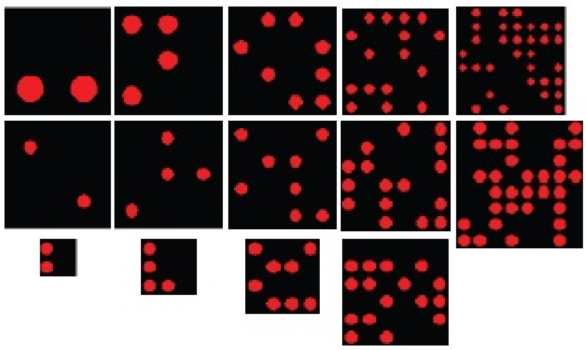


Figura 1.6: Gli insiemi usati da Roitman

Nell'area nella quale si effettuavano le registrazioni sono stati trovati neuroni che aumentavano la scarica linearmente all'aumentare del numero di pallini presentati. Questi neuroni, dunque, non codificano le numerosità in senso assoluto ma relativo. Allora si ipotizzò che i neuroni di quest'area stessero facendo una fase di accumulazione segnalando la presenza di sempre più oggetti nello spazio osservato. Questa scoperta confermò ulteriomente il modello di Deahene che ipotizzava, proprio nella fase 3, l'esistenza di un «accumulatore» che tenesse conto, anche se in modo approssimativo, della cardinalità degli insiemi di elementi indipendentemente dalla modalità in cui questi venivano presentati.

Dunque, si può concludere che, nel cervello dei macachi, esistono due tipologie di cellule posizionate in zone limitrofe dell'HIPS, che costituiscono due modalità diverse per la codifica di numerosità.

L'ipotesi di una somiglianza tra cervelli fece supporre che, quanto scoperto nel solco intraparietale dei macachi, valesse anche per l'essere umano. Non potendo fare registrazioni dirette, per ovvi motivi, Deahene e Piazza (2007) si servirono per il loro esperimento ([57]) della *Risonanza Magnetica Funzionale* (fMRI). I soggetti testati erano posti di fronte ad uno schermo ed osservavano insiemi di pallini. Questi, erano sempre della stessa numerosità. La risonanza, posizionata in modo da registrare l'attività di un gruppo di neuroni dell'area HIPS evidenziava, in questo modo, un fenomento di *adattamento* ossia la scarica dei neuroni che codificavano lo stesso insieme di elementi diminuiva nel tempo. Talvolta, però, la numerosità degli insiemi cambiava. In questi casi l'attivazione degli stessi neuroni aumentava improvvisamente. Inoltre, la riattivazione di questi neuroni era tanto più intensa quanto più la nuova numerosità si discostava dalla precedente. Ciò permise di concludere che sicuramente, nel cervello umano, ci sono meccanismi atti all'estrazione numerica del tutto similari a quelli dei macachi.

1.5 Le due vie nella visione

Come mai i neuroni delle numerosità si trovano proprio nella corteccia parietale? Le informazioni visive, dalla retina dell'occhio, arrivano direttamente nell'area occipitale primaria; tali informazioni proseguono il loro cammino biforcandosi lungo due vie: la *via ventrale* che attraversa le aree temporali e la *via dorsale* verso le aree parietali e frontali. Perché esistono due vie? Perché sostanzialmente guardiamo il mondo con due obiettivi: il primo è dato dal riconoscimento di quello che c'è davanti a noi e per farlo, visto che l'informazione ci arriva in modo molto «segmentato» (vedere Paragrafi 1.7, 1.8 e 1.9), va ricostruita prima l'immagine per potergli dare dopo un'identità.

Questa è l'azione tipica della via ventrale, che è dunque la via che permette il riconoscimento della forma degli oggetti e la loro identità.

Inoltre dopo il riconoscimento visivo di un oggetto, ad esempio, noi dobbiamo anche programmare un'azione conseguente: tale compito è svolto dalla via dorsale. Questa è deputata alla stima della posizione dell'oggetto, alla sua distanza da noi, alle sue dimensioni: tenendo in considerazione, in ogni momento, la posizione degli effettori si è in grado di comprendere in che modo eseguire il relativo movimento. Sono proprio i neuroni di questa via, più precisamente nel solco intraparietale, che per affinità funzionali, si sono reciclati per codificare numerosità insiemistiche o simboliche.

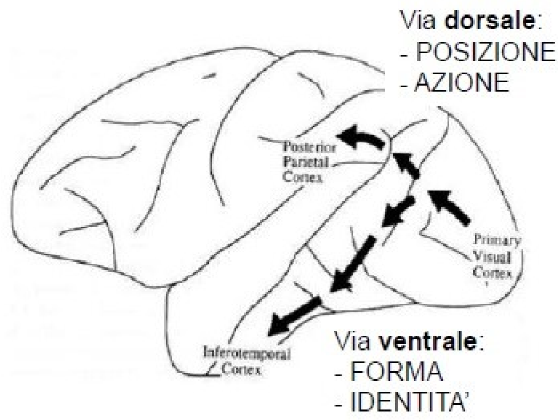


Figura 1.7: Le due vie della visione

1.6 Connessioni tra la rappresentazione delle quantità approssimativa e quella visuo spaziale

Si può sostenere che, nel momento in cui si legge un numero o quando si esegue mentalmente un'operazione aritmetica, tendiamo a spostare la nostra attenzione verso una determinata posizione nello spazio. Nell'esperimento condotto da Fischer (2003) i soggetti coinvolti erano posizionati davanti ad uno schermo sul quale era presente un punto centrale e due quadrati (vuoti), uno a sinistra e uno a destra ([20]). Dopo 500 ms di osservazione, un numero a caso tra 1, 2, 8, 9 sostituiva il punto centrale. Fino a questo punto non si doveva fare nulla; dopo altri 300 ms il numero spariva e contemporaneamente uno dei due quadratini si colorava di nero (*target*). A questo punto, i soggetti testati dovevano schiacciare un pulsante. Si osservò un vantaggio nella rilevazione del target posizionato nell'emicampo visivo destro quando era preceduto da un numero relativamente «grande» (8 o 9) e nell'emicampo sinistro quando era preceduto da un numero relativamente «piccolo» (1 o 2).

Nell'esperimento condotto da Lee (2002) i soggetti testati dovevano eseguire due compiti contemporaneamente: uno di questi era sempre una sottrazione mentale tra due numeri. Quando il secondo compito era di tipo fonologico (ad esempio leggere sottovoce una non-parola), i tempi di risposta nell'eseguire la sottrazione non subivano sostanziali modifiche rispetto a quando la si eseguiva da sola. Quando, invece, il secondo compito era di tipo visuo-spaziale (viene presentato un oggetto prima del calcolo e dopo il calcolo ed il soggetto deve ricordare se ha cambiato forma e la posizione spaziale) allora i tempi di risposta erano sensibilmente più lunghi ([37]). Ciò sta a significare che durante alcune operazioni aritmetiche si utilizza lo stesso sistema cognitivo deputati alla rappresentazione spaziale degli oggetti.

Infine si vogliono riportare i risultati degli esperimenti condotti da Mathieu (2016): mediante questi si comprese che la sola lettura di simboli che indicano le operazioni di somma e di sottrazione condizionano l'attenzione spaziale. Davanti ad uno schermo i soggetti dovevano fissare un punto centrale: successivamente questo veniva sostituito da un numero, quindi da un simbolo di + (o -) ed infine da un secondo numero che poteva comparira a sinistra o a destra rispetto al centro. I partecipanti dovevano eseguire mentalmente la somma o la differenza e dare la risposta. Si osservò che quando il secondo numero veniva presentato a destra i tempi di risposta erano inferiori rispetto a quando il secondo numero era presentato a sinistra. Se invece si doveva eseguire una sottrazione accadeva l'esatto contrario ([39].

Si descrive ora un altro tipo di comportamento che è prova dell'esistenza di una connessione tra la rappresentazione delle quantità e quella visuo-spaziale. Già nel 1881, lo psicologo Galton, aveva intervistato persone che raccontavano di vivere un'esperienza vivida e automatica per una «linea mentale dei numeri» ([22]. Questo fenomeno è stato chiamato *sinestesia della linea numerica*. Tali linee possono avere varie forme geometriche e diversi colori variando molto da persona a persona (Figura 1.8).

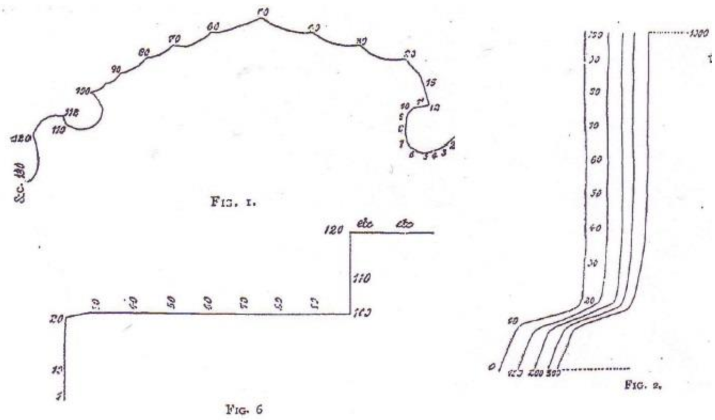


Figura 1.8: Un esempio di sinestesia della linea numerica

Uno studio di Dehaene (1993) dimostrò che soggetti senza sinestesia effettuavano sistematicamente una associazione automatica e non controllabile tra numeri piccoli e parte sinistra dello spazio e numeri grandi e parte destra cioè come se si facesse riferimento a una linea numerica mentale. Questo processo è stato chiamato *effetto SNARC* (Spatial Numerical Association of Response Codes). A soggetti adulti veniva chiesto di dare un giudizio di parità o disparità per numeri compresi tra 0 e 9 che venivano presentati al centro di uno schermo. In una prima parte dell'esperimento bisognava premere un pulsante con la mano sinistra se il numero fosse stato pari e con la destra se fosse stato dispari mentre in un altro blocco sperimentale bisognava fare l'esatto contrario. Misurando i tempi di risposta si è potuto constatare che i partecipanti rispondevano più velocemente con la mano destra se i numeri presentati erano relativamente grandi (7, 8 e 9) e più velocemente con la mano sinistra se i numeri erano piccoli (1, 2, 3). Tale effetto si registrava qualunque fosse stato il range di numeri considerato ([14]). Inoltre, in altri esperimenti è stato dimostrato che la rappresentazione spaziale dei numeri si attiva indipendentemente dalla modalità (visiva vs uditiva), dal formato (simbolico vs non simbolico) ([48]) e dall'effettore utilizzato per rispondere (mano vs occhi) ([71]).

Da che cosa dipende l'effetto SNARC? Sembra che sia dipendente dalla direzione di scrittura dei soggetti esaminati. A tal proposito è stato effettuato un esperimento condotto da Shaki (2009) proposto a soggetti di nazionalità diversa ossia a canadesi di lingua inglese (verso di scrittura sia dei numeri che delle parole da sinistra a destra), a israeliani di lingua ebraica (che scrivono i numeri da sinistra a destra ma le parole da destra a sinistra) e a palestinesi di lingua araba (che scrivono numeri e parole da destra a sinistra): si constatò che l'effetto SNARC per i soggetti palestinesi si manifestava nel verso opposto rispetto a quello dei canadesi mentre i soggetti israeliani non manifestano tale effetto ([72]).

Tuttavia, due recenti esperimenti, uno condotto sui pulcini da Rugani (2015) e uno condotto da de Hevia (2017) fanno congetturare che abbiamo una tendenza innata ad associare numerosità a posizioni nello spazio; è altresì evidente però che l'educazione, dipendente dal contesto culturale in cui si è inseriti, può evidentemente influenzarla ([66], [26]).

Il *test della linea numerica*, ideato da Siegler (2003), serve a stabilire in che modo vengono mappati i numeri su una linea numerica: a tal fine, si chiede ai soggetti testati di mettere un segno in corrispondenza della presunta posizione di un certo numero x su una retta che va da 1 a 10 ([74]). Dopodiché, si relaziona

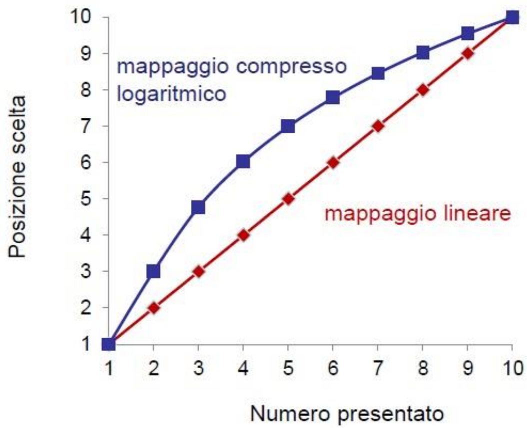


Figura 1.9: Le diverse mappature dei numeri sulla linea numerica

su un grafico cartesiano (Figura 1.9), la posizione scelta con l'effettiva posizione del numero presentato. Nel caso in cui vi è un mappatura corretta tra il numero dato e la sua posizione sulla linea si otterrà sul grafico una retta con origine nel punto d'intersezione degli assi. Quando invece la mappatura è piuttosto compressa, si ottiene una curva di andamento logaritmico.

Sempre Siegler (2004) ha sottoposto bambini di varie età al test della linea numerica che, in questo caso, andava da 1 a 100. E' emerso (Figura 1.10) che la mappatura passa da quella logaritmica a quella lineare all'aumenetare dell'età dei bambini ([73]). Pertanto, da tutti questi risultati, è evidente che l'educazione scolastica è determinante per migliorare la mappatura dei numeri.

Tuttavia si possono eseguire sui bambini delle attività specifiche atte a migliorare la mappatura dei numeri sulla retta e quindi a migliorare tale capacità in coloro che manifestano un ritardo rispetto alla media. Ancora Siegler (2008), ha eseguito esperimenti su 88 bambini tra i quattro e i cinque anni e mezzo appartenenti ad un

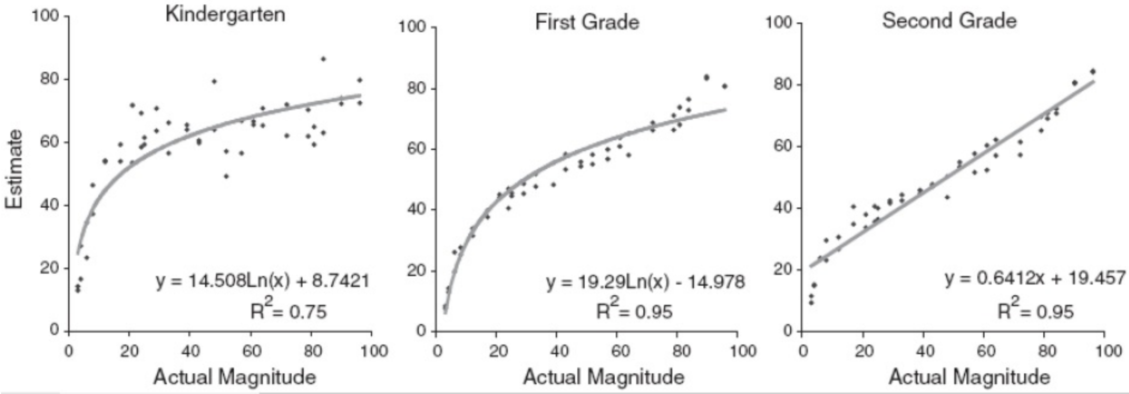


Figura 1.10: I risultati del test di Siegler

contesto socio economico piuttosto basso (predittivo, in genere, di difficoltà nella letto - scrittura e nelle capacità matematiche). Questi bambini sono stati inizialmente sottoposti al test della linea numerica. La loro performance è stata molto preoccupante: sembrava che essi si rendessero effettivamente poco conto della diversità delle varie numerosità (Figura 1.11).

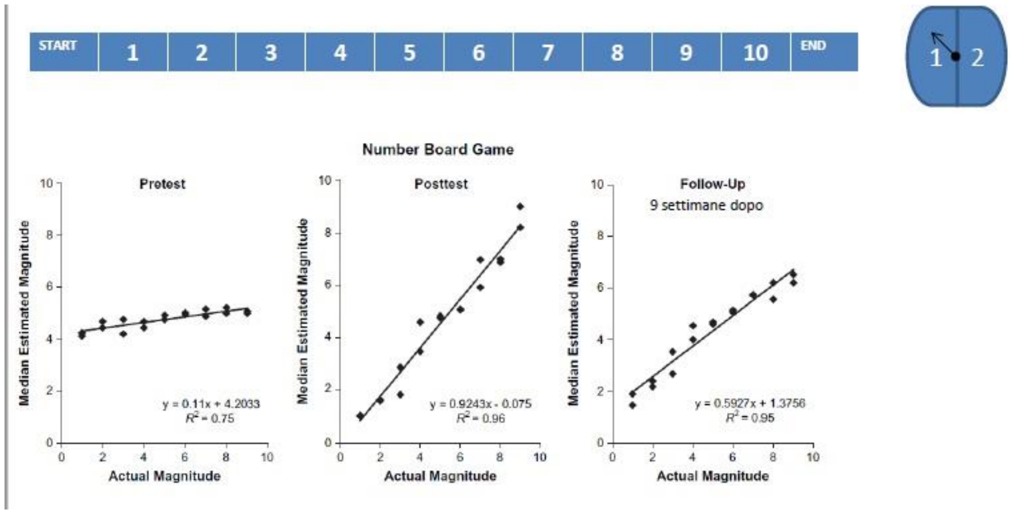


Figura 1.11: I risultati dei test di Siegler

Dopo il test iniziale i bambini si sono incontrati individualmente con lo sperimentatore per cinque sessioni di 15-20 minuti l'una per 2 settimane. Durante tali sedute venivano impegnati in un gioco dell'oca semplificato costituito da un striscia sulla quale erano rappresentati i numeri da 1 a 10 (1 preceduto da una casella start mentre il 10 seguito da una casella end). Al posto del comune dado i bambini facevano ruotare a turno una freccetta che poteva indicare, al termine della rotazione, solo 1 o 2 (Figura 1.11). A seconda del numero ottenuto avanzavano il segnalino occupante una certa posizione di una o due caselle. Al termine delle esercitazioni i bambini furono immediatamente sottoposti di nuovo al test della linea numerica: i risultati erano straordinariamente migliorati. Non solo: ripetendo il test dopo 9 settimane la performance dei bambini risultava ancora essere molto soddisfacente (anche se un po' meno rispetto al test svolto subito dopo le attività, [58]). Naturalmente i miglioramenti sulla mappatura dei numeri sono dovuti sia alla scolarizzazione che allo sviluppo generale dei bambini. Anche altre funzioni come il linguaggio, le capacità spaziali, la dominanza prassica, dipendono da tali fattori oltre che da cambiamenti cerebrali (ad esempio, il generarsi con l'età di attivazioni neurali lateralizzate).

Quanto fin qui descritto evidenzia che il nostro cervello ha necessità, per la risoluzione di compiti numerici, di fare riferimento allo spazio. Tuttavia, la rappresentazione dei numeri sulla linea numerica non è l'unico nostro modo di concretizzare il concetto di numero. Sappiamo bene che i bambini, quando cominciano a contare, hanno una chiara esigenza di utilizzare le dita delle mani. Questa abitudine di utilizzare parti del corpo per indicare diverse numerosità è anche tipica in popolazioni la cui cultura si tramanda solo oralmente tutt'ora esistenti e, in alcuni casi, anche testate e studiate ([56]).

Qual'è, a livello corticale, l'origine di questa interazione tra calcolo mentale, rappresentazioni dei numeri e rappresentazioni visuo - spaziali? Nell'esperimento di Knops (2009) i soggetti adulti coinvolti, mentre si trovavano all'interno della fMRI, dovevano eseguire diversi compiti: inizialmente, questi dovevano alternare a saccadi a destra o a sinistra a momenti in cui dovevano mantenere lo sguardo fisso al centro di uno schermo posto loro davanti ([36]).

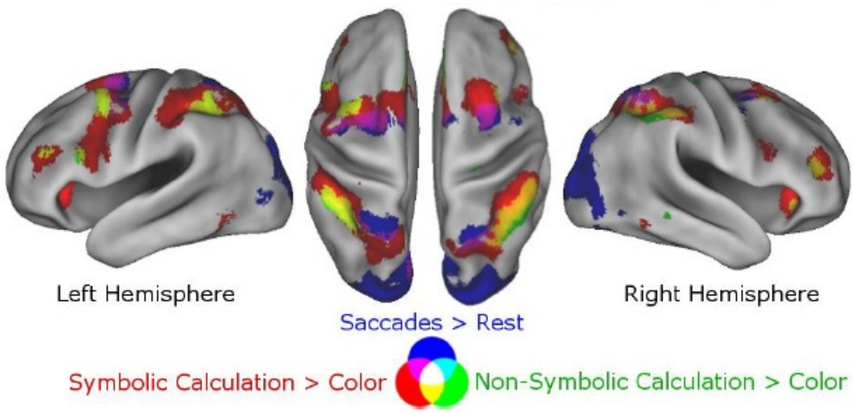


Figura 1.12: La sovrapposizione tra le aree dedicate al calcolo e quelle dedicate alle saccadi

Nella Figura 1.12 sono visualizzate tutte le regioni del cervello che si attivano durante le saccadi rispetto a quando gli occhi erano fermi. Si può constatare l'attivazione delle aree occipitali ma soprattutto di quelle parietali posteriori e delle regioni frontali, ossia, in sostanza, dei circuiti che sottendono lo spostamento dell'attenzione nello spazio. Inoltre, mediante un algoritmo di apprendimento, si poteva stabilire con un accuratezza del 70%, che lo stato di attivazione di queste regioni poteva predire verso quale direzione venivano spostati gli occhi. Successivamente, si studiava l'attivazione di queste aree mentre i soggetti esaminati eseguivano sottrazioni e addizioni. Si scoprì, in questo modo, che le aree che si attivavano durante l'esecuzione delle addizioni si sovrapponevano con quelle che si attivano quando i soggetti muovevano gli occhi verso destra. Quando, invece, i partecipanti eseguivano sottrazioni, le attivazioni corrispondevano a quelle dei movimenti oculari verso sinistra. Ciò fece concludere che i circuiti neuronali che sono implicati nel controllo dell'attenzione nello spazio sono gli stessi che si attivano per il calcolo mentale.

Pertanto, si è già detto che nel solco intraparietale (HIPS) si sono trovare regioni (VIP e LIP) che si attivano mentre si eseguono compiti di natura aritmetica, quali rilevazioni di quantità, confronto tra queste, calcoli aritmetici sia esatti che approssimativi come addizioni e sottrazioni. L'esperimento di Knops, invece, ha evidenziato l'esistenza di una regione che si trova sempre nella corteccia parietale dorsale, in una posizione più posteriore rispetto all'HIPS, che si attiva per compiti numerici ma anche durante l'esecuzione di saccadi e, più specificatamente, durante lo spostamento dell'attenzione nello spazio. Tale regione (Figura 1.13) è denominata *PSPL (Posterior Superior Parietal Lobe)*. Sono dunque proprio queste le aree responsabili delle rappresentazioni visuo - spaziali dei numeri.

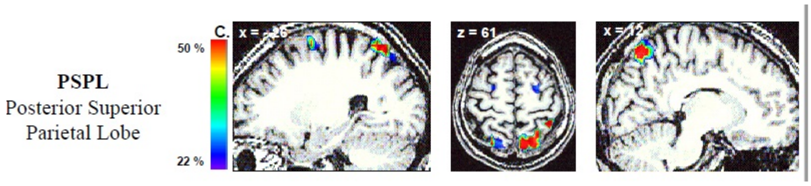


Figura 1.13: La regione PSPL

1.7 Il riconoscimento delle forme elementari

Uno studio di Tamura (2001) ha ottenuto risultati così importanti da generare un cambiamento di paradigma nel campo delle neuroscienze. Si studiavano le risposte di specifiche cellule nella corteccia occipito temporale di macachi mentre questi osservavano diversi tipi di immagini; i neurofisiologi si accorsero, casualmente, che c'erano neuroni che rispondevano in modo ultraselettivo a determinate immagini. Nella figura 1.14 sono riportate le frequenze di scarica di un singolo neurone in funzione della presentazione dei diversi stimoli. Si vede che tale neurone, risponde in modo intenso e selettivo alla vista di una sedia da parte di un macaco ([75]).

Questa scoperta ha portato gli studiosi a congetturare l'esistenza delle cosiddette «cellule della nonna»: è possibile che vi sia un neurone che si attiva per la visione di una specifica immagine? Inoltre, come si sviluppa questa selettività da parte dei neuroni? L'iperselettività non è specifica per una determinata immagine ma piuttosto per una forma in essa contenuta come si vedrà.

In uno studio sempre sui macachi eseguito da Tanaka (2003) i ricercatori si concentrarono inizialmente su immagini che attivavano un certo neurone; queste venivano successivamente semplificate, rese cioè geometricamente sempre più essenziali.

Ci si accorse che i neuroni che scaricavano per l'immagine iniziale, continuavano a scaricare anche per l'immagine semplificata: questo stava a dimostrare che esistono neuroni «sensibili» a forme elementari. Per cui ad esempio, il neurone che scaricava

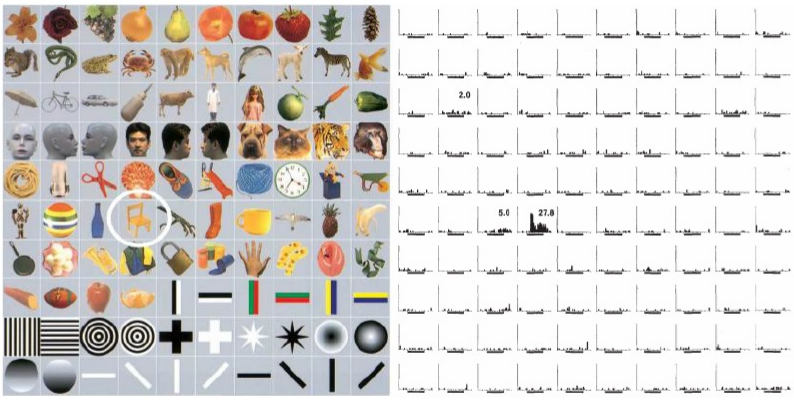


Figura 1.14: La registrazione di un neurone della corteccia temporale inferiore in funzione delle diverse immagini presentate

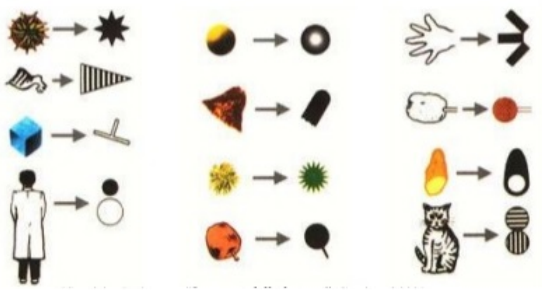


Figura 1.15: La semplificazione delle immagini operata da Tanaka

per l'immagine del ricercatore (Figura 1.15), continuava a scaricare anche per la stessa immagine che veniva via via semplificata fino a quando questa era ridotta ad un cerchio nero e uno bianco; oppure, il neurone che rispondeva alla vista di una mano, continuava a rispondere anche quando questa veniva sostituita da una combinazione di tre barre orientate.

In conclusione, anche se in realtà nella corteccia infero temporale ci sono cellule che rispondono effettivamente ad una immagine specifica e non rispondono più quando questa viene stilizzata, si è ipotizzato in generale l'esistenza di un «alfabeto» minimo di forme elementari: questo viene «riconosciuto» da neuroni che si trovano in tale area corticale molto vicini tra loro e aventi un'organizzazione topografica molto avanzata ([76]).

Inoltre tali neuroni manifestano alcune «invarianze»: in uno studio di Sary (1993) condotto sempre su scimmie, si è compreso che se certi neuroni rispondono ad una determinata forma rispondono anche quando questa è presentata sotto indici diversi: questi possono essere la luminanza (luce della forma diversa rispetto allo sfondo), il movimento (la figura si muove rispetto allo sfondo), la textura (figura riconoscibile per una diversa densità dei puntini o pixel rispetto allo sfondo). L'attenzione dei ricercatori era anche rivolta a verificare un'invarianza della codifica neuronale delle forme rispetto alla posizione in cui queste si trovavano: per questo le immagini considerate venivano presentate centralmente, cioè proprio nel punto di fissazione

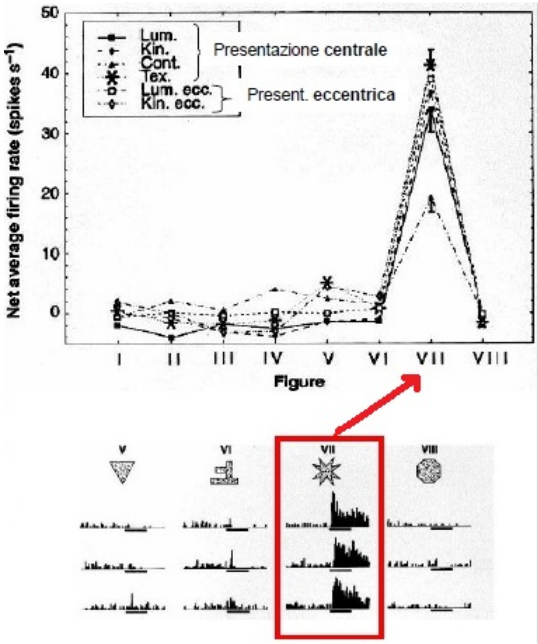


Figura 1.16: La registrazione di un neurone non dipendente dall'indice e dalla posizione ma solo dalla forma

dell'animale, oppure in posizione eccentrica. Si può osservare, nella Figura 1.16, la preferenza di un determinato neurone che scarica durante la visione di una stella indipendentemente dall'indice e dalla posizione di presentazione. Siccome questi neuroni studiati da Sary rispondono spontaneamente senza che sia stato fatto alcun training particolare si ipotizzò che fossero presenti anche nella corteccia umana per continuità filogenetica ([70]).

Si è inoltre scoperto che la selettività ad una certa forma dei neuroni della corteccia infero temporale non è invariante nel tempo: infatti un neurone che risponde in maniera naturale ad una certa forma può cominciare anche a rispondere per una forma diversa, a condizione che le due vengano presentate in maniera contigua per un periodo di tempo sufficientemente lungo. Si parla, in questo caso, di *apprendimento associativo*. Questa è di fatto la scoperta effettuata da Miyashita (1988) mentre effettuava esperimenti su macachi. E' sicuramente questo meccanismo che permette ad un essere umano d'imparare a leggere due lettere uguali ma scritte con due diversi caratteri: tale apprendimento, inoltre, è supportato dal fatto che le due diverse lettere vengono pronunciate mediante il medesimo suono ([43]).

1.8 L'alfabeto delle forme elementari

Il fatto che determinati neuroni scaricano per forme via via sempre più semplici fece ipotizzare, come detto (Paragrafo 1.7), l'esistenza di un alfabeto di *forme elementari*. Per spiegare come avvenga la codifica di tali forme gli psicologi della percezione ipotizzarono che queste posseggono «proprietà non-accidentali»: basta la loro visione per «diagnosticare» la presenza di una forma più complessa anche se quest'ultima non è completamente rappresentata.

Figura 1.17: Figure riconoscibili o non riconoscibili in base alla presenza delle proprietà non-accidentali

Biederman (1987) infatti congetturò che il processo di riconoscimento di forme bidimensionali note non viene ostacolato se parti non-diagnostiche vengono cancellate ([3]), mentre, come si osserva in Figura 1.17, la mancata presenza di quest'ultime rende difficoltoso il riconoscimento dell'oggetto. Tali considerazioni valgono anche per le immagini bidimensionali di oggetti tridimensionali: la presenza di una forma a «Y» oppure ad «E» è interpretata dal nostro sistema visivo come un vertice di un cubo. Invece l'incontro di due barre a «T» è interpretato come una superficie che nasconde una retta (si vedano cerchi rossi nella Figura 1.18). Il modello di Biederman stabilisce, in definitiva, che la vista di proprietà non-accidentali, permette di riconoscere oggetti anche a prescindere dal punto di vista da cui questi vengono osservati purché non sia inusuale: in tal caso, non si è in grado di riconoscere ciò che stiamo osservando.

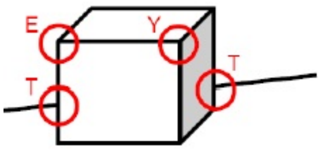


Figura 1.18: Proprietà non-accidentali delle figure tridimensionali disegnate su di un piano

Anche le linee parallele e gli assi di simmetria sono considerate proprietà non-accidentali indispensabili per il riconoscimento di figure geometriche. Si pensi ai quadrilateri per esempio: essere abituati ad individuare rette parallele come pure parti simmetriche rispetto ad una retta o a un punto aiuta senz'altro a percepire e quindi a riconoscere correttamente una figura geometrica. Naturalmente l'uso di strumenti appropriati, quali righe, squadre e compassi permettono di verificare con rigore eventuali congetture sulla presenza di proprietà non-accidentali.

Perché le proprietà non-accidentali sono ritenute molto importanti? Perché è possibile che il nostro sistema di riconoscimento degli oggetti sia organizzato in modo da «concentrare» l'attenzione, piuttosto che sulla complessità delle forme, a tratti che siano diagnostici per il riconoscimento dell'identità degli oggetti.

A tal proposito, Changizi (2010), ha individuato alcune forme elementari comuni alle diverse scritture di tutto il mondo (vedere Figura 1.19, [10]). In particolare, rilevò che tutti i sistemi di scrittura:

1. presentano, specialmente nel centro dei simboli, un'alta intensità di tratti;
2. si basano su un piccolo numero di forme di base che diversamente combinate formano i caratteri (in quello alfabetico sono le lettere o fonemi);
3. non basano il riconoscimento delle parole sulla posizione e sulla dimensione dei caratteri (invarianza per posizione e dimensione).

Figura 1.19: Simboli alfabetici

Changizi, di fatto, utilizza un approccio geometrico: identifica, tra tutte le forme scritte, 36 diverse configurazioni topologiche (Figura 1.20) presenti nei caratteri costituite da combinazioni di linee semplici o complesse che abbiano una certa relazione spaziale tra di loro. Per esempio, determinò la configurazione topologica ad «L», data da due linee che si incontrano: tutti i caratteri che preseantano tale conformazione appartengono a tale forma topologica. Un altro tipo di forma topologica è la «T» data dall'incrocio di due linee (diverso da quello della «L»), poi quella ad «X» e così via.

Riportò, quindi, su di un grafico cartesiano la frequenza di tutte queste configurazioni topologiche presenti nelle scritture alfabetiche considerando anche quelle per le quali sia previsto, per ogni oggetto, un simbolo. Il risultato finale, indipendentemente dal tipo di scrittura, è una distribuzione delle configurazioni: ce ne sono alcune evidentemente più frequenti di altre come si evince nella Figura 1.21. Si può

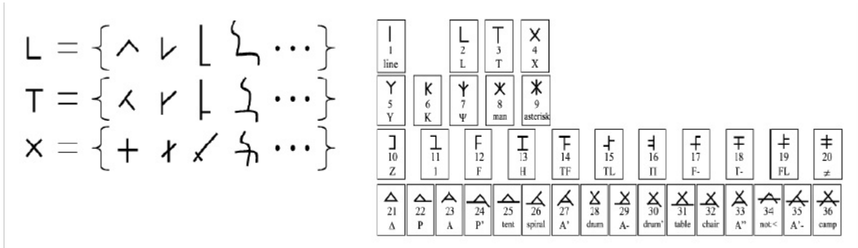


Figura 1.20: Configurazioni topologiche

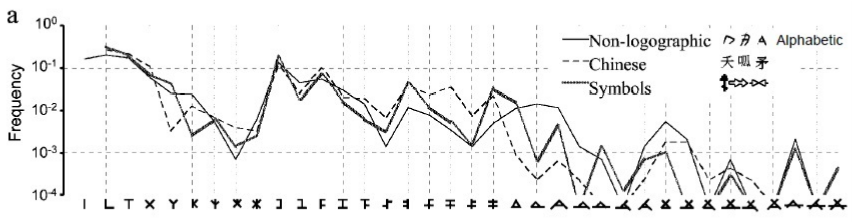


Figura 1.21: Le frequenze delle configurazioni topologiche

osservare come tra le configurazioni spaziali più frequenti ci siano la «L» poi la «J», mentre la «X» è meno frequente.

Da cosa dipende la maggiore presenza di certe forme rispetto ad altre? Una possibile spiegazione viene dal fatto che un sistema di scrittura dipende da come il sistema visivo elabora le immagini naturali. E' possibile che l'evoluzione e la selezione naturale abbiano fatto in modo che certe immagini evochino più di altre una specifica risposta cerebrale. Un'altra possibile spiegazione è fornita dal fatto che nel mondo naturale certe forme di base sono più frequenti rispetto ad altre; per questo è possibile, durante lo sviluppo ontogenetico, che si sviluppi una maggiore sensibilità a riconoscere queste forme rispetto ad altre. In virtù di questa ipotesi, Changizi scelse un'enorme varietà di immagini che rappresentavano scene naturali (prese da National Geographic): selezionò, in ciascuna di tali immagini piuttosto complesse piccole porzioni e, in ognuna di queste, contò le medesime configurazioni topologiche che erano state rilevate nelle scritture. I dati ottenuti sono stati riportati nel grafico della Figura 1.22.

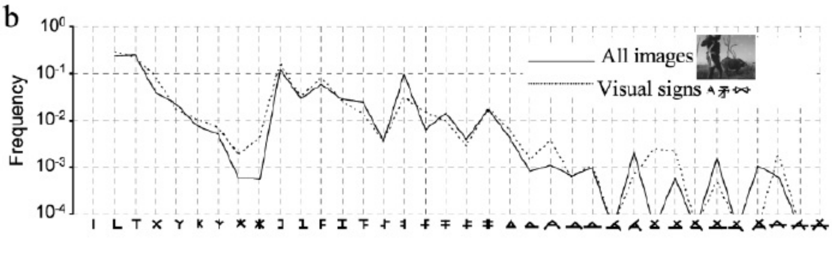


Figura 1.22: Confronto tra le frequenze delle configurazioni topologiche e quelle delle immagini naturali

Mediante tratti continui si sono congiunti i valori relativi alle frequenze delle configurazioni di base trovate nei frammenti di immagine; la linea tratteggiata, rappresenta lo stesso grafico della Figura 1.21 relativo alle stesse configurazioni di base presenti nei simboli delle scritture. Si osserva una fantastica sovrapposizione tra le due linee.

Ciò ha permesso di congetturare che le configurazioni di linee più frequenti in natura:

1. sono meglio codificate a livello dei neuroni della corteccia infero-temporale che, si è già visto, essere implicati nel riconoscimento della forma visiva degli oggetti;

2. sono anche quelle che riconosciamo più facilmente grazie ad un apprendimento di tipo statistico che ha portato le diverse culture a scegliere i simboli della propria scrittura tra queste forme più facili da interpretare dal punto di vista visivo.

Queste sono evidenze di quanto la cultura «influenzi il cervello» e, al tempo stesso, quanto il cervello «influenzi la cultura»: esseri umani distanti nello spazio e nel tempo che hanno dovuto selezionare le forme da utilizzare per simboli, lettere o concetti elementari, hanno scelto proprio quelle forme di base che risultano essere più facili da riconoscere perché più frequenti nel mondo naturale.

1.9 Organizzazione gerarchica della corteccia infero temporale

Sono stati elaborati diversi modelli di reti neuronali per mezzo dei quali si è tentato di spiegare in che modo avviene la codifica delle dei volti e delle parole. Tali modelli, a partire dal primo elaborato da McLelland e Rumelhart (1981, [40]) fino ad arrivare a quello più organico di Dehaene (2005, [15]) ipotizzano l'esistenza di una gerarchia neuronale la cui risposta diviene via via più complessa: in particolare, i neuroni più posteriori, vicini alle regioni visive primarie nella corteccia occipitale, codificano forme molto semplici come barre orientate ed hanno campi recettivi molto piccoli. Man mano che ci si sposta lungo la via occipito temporale, rispondendo a forme sempre più complesse, ossia a combinazioni di barre orientate, *il campo recettivo*[1] relativo ai singoli neuroni s'ingrandisce. L'attivazione dei neuroni, man mano che ci si sposta dalle aree più posteriori a quelle più anteriori diviene inoltre invariante per posizione spaziale, per cui certe immagini riescono a stimolare risposte di questi neuroni anche se presenti in posizioni diverse nello spazio (quindi pur essendo completamente diversa l'immagine che cade sulla retina). Il riconoscimento visivo delle parole, dunque, potrebbe basarsi su una piramide gerarchica di neuroni che codificano nell'ordine linee, lettere, bigrammi, morfemi fino ad arrivare alle singole parole (Figura 1.23).

Il modello più recente proposto da Deahene, pur rimanendo fedele alle idee generali di McLelland e Rumelhart, spiega bene come, salendo nella gerarchia delle

[1] E' la sola regione limitata del campo visivo (tutta la zona a noi visibile mentre fissiamo un punto dello spazio) rispetto alla quale neuroni sensibili agli stimoli visivi scaricano con una frequenza maggiore.

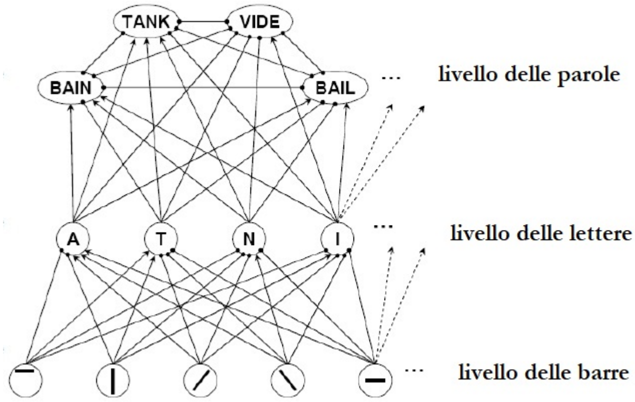


Figura 1.23: Il modello elaborato da McLelland, Rumelhart

aree corticali, il campo recettoriale si allarga e la risposta neuronale diventa sempre meno dipendente dalla posizione e dalle caratteristiche visive dello stimolo.

Gli esperimenti eseguiti con fMRI da Vinckier (2007), in cui si coinvolsero soggetti che fossero abili lettori (in questo caso di lingua francese), permisero di validare quest'ultimo modello: a questi venivano presentate non-parole, non-parole con bigrammi frequenti ecc. fino ad arrivare a presentare vere e proprie parole. Allo stesso tempo, veniva registrata la risposta corticale evocata dalla presentazione di questi diversi stimoli. Nella Figura 1.24 è riportata l'attivazione corticale che si è registrata durante la presentazione di stimoli rispetto a quando non c'era nulla sullo schermo: a partire dall'immagine di sinistra, si noterà che l'attivazione maggiore è soprattutto posteriormente ossia nell'area visiva primaria in corrispondenza della lettura di non-parole. In tale area, si è detto, si trovano neuroni molto specializzati che si attivano alla presentazione di semplici barre. Osservando sempre la figura e procedendo verso destra, alla presentazione di singole lettere, bigrammi e quadrigrammi, si può constatare che vengono man mano coinvolte aree visive gerarchicamente superiori. Quando lo stimolo visivo era costituito da una parola conosciuta aumentavano le attivazioni delle regioni più anteriori specie dell'emisfero di sinistra ([78]).

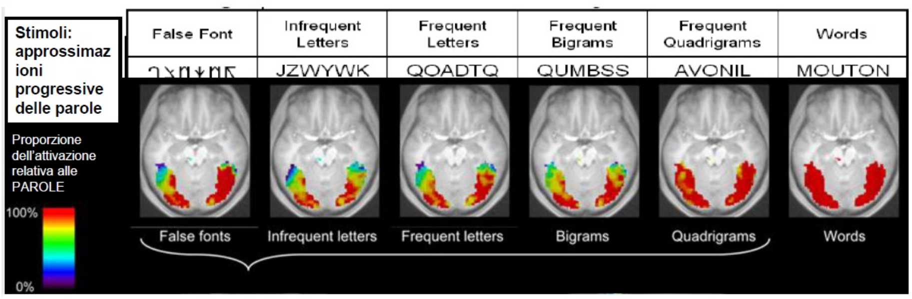


Figura 1.24: Attivazioni della corteccia occipito temporale durante l'esperimento di Vinckier

1.10 Un'ipotesi di modello della codifica delle forme geometriche

Sulla base di quanto detto finora, appare lecito ipotizzare che anche le figure geometriche vengano codificate da parte dei neuroni mediante un sistema gerarchico, dal semplice al complesso, via via che ci sposta dalle aree visive primarie della corteccia occipitale fin verso le aree del riconoscimento visivo delle parole e degli oggetti che si trovano nella corteccia occipito temporale inferiore.

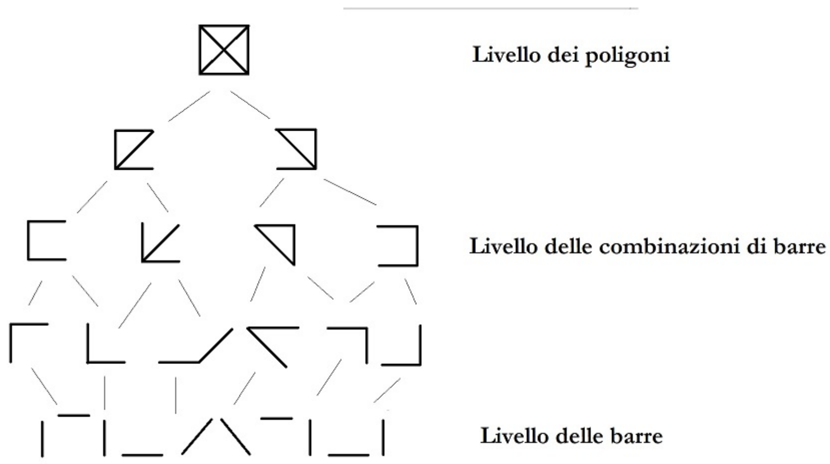


Figura 1.25: Un'ipotesi di modello di codifica delle forme geometriche

I neuroni della corteccia visiva primaria codifichino barre elementari a seconda della loro lunghezza, dell'orientamento, della posizione nel campo visivo. In generale, tali neuroni, si attivano in maniera asincrona non scaricando contemporaneamente. Se si osserva, ad esempio, il disegno di un quadrato, per la presenza dell'insieme delle varie linee che lo compongono, i vari neuroni cominciano a scaricare simultaneamente riuscendo ad attivare, a loro volta, neuroni di un livello successivo verso la corteccia occipito temporale; in questo modo, quest'ultimi si attiverebbero per una combinazione di linee. Il riconoscimento di combinazioni di barre sempre più complesse avverrà perché tali neuroni cominceranno a scaricare anch'essi in modo sincrono attivando a loro volta altri neuroni di un livello superiore. Si arriverà, in questo modo, a ipotizzare l'esistenza di neuroni occupanti i vertici di una piramide immaginaria di attivazioni corticali; quest'ultimi, «ereditando» le codifiche di tutti i neuroni che si sono attivati negli stadi precedenti, saranno in grado di codificare l'intero quadrato (Figura 1.25).

1.11 Il riconoscimento delle forme geometriche

Supponiamo di far vedere ad un bambino, per la prima volta, un quadrato disegnato su un libro spiegandogli che è costituito da 4 lati uguali e da 4 angoli uguali e retti. Quindi gli si insegnerà a riconoscere il rombo sottolineando che è sempre costituito da 4 lati uguali e da angoli uguali a due a due. Sappiamo bene che le immagini sui libri, ma anche quelle da noi stessi realizzate, per una predilezione alle

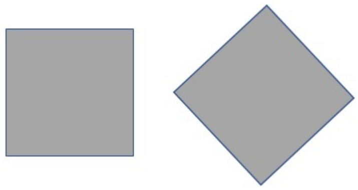


Figura 1.26: Due quadrati uguali

direzione orizzontale e verticale mostrano tipicamente il quadrato con lati orizzontali e verticali ed il rombo con le diagonali in questo modo. I ragazzi si abituano così a vedere e a lavorare con queste figure rappresentate in un'unica maniera e a riconoscerle esclusivamente secondo questi orientamenti. Basti pensare che, ancora molti preadolescenti di seconda media, confondono un quadrato con un rombo se il primo dei due viene presentato ruotato rispetto alla sua classica rappresentazione (vedi Figura 1.26). Questo è conseguenza di una scarsa riflessione sulle caratteristiche essenziali delle figure che non ha adeguatamente sollecitato le capacità percettive dello studente.

I numerosi e dettagliati studi volti a comprendere come avviene a livello corticale il riconoscimento delle parole permettono di affermare, ormai con sicurezza, che la lettura «resiste» alle cosiddette *invarianze*. Queste sono:

1. per diversità di forma. S'impara a leggere le parole sia se scritte in corsivo sia in stampatello;

2. per dimensione. Si riesce a leggere le parole a presindere della dimensione del loro carattere;

3. per orientamento. Si risonoscono le parole anche se ruotate;

4. per similitudine. Sappiamo riconoscere parole diverse seppur molto simili tra di loro (ad esempio, parole che si differenziano per una sola lettera pur avendo significato completamente diverso);

5. per specularietà. Si riesce a leggere le parole anche se scritte in modo speculare.

Prendendo spunto da tali considerazioni è necessario, allo stesso modo, insegnare a riconoscere le forme geometriche a prescindere da come queste vengono presentate, ossia dalla loro dimensione, dall'orientamento, dalla posizione ecc. Ciò è facilitato se si è in grado di riconoscere, nelle varie figure, le relative «proprietà non-accidentali» (vedi Paragrafo 1.8) delle figure geometriche che altro non sono che le caratteristiche che le contraddistinguono le une dalle altre. Ciò consentirebbe di riconoscere il quadrato in qualsiasi modo venga disegnato, grande o piccolo, ruotato secondo un qualsiasi angolo ecc. Occorre essere prima di tutto abituati a riconoscere la perpendicolarità dei suoi lati in qualunque modo la figura venga presentata non affidandosi alla semplice osservazione ma attraverso un metodo efficace e rigoroso. Tale metodo prevede l'uso di strumenti e materiali didattici: come si vedrà nel Capitolo 2 una didattica della matematica centrata sulla realizzazione del disegno geometrico e sulla costruzione concreta delle figure geometriche appare del tutto in linea con questi scopi.

1.12 Le fissità funzionali

Un'ulteriore ostacolo alla completa e corretta percezione delle figure geometriche è costituito dal fatto che queste, solitamente, vengono disegnate, per i dati forniti o per esigenze legate alla ricerca della soluzione, arricchite di altre parti come diagonali, altezze, mediane ecc. E' possibile anche che due o più figure diverse siano in parte «sovrapposte». Nella Figura 1.27 è ben difficile che qualcuno percepisca distintamente le tre figure inferiori: sarà più usuale riconoscere, invece, un cerchio ed un esagono sovrapposti. Per i teorici della Gestalt, l'attività percettiva è un

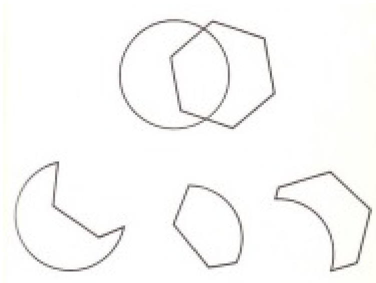


Figura 1.27: Si vedono un cerchio ed un esagono o tre figure distinte?

processo attivo, dinamico, automatico, che dà luogo a organizzazione e interpretazione. Il sistema nervoso è predisposto ad accorpare, mediante meccanismi innati, gli elementi sensoriali sulla base di alcune regole o principi dell'organizzazione percettiva per arrivare alla formazione di unità. Wertheimer (1923) sintetizzò alcune di queste regole che sono state riassunte in Figura 1.28 ([80]). Il nostro sistema di riconoscimento visivo utilizzerebbe questi principi, secondo la maggior parte degli studiosi della percezione, perchè corrisponderebbero a regolarità statistiche presenti nel mondo reale. Tornando al precedente esempio, mostrato in Figura 1.26, il quadrato con la base ruotata di 45° rispetto all'orizzontale, viene confuso con il rombo perché quest'ultimo è sempre disegnato con una diagonale orizzontale e con l'altra verticale.

Per quanto detto, i meccanismi della percezione favoriscono il riconoscimento delle figure esaminate rendendo più difficoltosa l'analisi delle particolarità delle figure stesse. Purtoppo, quando si studia matematica, in particolar maniera la geometria, è proprio di queste capacità che si ha bisogno per non cadere nella confusione tra quadrato e rombo. Tali capacità, dunque, richiedono di una educazione specifica.

Ma non è solo l'aumento della complessità della figura, in genere, a rendere più difficoltosa la codifica delle sue singole parti: tipicamente, un oggetto geometrico viene inizialmente disegnato affinchè svolga, in seno all'intera figura, una determinata funzione. Tuttavia, lo stesso oggetto, può svolgere o acquisire anche altre funzioni sempre all'interno della medesima figura. Qualora non si sia in grado di andare oltre la funzione originaria dell'oggetto disegnato, ossia di rimuovere tale *fissità funzionale*, utilizzando la definizione di un altro fondatore della teoria della Gestalt, Duncher, è possibile che non si riuscirà a elaborare una strategia risolutiva del problema ([17]). La rimozione di tali fissità, purtroppo, non è un processo naturale e necessita, anche questa, di un'educazione specifica. Il nostro sistema visivo, infatti,

I principi della Gestalt

Principio	Definizione dei contorni
Pregnanza	Ogni configurazione di stimoli è percepita in modo tale che la struttura risultante sia la più semplice possibile.
Prossimità	Tendenza degli oggetti vicini ad essere raggruppati insieme in una unità percettiva.
Similarità	Se diversi stimoli sono presentati insieme, c'è una tendenza a percepire la forma in modo che gli stimoli simili siano raggruppati insieme.
Chiusura	Tendenza ad unire i bordi che sono molto vicini l'uno all'altro.
Buona continuità	Gli elementi vicini sono raggruppati insieme quando sono potenzialmente connessi da una linea continua dritta o curva.
Destino comune	Gli elementi che si muovono nella stessa direzione sembrano essere raggruppati insieme.
Familiarità	Gli elementi hanno una maggiore probabilità di raggrupparsi se i gruppi appaiono familiari o hanno un significato.

Figura 1.28: Le regole della percezione stabilite dalla Gestalt

si attiva per farci riconoscere immediatamente una forma: il problema è che tale sistema funziona benissimo qualora si abbia bisogno di un riconoscimento olistico della figura esaminata. Diversamente, l'analisi, il relativo riconoscimento dei suoi costituenti e quindi delle possibili funzioni che questi possono avere, non è altrettanto spontaneo e va sicuramente educato attraverso un lavoro adeguato. E' proprio questa difficoltà nel percepire i diversi «ruoli» che le singole parti possono svolgere alll'interno di una figura che spesso può ostacolare l'ideazione di strategie necessarie per la risoluzione di un problema.

Viene proposto, qui di seguito, un esempio: è dato un rettangolo, sono note le lunghezze dei suoi lati, a e b. Si vuole calcolare la lunghezza di una sua diagonale c. Il problema in esame è rappresentato con una figura tutto sommato semplice costituita da un rettangolo nel quale è evidenziata una sua diagonale. La domanda pone l'attenzione proprio su tale segmento in quanto diagonale. Tuttavia, capita che si disegna la figura correttamente ma, pur osservandola attentamente, questa non sembra suggerire alcuna idea utile alla determinazione della risposta. Naturalmente lo studente e il docente si trovano ad osservare la medesima figura, lo stesso *stimolo distale*. Questi è unico ed è disponibile per entrambi allo stesso modo. Esso, naturalmente, genera nella retina dell'occhio di chi osserva un'immagine bidimensionale detta *stimolo prossimale*. Naturalmente due persone che osservano lo stesso stimolo distale da posizioni diverse avranno di questo due prospettive diverse e quindi due diversi stimoli prossimali. E' quindi già questa diversità che contribuisce a generare due diversi *percetti*. Ma supponiamo ancora che la posizione relativa dei due sia la medesima rispetto alla figura tanto da generare, in entrambi, il medesimo stimolo prossimale. Il percetto, ultimo anello della *catena psicofisica*, è strettamente legato anche alle esperienze soggettive che naturalmente possono essere molto diverse da persona a persona specie tra alunno e insegnante. Inoltre, è anche fortemente influenzato dalle conoscenze pregresse. E' quindi molto probabile che

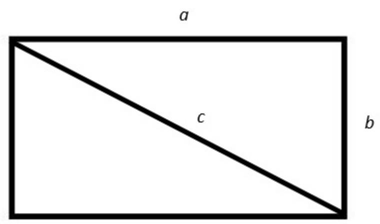


Figura 1.29: Dato a e b quanto misura c?

insegnante e studente, pur davanti allo stesso stimolo distale, pur formandosi nelle loro rispettive retine il medesimo stimolo prossimale, percepiscano, in conclusione, informazioni diverse. E' per questo che i suggerimenti del docente possono risultare inutili: probabilmente qualunque sforzo profuso avrà scarse possibilità di successo se lo studente non smetterà di vedere il segmento c solo ed unicamente come diagonale del rettangolo.

Anche per questo tipo di problematiche l'introduzione di materiali didattici, come si vedrà più avanti, costituirà senz'altro un valido aiuto. La loro manipolazione da parte degli studenti, agevolerà, nel problema esaminato, la percezione del segmento c non più solo come diagonale del rettangolo. Infatti, al fine di saper determinare la lunghezza di c occorre percepire il rettangolo formato da due triangoli rettangoli uguali aventi gli stessi lati del rettangolo. In questo modo la diagonale c sarà anche ipotenusa di tali triangoli. Questo riconoscimento è determinante per risolvere il problema o, quantomeno, per comprendere il suggerimento dell'insegnante.

Su tale aspetto, si è dell'avviso che il numero e la particolarità dei giochi che oggigiorno sono proposti ai bambini non abbiano dato particolari contributi. Fino a quando i giochi erano fatti con materiali molto resistenti e realizzati con estrema accortezza da giustificarne un costo piuttosto elevato, nelle camerette dei ragazzi non ce ne erano molti. Sicuramente ce ne erano molti meno rispetto a quanti se ne possono trovare oggi ma più economici perché di qualità inferiore. Questo stimolava la creatività dei ragazzi ad inventarne altri. Ciò poteva motivare a smontare modellini di auto per ricostruirle; oppure a ricavare, da materiali ideati per specifiche funzioni, il gioco più idoneo alla nuova esigenze. Pertanto da tavolette, chiodi e mollette per panni si ricavava un efficientissimo lancia elastici che serviva ad atterrare i soldatini avversari durante una battaglia. Tutto ciò per dire che un tempo ci si esercitava molto più di oggi a non considerare un certo oggetto solamente per lo scopo per cui era stato costruito (Figura 1.30). Questo atteggiamento probabilmente contribuiva a stimolare la creativa dei giovani. Molti di questi giochi, inoltre, si praticavano all'aperto insieme ad altri bambini, fatto questo che rendeva le situazioni molto più varie e stimolanti la creatività. L'altissimo numero di giochi di cui oggi i bambini hanno a disposizione saturano la fantasia dei ragazzi. Raramente si è stimolati a inventarne nuovi «riciclando» parti di quelli vecchi.

Figura 1.30: Una scatola di scarpe trasformata in zainetto

1.13 I modelli mentali

Si sta sostenendo, in questo lavoro, l'importanza di sviluppare negli studenti adeguate e complete capacità percettive che permettano di estrapolare da una figura geometrica il maggior numero d'informazioni possibili; queste saranno determinanti per la risoluzione di un qualunque tipo di problema matematico ad essa relativo. Si vuole approfondire a questo punto, in che modo la percezione sia utile alla formazione dei nostri pensieri. In particolar maniera, si esporrà quanto la percezione sia determinante per la formazione di modelli mentali corretti. Rifacendoci alla definizione di Johnson - Laird il *modello mentale* è «una copia mentale interna che possiede la stessa struttura di rapporti del fenomeno che rappresenta» ([33]). In altre parole, dice Catastini, una medesima immagine può generare modelli diversi a seconda della loro destinazione cognitiva ([6]). Si pensi, ad esempio, ad un'immagine satellitare del nostro paese che può generare più modelli mentali rappresentanti l'Italia e uno stivale. In matematica la genesi di modelli mentali corretti è assolutamente determinante per l'esatta, completa e anche più agevole comprensione di tale disciplina: in questo modo si è sempre in grado di formulare inferenze di carattere predittivo utili per le generalizzazioni ma, al tempo stesso, per risolvere situazioni specifiche. Catastini, a tal proposito, introduce opportune definizioni che fanno chiarezza intorno a questi concetti permettendogli anche di andare oltre le consuete diatribe su categorie contrapposte.

Definizione 1. *Un modello mentale è simulabile se permette inferenze con carattere predittivo.*

Definizione 2. *L'alone inferenziale è l'insieme delle inferenze, consce o incosce, rese possibili dal grado di simulabilità di un modello mentale.*

Naturalmente il grado di simulabilità di un modello mentale può variare da persona a persona: un calibro dato in mano per la prima volta ad un ragazzo non riesce ancora a generare modelli mentali adeguatamente simulabili diversamente da quelli che si genererebbero in un fisico esperto. Il rettangolo e la sua diagonale della Figura 1.29 ha, evidentemente, un grado di simulabilità nell'alunno che non riesce a risolvere il problema molto diverso da quello del proprio insegnante.

Infine, il grado di simulabilità di un ente è legato alla sua concretezza.

Definizione 3. *Un ente mentale è tanto più concreto quanto più è simulabile ed è tanto più astratto quanto meno è simulabile.*

Da queste definizioni non si stabilisce una contrapposizione tra concreto e astratto perché il grado di simulabilità può variare da mente a mente. Pertanto per l'insegnante il rettangolo e la sua diagonale sono avvolti in un alone inferenziale molto ricco da renderlo molto concreto rispetto al proprio alunno per il quale lo stesso concetto appare piuttosto astratto e quindi non capace di generare inferenze predittive utili alla ricerca della soluzione. Nauralmente, per quanto si sta affermando, uno degli obiettivi dell'insegnante sarà proprio quello di rendere più concreto che sia possibile ogni modello mentale matematico che si genera nella mente del proprio allievo.

Ci sono nella letteratura matematica degli esempi molto chiari di che cosa significhi procedere con una didattica che possa generare modelli mentali poco concreti. Se non vogliono citare almeno un paio.

Uno proviene dal modo in cui nei libri di testo moderni è introdotto il concetto di angolo: «è ciascuna delle due parti in cui il piano viene diviso da due semirette aventi la stessa origine». Questa definizione insiemistica di angolo, benché sempre presente nei libri della scuola del primo ciclo, non è adatta per una trattazione elementare. Quest'ultima, tipicamente, prevede la possibilità di misurare gli angoli attraverso un'unità che è il grado inteso come la trecentossessantesima parte dell'angolo giro. Interpretando, invece, l'angolo come una superficie illimitata diviene impossibile misurarlo. Inoltre, ammesso che si considerasse limitato, occorrerebbe un'unità che dovrebbe essere omogenea ad una superficie. La definizione insiemistica di angolo, dunque, peraltro già fortemente criticata da Castelnuovo in più occasioni già a partire dal 1946 appare assolutamente inadeguata, nella scuola del primo ciclo, a generare modelli mentali concreti ([4]).

Un altro esempio simile lo ha fornito Werthaimer ([79]) riferendosi al metodo, tipicamente utilizzato nei testi, per spiegare il calcolo dell'area di un parallelogramma: tale metodo indica di tracciare le due altezze rispetto ad un lato del parallelogramma. Queste in alcuni casi generano, rispetto ad una regione centrale invariata, una parte eccedente triangolare ed una mancante compensata perfettamente dalla prima. In questo modo, l'area di un parallelogramma è facilmente riconducibile a quella di un rettangolo avente stessa base e stessa altezza (Figura 1.31). Il problema però è che, considerando lo stesso parallelogramma semplicemente ruotato, si costaterebbe l'impossibilità di applicare la precedente verifica in tale caso o a tutti quelli ad esso analoghi. Il modello mentale generato sarebbe così inadeguato per una trattazione generale.

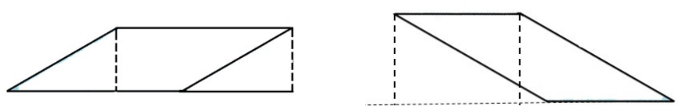


Figura 1.31: Il problema studiato da Werthaimer

1.14 Il circuito VIP - F4

Si vuole evidenziare, in questo e nei prossimi paragrafi, l'importanza in ambito cognitivo che si sta attribuendo, in questi ultimi anni, al sistema motorio. La *corteccia premotoria* della scimmia (e molto probabilmente anche quella dell'uomo) che si trova nella zona frontale è costituita da 6 aree distinte. Una di queste è la cosiddetta *area F4* in grado di controllare i movimenti del tronco, delle braccia e quelli mimici facciali ([63]). In realtà tale area non controlla solo semplici movimenti bensì gli atti finalizzati a un determinato scopo: ad esempio, sappiamo che esistono neuroni di quest'area che codificano il raggiungimento di un punto specifico dello spazio. Questi si attivano sia se il punto è raggiunto con il braccio destro sia con il sinistro. Tali neuroni non sono coinvolti, invece, nel movimento dello stesso arto se usato per pararsi da oggetti diretti verso il tronco e la faccia.

Ci sono altri neuroni che si attivano quando c'è un contatto effettivo con una di queste zone, altri quando l'animale vede oggetti avvicinarsi a tali parti ([21]) e altri ancora quando vengono emessi suoni da punti ad esse vicini ([25]). E' veramente curioso che neuroni appartenenti ad un'area motoria si attivino rispetto a stimolazioni sensoriali: evidentemente, la prossimità di un oggetto a tali parti del corpo genera come risposta un potenziale movimento verso di questi. Infatti, i neuroni dell'area F4 si attivano esclusivamente quando un determinato oggetto entra nello spazio, detto *peripersonale*, raggiungibile dall scimmia con il braccio. Addirittura, per velocità di avvicinamento dell'oggetto maggiori, la codifica dei neuroni inizia ad una distanza dal corpo maggiore perchè l'eventuale movimento del braccio deve avvenire prima rispetto a quando la velocità di spostamento è più bassa ([21]).

L'attività dei neuroni di F4 è strettamente legata a quelli dell'area VIP del solco intraparietale ([61]); anche tali neuroni rispondono a stimoli in movimento verso la scimmia. Ciò spiega la sensibilità di quest'area alla stima di distanze, di dimensioni e quindi di quantità ([16]). Infatti, si è visto nel Paragrafo 1.4, che i neuroni di VIP sono attivi quando il macaco è sottoposto ad esperimenti in cui ha a che fare con compiti di tipo «aritmetico». Quindi, le informazioni inviate ai neuroni di F4 vengono trasformate nel corrispondente atto potenziale. Quale tra questi si trasformerà in un gesto effettivo? Si ritiene che tale scelta sia presa nel lobo prefrontale tradizionalmente ritenuto in grado di svolgere un ruolo significativo nelle funzioni di ordine superiore quali la memoria di lavoro, la pianificazione temporale delle azioni, e, infine, la formazione delle intenzioni che precedono l'agire. I neuroni di F4, quindi, proiettano le loro informazioni a quelli dell'area F1 che sono proprio quelli i cui assoni sono direttamente collegati ai motoneuroni del midollo spinale e che permetteranno il movimento effettivo di una parte del corpo.

1.15 Azione e percezione

Secondo una visione classica, ritenuta corretta almeno fino a qualche decina di anni fa, attraverso la vista, l'udito e le informazioni tattili si forma la nostra conoscenza del mondo. Queste informazioni, a cui diamo un significato servendosi anche del linguaggio, vengono elaborate in modo gerarchico per arrivare a costruire il percetto. La percezione ci servirebbe in questo modo per programmare un'azione conseguente che verrà poi effettivamente eseguita. In sostanza, secondo questa visione, il *cervello che sa* rappresentato dalla corteccia parietale e temporale quindi posteriormente all'encefalo, trasmette tutte le informazioni raccolte al *cervello che fa*, rappresentato dalla corteccia frontale, anteriormente all'encefalo (queste sono le due vie della visione introdotte nel Paragrafo 1.5). In questa ottica, il sistema motorio dipende da quello percettivo entrando in gioco solo successivamente.

Un primo studio comportamentale sull'uomo, tuttavia, ha cominciato a far pensare che questa visione non fosse del tutto corretta. Johansson (1973), in un suo famoso esperimento, poneva i soggetti partecipanti alla visione di un insieme di puntini luminosi di fatto posizionati in prossimità delle articolazioni di una persona. Se i puntini erano fissi sullo schermo nessuno, generalmente, era in grado di ricavare alcun significato da tale disposizione. Quando però, successivamente, i puntini si muovevano in modo coordinato i soggetti testati vi riconoscevano un uomo che camminava. Evidentemente, questi facevano un confronto tra il movimento dei puntini e la *memoria motoria* acquisita nel tempo camminando ([32]).

Un altro studio che ha contribuito a far acquisire al sistema motorio un ruolo di primaria importanza per la percezione è in realtà costituito da due esperimenti complementari. Nel primo, condotto da Craighero e collaboratori (1996), ai soggetti esaminati veniva dapprima mostrato su uno schermo una barra e, successivamente, si chiedeva loro di afferrarne realmente una. Si riscontrò che le risposte erano più veloci quando l'orientazione della barra mostrata era uguale a quella da afferrare. Evidentemente, la percezione influenza l'azione ([12]).

Nel secondo esperimento, che ha coinvolto gli stessi ricercatori (1999), i soggetti dovevano, questa volta, prima afferrare una barra orientata obliquamente verso destra o verso sinistra ([11]). Successivamete, dovevano premere un pulsante appena vedevano proietata su uno schermo una barra analoga. Si registrò che se c'era congruenza di orientamento tra la barra presa e quella vista la pressione del pulsante avveniva in un tempo minore rispetto quando tale congruenza non c'era. Evidentemente, la rappresentazione motoria del movimento di prensione della barra agevolava il riconoscimento della sua immagine orientata nello stesso modo. Dunque, l'azione, in questo caso, influenza la percezione.

In conclusione, se nella visione tradizionale le informazioni si muovevano dalla corteccia somatosensoriale posteriore a quella motoria anteriore, la nuova, introdotta dagli esperimenti appena descritti, doveva far ipotizzare invece che le due corteccie fossero in collegamento continuo e reciproco. Come si è visto nel precedente capitolo e come si vedrà nel prossimo, tali ipotesi sono supportate da studi anatomici dapprima eseguiti su scimmie e successivamente nell'uomo, grazie all'avvento di nuove tecnologie, che hanno confermato l'esistenza di circuiti neuronali che sono risultati essere alla base dell'integrazione tra azione e percezione.

1.16 Il circuito AIP - F5

Quando si vuole prendere un oggetto occorre raggiungerlo, ad esempio con un braccio, e afferrarlo con una o due mani. Si potrebbe pensare che questi siano due processi consecutivi, con il primo che precede il secondo. Invece, gli esperimenti di Andres (2008, [1]) ci dicono che tali processi iniziano e si svolgono in parallelo così come avevano teorizzato, contemporaneamente e indipendentemente tra di loro, Jeannerod (1981, [30]) e Arbib (1981, [2]). Entrambi i loro modelli prevedevano l'esistenza di due circuiti, uno (VIP-F4, Paragrafo 1.14) dedicato al trasporto del braccio (per il raggiungimento dell'oggetto) legato alle proprietà estrinseche degli stimoli esterni (distanza, posizione) e l'altro, di cui si approfondirà in questo paragrafo, dedicato alla prensione e legato, invece, alle proprietà intrinseche degli oggetti (forma, dimensione, orientamento, peso, fragilità, tessitura, ecc.).

Il nostro cervello deve trasformare l'informazione sensoriale proveniente da quest'ultime proprietà dell'oggetto da afferrare in una particolare configurazione delle dita e poi deve essere in grado di controllare i movimenti di mano e delle stesse dita per effettuare la prensione. Quest'ultima funzione è compito dei già citati neuroni dell'area F1 gli unici in grado di controllare i movimenti delle singole dita. Tali neuroni, però, non hanno accesso diretto all'informazione visiva che invece è competenza di un altro gruppo di neuroni che si trovano nell'area *F5* dell corteccia premotoria. Questi neuroni, analogamente a quelli delll'area F4, si attivano per uno scopo piuttosto che per uno specifico movimento. Ciò è stato dimostrato in un esperimento (Rizzolatti, 1988 [63]): nel disegno della Figura 1.32 sono riportate le attivazioni di un singolo neurone specifico per l'afferramento situato nell'area F5 della corteccia di un macaco: si può osservare come tale neurone si attivi a prescindere se la scimmia afferra con la bocca, con la mano destra o con la sinistra.

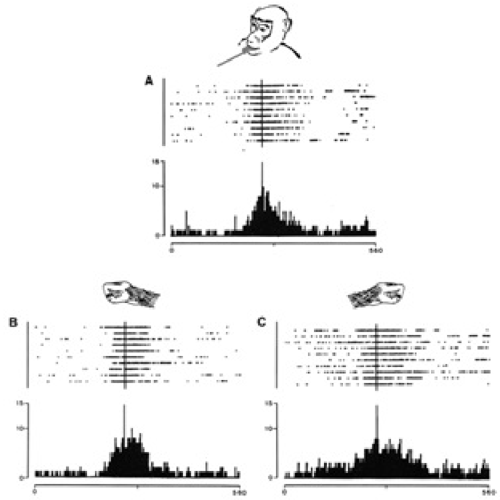


Figura 1.32: Il neurone dell'afferramento

La specificità dei neuroni dell'area F5 è straordinaria ([63]): alcuni, per esempio, si attivano per una flessione del dito indice finalizzato ad un afferramento ma non si attivano se la tale flessione è finalizzata ad un altro scopo come grattare; altri rispondono per una presa di precisione con indice e pollice ma non rispondono per una presa generica nella quale viene usata tutta la mano. Questi neuroni, addirittura, si attivano anche se la prese vengono effettuate per mezzo di una pinza ([77]). I neuroni di F5 mostrano anche una certa selettività per diverse configurazioni della dita in prese dello stesso genere. La prensione di una sfera, ad esempio, necessita l'opposizione di tutte le dita ed è codificata da neuroni diversi da quelli che rispondono alla prensione di un cilindro per il quale non è necessaria l'opposizione del pollice ([31]).

Tra questi neuroni che rispondono a stimoli motori tipo presa, detti *neuroni motori*, ce ne sono alcuni, detti *visuo-motori* che rispondono anche a stimoli visivi ([45]). Non solo: la scarica di certi neuroni visuo-motori, durante la semplice fissazione di oggetti, è più forte per certi solidi geometrici piuttosto che per altri; inoltre, tale selettività, coincide con le attivazioni conseguenti all'atto di presa vero e proprio. Ciò è sorprendente perché, durante la fissazione, la forma dell'oggetto è del tutto irrilevante ai fini dell'esecuzione del compito. Inoltre, la maggior parte di questi neuroni, manifesta una selettività motoria per un certo tipo di prensione e, allo stesso tempo, visiva per oggetti diversi ma accumunati dallo stesso tipo di presa codificata a livello motorio.

In definitiva, si può dire che F5 contiene un vero e proprio *vocabolario di atti motori* le cui *parole* sono gruppi di neuroni: alcuni di essi si occupano dello scopo generale dell'atto (tenere, rompere, afferrare) altri il modo in cui un atto motorio specifico può essere eseguito (presa di precisione).

Mediante studi con fMRI si è capito che fenomeni simili avvengono anche nell'uomo: la presentazione di oggetti o strumenti afferrabili attiva aree della corteccia premotoria analoghe a F5 sia nei casi in cui era prevista una presa sia in quelli che non era previsto alcun movimento ([52]).

E' assolutamente curioso che neuroni di F5 che codifichino movimenti si attivano anche per la semplice visione di oggetti. E' necessario, allora, introdurre un'area cerebrale con la quale F5 dimostra avere una stretta correlazione. Tale area si trova sempre nel solco intraparietale in vicinanza della regione VIP ed è chiamata *AIP, Anterior Intraparietal Cortex* (Figura 1.33). Anche questa, si caratterizza per avere neuroni che si attivano durante i movimenti della mano ed è costituita da neuroni motori, visuo motori ma anche semplicemente *visivi* che invece non sono stati rilevati nell'area F5 ([69]). I neuroni di quest'area rispondono in maniera selettiva per specifiche prese e, buona parte di essi, codifica preferibilmente un solo oggetto. Ad esempio, ci sono neuroni che si attivano sia durante la presentazione di una matita che per una bacchetta in quanto i modi per essere entrambe afferrate sono abbastanza simili.

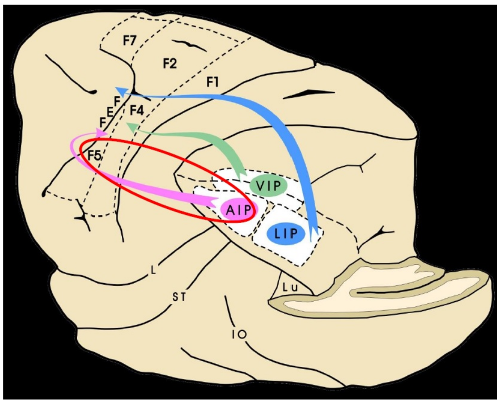


Figura 1.33: Il circuito AIP - F5 tra solco intraparietale e corteccia pr emotoria

Perchè i neuroni visuo-motori e visivi di AIP rispondono in maniera selettiva a specifici stimoli tridimensionali? E' evidente che nella nostra corteccia cerebrale vengono elaborate due diverse descrizioni di un oggetto. Una è prettamente visiva, detta *pittorica*, che contribuisce a una percezione globale dell'oggetto. Tale compito è competenza di neuroni deputati al solo riconoscimento degli oggetti che si trovano nella corteccia infero - temporale. Un'altra descrizione viene detta *pragmatica* e ha a che vedere con i diversi modi in cui un certo oggetto può essere afferrato. A tal proposito, Gibson nella seconda metà del secolo scorso, introdusse il termine *affordances* per indicare proprio le qualità fisiche di un oggetto che suggeriscono le azioni appropriate per interagire con esso ([24]). Quando si osserva una tazzina, ad esempio, le sue affordances attivano neuroni di AIP che trasmettono, a loro volta, informazioni ai neuroni visuo-motori di F5 che codificano atti motori a esse congruenti. Tali informazioni motorie vengono quindi inviate ai neuroni di F1 per eseguire effettivamente il movimento.

Non è chiarissimo come le risposte motorie si siano accordate con le affordances di un oggetto: è possibile che queste, nel tempo, si siano associate al gesto motorio più efficace ad ogni determinata presa. Naturalmente, ogni oggetto può essere afferrato in modi diversi: la tazzina di caffè (Figura 1.34) può essere presa con tutto il palmo della mano se dobbiamo spostarla, con pollice e indice per il manico se dobbiamo bere il caffè che vi è contenuto. Questo vuol dire che diverse popolazioni di neuroni di AIP si attivano alla sola vista della tazzina, ciascuna delle quali codifica una determinata affordance. E' presumibile che le informazioni riguardanti le possibili azioni sulla tazzina vengono inviate ai neuroni di F5 innescando dei veri e propri atti motori potenziali. Precedentemente si è affermato che l'area F5 ha una sorta di vocabolario di atti motori; tale interpretazione spiega perché interagiamo con gli oggetti sostanzialmente sempre allo stesso modo. Per bere il caffè afferriamo la tazzina con pollice e indice per effetto di un meccanismo di apprendimento iniziato dall'infanzia e basato su un successo dell'azione effettuata, il cosiddetto *rinforzo motorio* con la conseguente selezione dei neuroni di F5 che codificano gli atti di migliore efficacia.

Naturalmente la modalità di azione con la tazzina, la sua parte da afferrare, non dipende solo dalle sue affordances ma dal contesto e dal motivo per cui dobbiamo afferrarla. E' noto che il lobo pre-frontale e le aree del cingolo hanno un ruolo decisivo per orientare le nostre scelte. Ora tale scelta può avvenire in F5 o in AIP. Siccome, però, le connessioni dirette tra lobo frontale e F5 sono piuttosto modeste mentre quelle tra la corteccia prefrontale e AIP sono molto forti è possibile che tale scelta avvenga in AIP e riguardi solo le affordances ([54]). Mediante questa interpretazione in F5 arriverebbero le informazioni riguardanti una sola affordance e su questa verrebbe deciso l'atto motorio opportuno.

Come detto, i neuroni di F5 scaricano per una certa prensione con un determinato oggetto ma anche durante la semplice osservazione dell'oggetto anche senza interagire attivamente con esso. L'unico modo per interpretare correttamente il comportamento di questi neuroni è di riconoscere alle risposte visive che a quelle motorie il medesimo *significato funzionale*: evidentemente la scarica dei neuroni di F5 può riflettere anche solo l'evocazione di uno schema motorio che rimane allo stato potenziale.

Figura 1.34: Le due modalità di riconoscimento degli oggetti: pittorica e pragmatica

Poiché neuroni di AIP o di F5 scaricano sia se l'oggetto viene afferrato sia se semplicemente osservato significa che il modo in cui gli aspetti sensoriali vengono codificati è lo stesso. Quindi, ogni oggetto è identificato in funzione delle possibilità motorie che richiede per essere preso. Pertanto, si può concludere che la selezione della affordance per ogni oggetto avviene in AIP con la conseguente attivazione in F5 degli atti motori potenziali: si stabilisce così una correlazione tra il tipo di presa e il tipo di oggetti codificati che, qualora risulti efficace, ne consalida la caratterizzazione in termini di possibilità di azione.

Si può parlare dunque di un «vedere con la mano» interpretando l'oggetto percepito come un insieme determinato di ipotesi di azione ([42]). Siccome i neuroni di F5 quanto quelli di AIP si attivano al di là dell'effettiva prensione sta a significare anche che tutti questi neuroni reagiscono al significato che tale oggetto ha per il soggetto in azione ([53]). E' una comprensione puramente pragmatica perché i neuroni di AIP e F5 rispondono solo ad alcuni tratti degli oggetti; ciò non permette, comunque, di attribuire al sistema motorio solo compiti esecutivi e di controllo. Il vocabolario motorio di cui è costituito determina un'interazione continua tra percezione e azione che, benché sia pragmatica, ha un ruolo decisivo nella costituzione del significato degli oggetti e senza le quali, diverse funzioni di ordine superiore, non potrebbero esserci ([29]).

1.17 Conclusioni al capitolo

Emerge, per quanto detto in questo capitolo, che l'apprendimento della matematica elementare, tenendo in considerazione le attivazioni corticali di aree della corteccia parietale, è facilitato se si fa continuamente riferimento al concreto. Ciò vale per anche per l'aritmetica poiché la nozione di numero, per essere compresa nella sua essenza, deve avere un riferimento nello spazio. E' pensabile, inoltre, che la comprensione delle varie proprietà dei numeri risulta essere agevolata se si riesce a dare a quest'ultimi una forma che le renda immediatamente visibili alla sola osservazione. Quindi è quanto mai opportuno che si sviluppino capacità percettive spiccate se si vogliono carpire tutte le informazioni che le figure sono in grado di fornire. Considerando le potenzialità del sistema motorio che sono state appena esposte si può congetturare che la manipolazione di strumenti didattici riproducenti forme geometriche possano favorire lo sviluppo e il consolidamento di tali capacità.

Capitolo 2

Geometria e percezione

2.1 Introduzione

Le principali scoperte neuroscientifiche relativamente all'apprendimento della matematica, riportate nel Capitolo 1, sostanzialmente ci dicono che il suo studio deve essere sempre riferito al concreto. Ciò è tanto più indispensabile quanto più gli studenti ai quali ci si rivolge sono nell'età della loro formazione, ossia sostanzialmente quelli frequentanti la scuola del primo ciclo. Si vedrà, anche con esempi, che il riferimento alla storia del pensiero matematico, anche attraverso grandi personaggi vissuti nel passato, è fondamentale sia per avere a disposizione validissimi spunti da un punto di vista dei contenuti sia perché l'approccio primordiale alla matematica da parte dell'essere umano è molto vicino al modo di apprendere dei pre adolescenti.

Fare riferimento al concreto in matematica significa prevedere l'utilizzo di strumenti didattici: quelli tradizionali, quali riga e compasso, per stimolare alla costruzione consapevole delle figure geometriche, volendo mantenere lo spirito dell'esempio euclideo. Ma se la dimostrazione assiomatica deduttiva favorita del disegno geometrico è senz'altro determinante per lo sviluppo delle capacità logiche per gli studenti delle scuole superiori non è altrettanto adeguata per quelli più piccoli. Pertanto è indispensabile pensare all'ideazione di un altro tipo di materiale didattico che, attraverso la sua manipolazione, sia capace di veicolare il pensiero del giovane verso la formulazione individuale di congetture e la loro verifica. Non solo: l'individuazione di invarianze in un contesto che varia permetterà di fare verifiche di plausibilità di proprietà generali avvicinando lo studente, in questo modo, ad un atto dimostrativo sebbene ancora non formale. Si comprende dunque quanto sia importante sviluppare determinate capacità intuitivo-geometriche che permettano di estrapolare quante più informazioni possibili da un oggetto didattico in grado di racchiudere significati matematici.

Nel seguente capitolo verranno forniti due esempi didattici che seguono tutti questi principi.

2.2 Didattica, storia del pensiero matematico e neuroscienze

E' estremamente importante per chi si occupa di didattica della matematica, conoscere la storia del pensiero matematico, le sue origini e il modo in cui questi si è evoluto. Portare in classe le esigenze che hanno spinto l'essere umano a passare da attività prettamente manuali ed empiriche a elaborare una teoria matematica aiuta certamente a far comprendere in maniera più chiara il rapporto esistente tra l'uomo e questa disciplina.

Le idee matematiche, in genere, sono nate in modo impreciso e, a volte, hanno dato luogo ad algoritmi farraginosi. Oggi, però, si è in grado di affermare che si sono generate secondo il nostro modo naturale di apprendere dipendente da capacità innate possedute. Alcune aree corticali, infatti, originariamente deputate a svolgere altre funzioni, si adattano meglio di altre a eseguire compiti matematici grazie alla plasticità delle connessioni sinaptiche dei neuroni (vedere nel Capitolo 1).

In matematica, così come in ogni altra disciplina, i progressi effettuati, le nuove scoperte che ne sono conseguite, hanno sempre incontrato delle difficoltà. Grazie ad un lavoro talvolta durato anche secoli tali difficoltà sono state alla fine superate: ciò ha dato origine ad un nuovo assetto delle idee del tutto stabile all'interno di un quadro generale. Questi ostacoli, frequentemente, sono gli stessi presenti nella mente degli allievi: renderli espliciti con gradualità è importante per favorire il loro superamento.

E' altresì vero che, nel tempo, le idee primordiali sono state arricchite per mezzo di un successivo sviluppo di tecniche, algoritmi efficaci e più pratici. Introdurre però sin nei primi anni scolastici rigide formule, magari semplificate, da memorizzare e utilizzare negli esercizi, è molto pratico ma rischia di soffocare il piacere di comprendere la matematica: è difficile, così, che si possa generare passione nei suoi confronti. Anzi, il pericolo è che, studiata in questo modo, si possa arrivare ad odiarla e, conseguentemente, a rifiutarla. Gli studenti debbono procedere per gradi per essere sempre in condizione di capire il senso di cosa stanno facendo: in questo modo possono provare a organizzare, per lo più autonomamente, strategie risolutive delle problematiche loro proposte. È più facile che tale approccio generi più interesse e motivazioni allo studio della matematica: le sfide poste al pensiero, le conseguenti scoperte individuali, l'esaltazione che ne consegue, sono il motore della partecipazione attiva degli studenti.

Nel Paragrafo 1.6 si è spiegato che l'area della corteccia parietale denominata PSPL (Posterior superior Parietal Lobe) si caratterizza per la presenza di neuroni che si attivano sia se pensiamo ad una certa quantità, se eseguiamo calcoli anche mediante simboli sia se eseguiamo saccadi per spostare l'attenzione nello spazio. Sono proprio queste le regioni responsabili del fatto che associamo un numero ad un punto su una linea immaginaria, o se dati due numeri, posizioniamo il più grande a destra del più piccolo all'interno di un certo intervallo di valori, o che la somma di due quantità o di due numeri ci fa spostare l'attenzione verso destra mentre la loro sottrazione verso sinistra. Non è un caso che Euclide, considerato autore della prima teoria scientifica della storia, secondo la definizione di Russo ([67]), negli Elementi ha introdotto come primi enti matematici quelli geometrici, come ad esempio il punto e il segmento. Solo successivamente, precisamente nel libro

V, ha introdotto il concetto di numero associandolo ad un concetto geometrico per mezzo della seguente definizione: «di due grandezze omogenee la minore si dice parte della maggiore, quando quella misura questa esattamente». Questa, che di fatto è la definizione di unità di misura, ci permette di associare biunivocamente un punto geometrico appartenente ad una retta con un numero naturale ed esprimere, sempre con un numero, la misura di un qualunque segmento. Montessori aveva colto pienamente questa associazione. In [44] disse: «Fino ad una certa epoca aritmetica e geometria procedevano unite, poi fu necessario dividerle. Ma la cosa più semplice e più chiara è l'origine delle cose: come ripeto sempre, il bambino deve avere l'origine delle cose perché l'origine è più chiara e più naturale per la sua mente». Queste affermazioni appaiono oggi straordinariamente moderne specie se messe in relazione con le recenti scoperte neuroscientifiche.

2.3 Gli strumenti didattici

Sempre nel Capitolo 1 si sono descritti alcuni esperimenti finalizzati a indagini corticali (nei macachi) e altri, di tipo comportamentali (negli essere umani), che permettono ormai di avere alcune certezze sull'esistenza di uno stretto rapporto tra l'uso delle mani e le nostre facoltà intellettive: ciò è dovuto all'esistenza di circuiti che collegano alcune regioni del solco intraparietale che ricevono proiezioni direttamente dalla periferia e l'area premotoria (F5). Quest'ultima si caratterizza dunque per avere neuroni che si attivano per particolari movimenti, come le prensioni, in relazione a determinati oggetti. Inoltre, sempre (ma non solo) nell'area F5 ci sono neuroni (*neuroni specchio*, [62]) che si attivano se si vede eseguire quella stessa prensione da altri. Questo modello fa acquisire alla corteccia motoria nuovi compiti di ordine superiore e di tipo cognitivo: processi come comprendere, memorizzare, ricordare possono essere legati a veri e propri atti motori. La continua interazione tra percezione e azione, dovuta alla manipolazione di oggetti, ha un ruolo decisivo nella costituzione di significati e senza la quale, presumibilmente, la formazione di funzioni cognitive superiori risulterebbe limitata.

Montessori aveva sostanzialmente già intuito tutto ciò: ecco perché le sue idee sono oggi fortemente supportate dalle scoperte neuroscientifiche ([59]). A tal proposito, in [44] ha scritto: «L'attività interiore è il capolavoro della mente creatrice - e noi non possiamo intervenire direttamente in essa. Siccome però la mente si costruisce a mezzo di una continua attività che è centrale (la mente) e periferica (i sensi, il movimento), possiamo assistere dall'esterno al suo lavorio. La periferia ci è accessibile. . . . Noi dunque è verso la periferia che ci rivolgiamo come educatori.»

Tutto ciò è avvalorato dal fatto che l'interazione con la periferia è, si potrebbe dire, piuttosto spontanea. Un qualunque oggetto posto di fronte ad un neonato richiama necessariamente il suo interesse; già ad un bambino un po' più grande può suscitare specifiche prensioni per effetto delle affordance ma anche per i suoi colori, per il tipo di materiali in cui sono fatti solidi e non (pensare all'acqua o ad una sabbia). Queste sono tutte caratteristiche che invitano chiunque ad interagire con un oggetto, un gioco. Le mani, dunque, assumono un ruolo fondamentale come strumento di esplorazione e quindi di conoscenza.

Apprendere la matematica mediante l'uso di specifici strumenti permette di generare un forte legame, indissolubile, tra concetti e materiali concreti; pertanto, la comprensione delle proprietà matematiche, il loro recupero in memoria, la loro rielaborazione vede il lavoro sinergico di diverse aree corticali le cui funzioni si completano e si integrano a vicenda, laddove un'area cha ha sviluppato connessioni sinaptiche più efficenti può colmare le eventuali deficienze di un'altra.

Ciò giustifica perché per un apprendimento naturale e completo della matematica si ritiene di estrema importanza l'uso di opportuni materiali direttamente manipolabili dagli studenti: i movimenti esplorativi sugli oggetti di lavoro rappresentano quell'agire sulla periferia di cui parlava Montessori. Anzi si dovrebbe parlare di interazione con la periferia se si pensa che per mezzo di movimenti modifichiamo continuamente la nostra relazione con gli oggetti esterni, facendo aggiornare continuamente le nostre congetture in seguito alle immediate verifiche che si possono eseguire. Questo comporta, inoltre, la possibilità di comprendere anche autonomamente i motivi degli errori delle nostre eventuali congetture. Ecco i motivi per cui la percezione non è solamente un processo cognitivo che produce rappresentazioni coscienti del mondo ma anche e soprattutto un processo che guida le nostre azioni. Ne consegue, dunque, l'importanza che le si attribuisce in ambito didattico e la necessità di orientare le attività in modo da svilupparla nei giovani adeguatamente.

2.3.1 Importanza dell'uso degli strumenti tradizionali nella didattica della geometria

Si ritengono gli Elementi di Euclide una delle fonti principali da cui attingere per ideare attività didattiche perché costituiscono un vero e proprio esempio di teoria scientifica ([68]). Le proposizioni euclidee si dividono in due tipi: i teoremi, attraverso i quali si dimostrano proprietà mediante deduzioni assiomatiche e, i problemi, che riguardano la costruzione degli oggetti coinvolti nei teoremi attraverso disegni rigorosi basati sull'uso della riga e compasso. La realizzazione delle figure, infatti, è una novità assoluta introdotta da Euclide e la riteniamo di fondamentale importanza in didattica della matematica. L'uso della riga e del compasso per realizzare gli oggetti matematici, come ad esempio due rette parallele, consente di comprendere con molta più profondità le caratteristiche essenziali di ciò che si sta costruendo e le relative proprietà. Per i motivi già riportati nel Paragrafo 2.3, in questo modo, le nuove conoscenze sono destinate ad essere comprese in modo corretto per collocarsi quindi in maniera permanente nella nostra mente.

Tuttavia, non è pensabile utilizzare gli Elementi a scuola così come ci sono pervenuti. La questione, tutt'al più, sta nel come proporli per essere adatti alle capacità degli studenti cui ci si rivolge cercando di mantenerne i principi generali. Un primo problema è pensare ad un percorso didattico in cui le costruzioni geometriche siano «gestibili» dagli studenti, nel senso che questi debbono essere sempre in grado di comprenderne i singoli passaggi. Di pari passo, si scoprono così gli elementi caratterizzanti di ogni oggetto costruito e le sue proprietà: soprattutto per i ragazzi della scuola secondaria di primo grado, tutto ciò costituisce un primo passo verso la formulazione d'inferenze (si ritornerà su questo punto nel Paragrafo 2.5) che riguardino casi simili a quello studiato.

2.3.2 Logica e intuizione

Sull'importanza del disegno geometrico Enriques sosteneva: «la geometria razionale euclidea risulta essere la principale palestra dove esercitare questa continua interazione tra immagine e deduzione, tra logica ed intuizione» ([18]). Egli sosteneva, dunque, che l'apprendimento della matematica è decisamente più agevole e completo qualora avvenga attraverso uno sviluppo paritario e integrato delle capacità intuitive e logiche: queste costituiscono due aspetti inseparabili del pensiero che nascono e si sviluppano grazie alla loro interazione continua. Di fatto suggeriva di non fare l'errore in didattica di privilegiare una delle due a scapito dell'altra. Anche Catastini, tra i primi matematici ad occuparsi di neurofisiologia e di campi della psicologia riguardanti il funzionamento della mente, mette in risalto che il *pensiero visivo* e quello *analitico verbale* siano due diversi strumenti appropriati d'indagine e che tali modalità di ragionamento debbano essere stimolate nella pratica didattica per facilitare negli studenti lo sviluppo di strategie mentali più armoniche ed efficaci ([7]). Le intuizioni di questi matematici sono oggi ampiamente confermate dalle neuroscienze: Dehaene ad esempio, in un suo saggio ([3]), sintetizzando i risultati da lui stesso ottenuti e quelli dei suoi colleghi, ha sottolineato l'assoluta importanza di favorire la continua comunicazione tra i nostri due emisferi, quello di sinistra, sede delle nostre funzioni analitiche, logiche e verbali e quello di destra sede delle nostre funzioni sintetiche, intuitive, spaziali e che un opportuno insegnamento della matematica svolge un ruolo di primaria importanza in tal senso. Naturalmente poiché l'acquisizione sia delle capacità intuitive che di quelle logiche variano sensibilmente da un'età all'altra, occorre ponderare attentamente il tipo di attività da proporre per favorire il loro sviluppo. E soprattutto: come facilitare la creazione di connessioni nervose che mettano in comunicazione i due emisferi nei bambini e nei ragazzi frequentanti la scuola del primo ciclo? Enriques, che non poteva certo conoscere le specificità funzionali del nostro cervello, suggeriva comunque di procedere per gradi evitando di fare salti non comprensibili dagli alunni e, soprattutto, di affrontare ogni argomento attraverso un passaggio dal concreto all'astratto.

2.3.3 Nuovi strumenti didattici: caratteristiche generali

Il disegno geometrico, però, ha il difetto di essere «statico» e ciò, a volte, non facilita la corretta percezione della figura rappresentata. Per quanto detto nel Paragrafo 1.15 la percezione è estremamente soggettiva, intanto perché dipendente dalla posizione e dalla distanza di osservazione della figura. Ma, soprattutto, dipende dalle esperienze passate, dalle capacità visuali e attentive delle singole persone, dal saper cogliere tutte le informazioni dalle singole figure. Ad esempio, non tutti si rendono conto che la figura E, evidenziata dal color grigio e rappresentata in Figura 2.1, è definita dalla differenza e non dalla somma di due rettangoli. Errori di questo tipo derivano solitamente da una scarsa capacità d'astrazione non supportata da una percezione geometrica adeguatamente sviluppata.

Pertanto, per far superare questo tipo di difficoltà, si ritiene assolutamente formativo far costruire tale figura attraverso un materiale che possa essere manipolato direttamente dagli studenti: infatti, effettuando tutti i possibili movimenti, i ragazzi possono esaminare la figura da tutti i punti di vista, fare riflessioni e congetture più ponderate, rilevare quelle errate e, quindi, autocorreggersi. Come si vedrà più

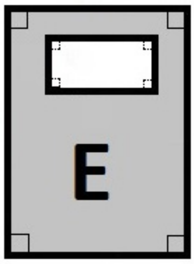


Figura 2.1: Figura rettangolare con foro sempre rettangolare

avanti, quando si riporteranno le esperienze realizzate e i dati raccolti in attiviità didattiche, sia il disegno e l'uso di materiali porteranno miglioramenti immediati nella percezione delle figure. E' solo successivamente, a distanza di mesi, che si apprezzeranno ulteriori miglioramenti tra chi ha manipolato materiali rispetto a chi ha solo effettuato disegni.

Per quanto detto in 1.16, le regioni del solco intraparietale della nostra corteccia cerebrale, ricevendo proiezioni direttamente dalla periferia, per esempio dalle mani, ritrasmettono a loro volta tali segnali verso la cosiddetta area premotoria situata nella corteccia frontale. I neuroni che la costituiscono «scaricano» dunque per azioni molto specifiche come, per esempio, una specifica prensione o il movimento di un dito che sposta in avanti un oggetto. Inoltre, tale interazione periferia - centro non è unidirezionale: basti pensare che per mezzo di movimenti modifichiamo, di fatto, la nostra relazione con gli oggetti esterni. È per questo motivo che le informazioni che ricaviamo da tali movimenti sono da noi utilizzate per correggere, definire, guidare le nostre azioni e aggiornare continuamente le nostre congetture potendole verificare all'istante. Se infine, a tutto ciò aggiungiamo che i neuroni che stiamo considerando si attivano anche quando si vede eseguire da altri quello stesso movimento e, quindi, quando solo lo immaginiamo, si può concludere che processi come ricordare, memorizzare e comprendere sono legati ad atti motori che consegnano alle aree cerebrali nuovi compiti di tipo cognitivo. Alla luce di quanto affermato, dunque, è assolutamente necessario introdurre la matematica in età preadolescenziale attraverso un continuo riferimento al concreto che sviluppi una spiccata percezione tattile e visivo - geometrica.

Gli strumenti didattici utilizzati, sia che vengano fatti costruire appositamente, sia che siano riciclati perché costruiti per altri scopi, debbono sicuramente essere in ogni caso belli al tatto e nei colori perché debbono riuscire, soprattutto in una fase iniziale delle attività, a conquistare l'attenzione dello studente che dovrà usarli. Ma la bellezza estetica non è l'unico requisito che i materiali scelti devono possedere: questi debbono contribuire a mantenere alta la concentrazione su quanto si sta facendo. Anche questo aspetto è di estrema importanza nell'apprendimento. Grazie a risultati di esperimenti comportamentali noti eseguiti sull'uomo, sappiamo che l'attenzione influenza tutte le modalità sensoriali. A tal proposito, Fogassi, dice in [59]: «l'attenzione è un meccanismo in più, che è sicuramente adattativo per l'individuo, in quanto gli consente di enfatizzare aspetti importanti del mondo esterno e di trascurne altri, momentaneamente meno rilevanti».

Per tali motivi gli strumenti didattici debbono essere anche «essenziali» nel senso che le loro caratteristiche predominanti debbono introdurre i ragazzi al concetto da indagare senza elementi distrattivi. Cioè devono essere in grado di «isolare uno stimolo alla volta volta per far si che l'attenzione non venga dispersa o diffusa» ([59]). Con tali caratteristiche saranno in grado di veicolare il pensiero e accompagnare nei loro ragionamenti i ragazzi, risultando, in questo modo, un valido strumento di aiuto durante l'apprendimento.

2.4 Sviluppo delle capacità percettivo-geometriche

In 1.9 si è compreso perché le nostre capacità di percezione visiva svolgano un ruolo di primissimo piano nello studio della matematica in particolar maniera della geometria. Il nostro sistema visivo proietta le sue informazioni anche verso il lobo occipito-temporale inferiore in cui sono localizzate regioni corticali deputate al riconoscimento di ciò che vediamo: sappiamo dell'esistenza di neuroni che si attivano solo in presenza di determinati volti, di determinati oggetti e forme. È grazie a queste aree che impariamo a riconoscere oggetti uguali, della stessa forma e simmetrici: sono capacità innate che ci derivano dall'evoluzione per selezione naturale. La plasticità dei neuroni è tale che, alcuni di questi, diverranno «capaci», per effetto dell'educazione culturale, di attivarsi in presenza di specifici simboli come lettere e numeri o per intere parole ([13]). I bambini, se in possesso di un sistema visivo che interagisce adeguatamente con il lobo temporale, in genere riescono a dedurre facilmente l'uguaglianza di lati, di angoli e di superficie in due figure geometriche uguali. Capita, invece, che ragazzi frequentanti la scuola secondaria di primo grado non sempre riescono a stabilire con altrettanta facilità, in figure diverse, la loro eventuale equivalenza. Abbiamo inoltre constatato che le difficoltà di percezione visiva aumentano sensibilmente nel caso in cui due superfici abbiano parti in comune. Infatti, poiché il nostro sistema di riconoscimento delle forme, sempre per meccanismi innati, è predisposto ad accorpare diversi elementi sensoriali sulla base di regole di organizzazione della percezione (*teoria della Gestalt*), capita a volte che possa addirittura ostacolare o comunque rendere più ardua la codifica dei costituenti delle figure che stiamo osservando. Queste difficoltà hanno frequentemente una causa comune e cioè l'incapacità di riconoscere la molteplicità dei «ruoli» che uno stesso elemento può assumere all'interno dell'intera configurazione considerata. È quanto mai opportuno rimuovere o, meglio ancora, evitare l'insorgenza di queste fissità funzionali (si veda il Paragrafo 1.12) attraverso un'adeguata educazione: queste infatti ostacolano quelle ristrutturazioni degli elementi del problema necessarie all'ideazione di una corretta strategia risolutiva. Anche in questi casi è evidente come l'utilizzo di un apposito materiale da manipolare possa essere di particolare utilità: due triangoli rettangoli di cartone o plastica avvicinati opportunamente lungo le loro rispettive ipotenuse a formare un rettangolo renderanno immediatamente evidente la duplice funzione assunta dalla sua diagonale (Figura 2.2).

2.5 Basi del pensiero razionale

Si comprende dunque, per quanto asserito fino a questo punto, l'importanza di concretizzare, mediante un opportuno strumento, un concetto astratto matematico.

Figura 2.2: La diagonale del rettangolo è anche ipotenusa di due triangoli rettangoli

Nell'esempio esaminato nella figura 1.29 del Paragrafo 1.12 si chiedeva di determinare la lunghezza della diagonale c noti i lati a e b. Abbiamo detto che, uno studente non in grado di riconoscere nella diagonale anche l'ipotenusa dei triangoli rettangoli che si vengono a formare, difficilmente riuscirà a determinare la soluzione del problema. Fornendogli i due triangoli in plaxiglass, per esempio, rappresentati in Figura 2.2 sarà aiutato a riconoscere il secondo ruolo assunto dalla diagonale nella figura.

Osservando con attenzione i ragazzi di età compresa tra gli 11 e i 14 anni mentre lavorano con materiali, si nota un progressivo cambiamento nel loro approccio alla disciplina rispetto al passato: è evidente, infatti, come essi non traggano più conclusioni solo relativamente agli oggetti a disposizione ma tendano a generalizzare cominciando a manifestare i primi segnali di un processo di astrazione. Va detto che, tali generalizzazioni, sono quasi sempre troppo affrettate frutto di ponderazioni molto superficiali perchè il loro sistema decisionale è ancora piuttosto immaturo. Pertanto, anche se è bene, in una fase iniziale dello studio, formulare congetture sulla base dell'analisi di pochi esempi specifici (quelli rappresentati dai materiali in esame, ad esempio) non è corretto, da un punto di vista della logica razionale, considerare valide tali congetture per ogni altro caso. Salvo il fatto che si facciano i dovuti controlli mediante dimostrazioni rigorose come quelle euclidee. Inoltre, i ragazzi a cui ci si sta riferendo in questo lavoro, non riescono ancora a tenere sotto controllo i diversi anelli di una lunga catena di deduzioni logiche necessarie per argomentare un'affermazione. Neanche possono avvalersi di un linguaggio matematico formale per supportare rigorosamente quanto sostengono: l'uso di lettere è troppo distante dalle ancora deboli capacità d'astrazione.

Pertanto, si comprende quanto sia importante favorire processi di ragionamento razionali ma adeguati all'età: ciò è senz'altro favorito dall'uso sistematico di materiali (come si vedrà nel Paragrafo 2.7, nel Paragrafo 2.8 e nel Paragrafo 3.6.5 del Capitolo 3), che devono essere in grado di costituire modelli mentali corretti (si veda il Paragrafo 1.13). La formazione in ambito geometrico di quest'ultimi è determinata dalla rilevazione di caratteri di una figura che rimangono invariati al variare delle sue dimensioni, o delle ampiezze dei suoi angoli, per esempio. Tale figura, definita *base*, può essere formata dall'unione di più oggetti (si veda il Paragrafo 2.8), da strisce incernierate in un estremo di plastica o metallo (come quelle presentate in [5]). Oppure, può essere riportata su una tavola (Paragrafo 2.7) o costituita da una cornice (sempre nel Paragrafo 2 del capitolo 3): questi due ultimi tipi di basi sono utilizzate insieme ad un altro materiale che, a seconda dei casi, viene sovrapposto o inserito all'interno e qui fatto muovere. La figura rappresentata da tale materiale viene chiamata *figura mobile* e può essere data una superficie lucida quando le basi sono delle tavole (si veda ancora nel Paragrafo 2) oppure in plastica o legno (si veda nel Paragrafo 2.7) quando le basi sono cornici.

La scoperta di questi invarianti che definiamo *strutture stabili* è oltremodo importante qualora si comprendano le ragioni della loro stabilità. Capire tali ragioni è quindi fondamentale per la formazione di quei modelli a cui si faceva precedentemente riferimento. Questi saranno richiamati ogni volta si dovranno fare congetture predittive di carattere generale o risolvere situazioni specifiche nel caso di esercizi. Poiché ci si avvale sostanzialmente di materiali che simulano le caratteristiche dell'oggetto matematico considerato chiamiamo *dimostrazione figurata* la procedura che porta a riconoscere l'esistenza di una struttura stabile. Tale definizione prende spunto da quella di Filolao riportata da Catastini e Ghione in [9] che, almeno secondo Giamblico, le avrebbe chiamate *dimostrazioni per natura e non per convinzione* ([23]). E' molto importante che un adolescente sia capace di motivare le sue argomentazioni mediante una dimostrazione figurata al punto da ritenere tale capacità uno degli obiettivi fondamentali da raggiungere alla fine del primo ciclo d'istruzione. Si tratta, infatti, di cominciare a procedere mediante un atto dimostrativo avente un certo rigore anche se ancora decisamente non formale. Quanto fin qui sostenuto spiega dunque quale tipo di deduzioni costituenti comunque una logica coerente si possono formulare mediante l'utilizzo ponderato di materiali didattici opportunamente realizzati. Per indagare determinate proprietà di un ente matematico, quindi in quanto tale, astratto, si fa ricorso ad un oggetto concreto. La sua manipolazione da parte degli studenti favorisce congetture direttamente verificabili sull'oggetto stesso. Ciò fa supporre che tali proprietà possano valere anche se l'oggetto s'ingrandisce o si rimpicciolisce senza perdere le caratteristiche che lo definiscono (se è un quadrato, un quadrato deve continuare ad essere pur variando la lunghezza dei suoi lati). Quindi, individuando le strutture stabili di questi oggetti si scoprono, allo stesso tempo, le proprietà sempre vere del tipo di figura in esame. In questo modo si chiude il cerchio: si è partiti dall'indagare su questioni astratte mediante l'uso di materiale concreto che deve consentire di pervenire a proprietà generali.

È altresì evidente che non abbiamo ancora a che fare con delle vere e proprie dimostrazioni assiomatico-deduttive di tipo euclideo che potranno essere proposte nei gradi superiori dell'istruzione. Tuttavia in questo modo si fondano le basi del pensiero razionale: queste sono di assoluta importanza per chi proseguirà gli studi ma, più in generale, per affrontare una qualunque situazione problematica anche di natura non matematica e quindi indispensabili per chiunque.

2.6 Il contributo di Leonardo da Vinci alla didattica della matematica

Nel Codice Atlantico si trovano aspetti forse meno noti della produzione leonardesca ma straordinariamente importanti per chi si occupa di didattica della matematica: ci si riferisce, in particolare, alla presenza di moltissimi disegni geometrici. Egli realizzò, infatti, un numero incredibile di figure molte delle quali tracciate all'interno di un cerchio altre simili a vere e proprie decorazioni o fregi. Dalle sue stesse parole apprendiamo il fine ultimo di questo suo incredibile lavoro, annunciato come fosse un gioco: «De ludo geometrico, nel quale si dà il processo d'infinite varietà di quadrature di superfizie di lati curvi». E subito dopo: «Il quadrato è il fine di tutto il travagliamento delle superfizie geometriche. Ogni superfizie attende alla

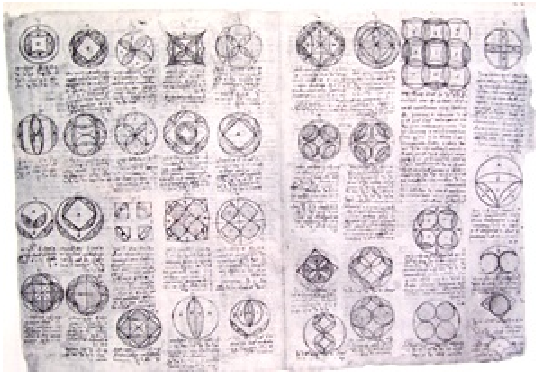


Figura 2.3: Codice Atlantico Foglio 471 versus

sua quadratura» che è «il fine della scienzia geometrica» (Foglio 272 versus, [38]). Tipicamente disegnava figure curvilinee o mistilinee all'interno di un cerchio colorandole o *depennandole* come diceva egli stesso. Evidentemente era sua intenzione evidenziarle rispetto al resto proprio perché di queste ci voleva parlare. Le annesse didascalie indicavano la trasformazione necessaria, eseguita con riga e compasso, per ottenere la quadratura della figura iniziale. Perché trasformare ogni figura in un quadrato equivalente? Se per le figure curvilinee, molto belle da un punto di vista estetico, non è semplicissimo riuscire a quantificare la superficie occupata, per il quadrato, invece, questo compito è estremamente banale. Tale argomento, come del resto tutto il tema riguardante l'equivalenza di superfici, richiede molta attenzione perché costituisce un nodo cruciale per l'insegnamento della matematica nella scuola del primo ciclo d'istruzione.

Alla base delle quadrature vi è il problema della duplicazione delle figure geometriche. La più semplice riguarda come ottenere, dato un quadrato iniziale, quello di area doppia. E' una semplice conseguenza del teorema di Pitagora applicato a un triangolo rettangolo isoscele, metà del quadrato iniziale.

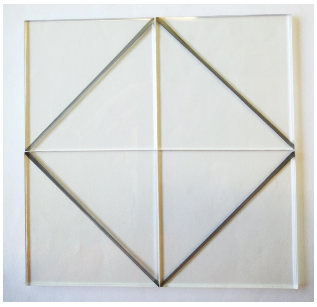


Figura 2.4

Le conclusioni possono essere raggiunte facilmente dagli studenti procedendo in vari modi: attraverso il disegno oppure, meglio ancora, disponendo in modo opportuno quattro quadrati in plaxiglass trasparenti avendo ciascuno disegnata una diagonale (Figura 2.4) oppure, anche utilizzando il materiale montessoriano (vedere Figura 2.5). In ognuno di questi casi, le conclusioni sono facilmente raggiunte osservando che il quadrato costruito sull'ipotenusa contiene 4 copie intere del triangolo in cui rimane diviso il quadrato iniziale. A questo punto, per capire se il quadrato

Figura 2.5: Un materiale montessoriano

costruito sulla diagonale sia sempre il doppio di quello di partenza, al variare del suo lato, non potendo avere un materiale per ogni diversa situazione, si può procederà facendo realizzare qualche disegno. Oppure, mediante software di geometria dinamica, si realizza tale costruzione una sola volta e, muovendo opportuni punti mobili (o indipendenti), s'ingrandisce o rimpicciolisce a piacere il quadrato di partenza osservando cosa accade al resto della figura (Figura 2.6). Si può costatare che si abbiano sempre, all'interno del quadrato costruito sulla diagonale, 4 copie del medesimo triangolo, avendone il quadrato di partenza due. E' questa la struttura stabile della figura in esame. Si farà riferimento al modello mentale corretto che ne deriva per fare inferenze di carattere generale ma anche per risolvere problemi specifici.

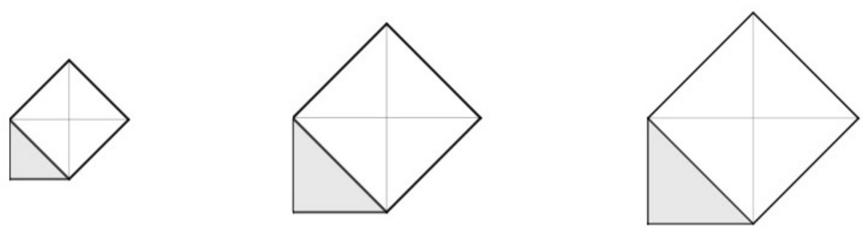


Figura 2.6: La ricerca di strutture stabili

Da questa semplice regola Leonardo ne ricava un'altra per duplicare un cerchio o parte di esso. Per tali propositi è sufficiente utilizzare una variante del teorema di Pitagora valido per cerchi inscritti ai quadrati costruiti sui lati del triangolo rettangolo isoscele: in tal caso i diametri dei tre cerchi sono rispettivamente uguali ai lati dei quadrati. Usando, anche in questo caso, un'animazione realizzata con software di geometria dinamica (rappresentata dalla successione d'immagini della Figura 2.7) si riesce, solitamente, a far congetturare che il cerchio che ha come diametro l'ipotenusa del triangolo rettangolo incrementa la sua superficie all'aumentare della superficie del cerchio costruito sull'altro cateto (quello, per intenderci, che non c'è nella prima immagine di sinistra). Questa deduzione fa intuire già a bambini della primaria che,

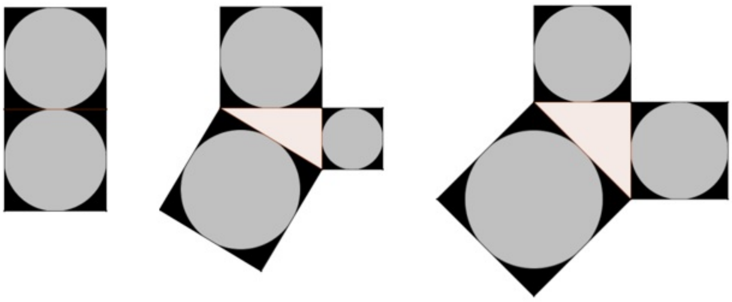


Figura 2.7: La duplicazione dell'area di un cerchio

analogamente al caso dei quadrati, quando il triangolo diverrà isoscele, il cerchio sull'ipotenusa sarà il doppio di quello che ha per diametro uno dei due cateti.

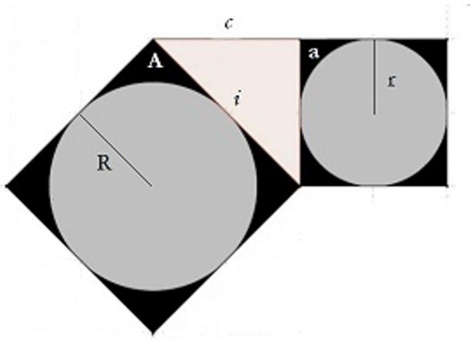


Figura 2.8

Per quanto detto nel Paragrafo 2.3.2 anche gli studenti più grandi debbono essere stimolati a procedere per «visioni» di questo tipo prettamente geometriche e, possibilmente, interagendo direttamente con le figure. Un adeguato sviluppo delle capacità percettive è dunque determinante per facilitare la successiva formalizzazione del problema che permetterà di scrivere le proprietà già scoperte in modo intuitivo mediante un linguaggio simbolico. Considerato, quindi, un triangolo rettangolo isoscele di cateto c e ipotenusa i (Figura 3.1) il quadrato costruito sull'ipotenusa è doppio di quello costruito sul cateto. Formalmente:

$$2c^2 = i^2.$$

Ma anche un quarto del quadrato maggiore sarà equivalente ad un quarto di quello minore e quindi

$$\frac{2c^2}{4} = \frac{i^2}{4}. \tag{2.1}$$

La 2.1 può essere riscritta come

$$2r^2 = R^2.$$

avendo indicato con

$$r = \frac{c}{2}$$

il raggio della circonferenza più piccola e con

$$R = \frac{i}{2}$$

il raggio di quella più grande da cui

$$2\pi r^2 = \pi R^2.$$

Sempre dalla Figura 3.1 si deduce facilmente che, essendo il quadrato di lato i ed il cerchio ad esso inscritto doppi rispettivamente del quadrato di lato c e del cerchio ad esso inscritto segue che

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{a} \tag{2.2}$$

e, per considerazioni analoghe,

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{b} \tag{2.3}$$

essendo **b** e B le superfici rappresentate in Figura 2.9.

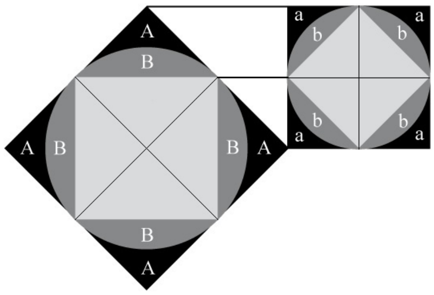


Figura 2.9: Come raddoppiare tutte le superfici di partenza

Le superfici **A** e **a** sono state chiamate *interstizi* mentre le superfici **B** e **b** sono chiamate da Leonardo stesso *porzioni*. Individuare le strutture stabili nella Figura 2.9 permette di capire che quanto dedotto nella 2.2 e nella 2.3 non dipendono dal quadrato di partenza.

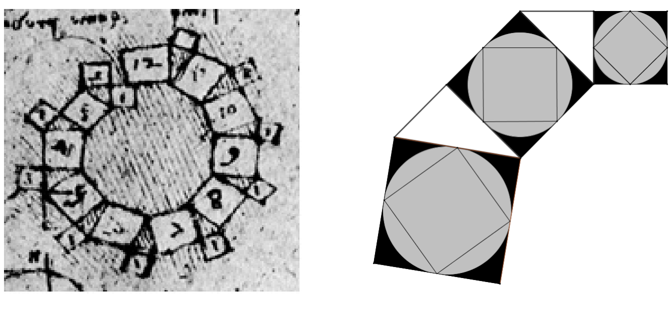


Figura 2.10: La spirale di Leonardo generata a partire da un triangolo rettangolo di cateti 1 e 2 e una sua riproduzione che, invece, parte da un triangolo rettangolo isoscele.

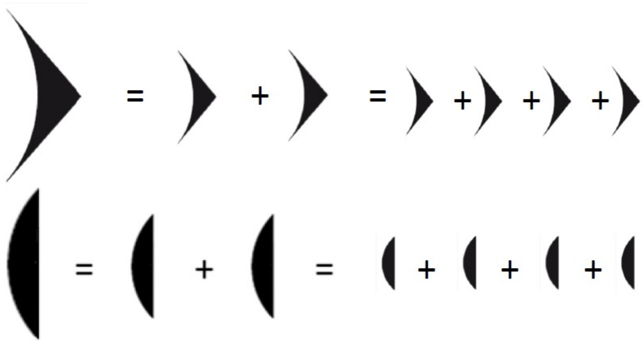


Figura 2.11

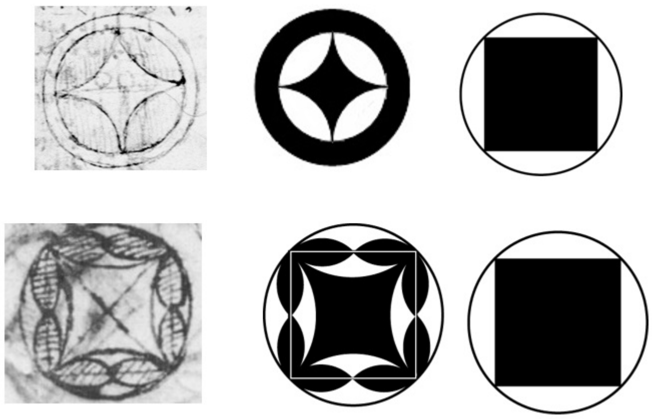


Figura 2.12: Esempi di quadrature

2.7 I ludi geometrici

Se il lato del quadrato raddoppiato venisse considerato come lato di un nuovo quadrato di partenza, l'iterazione della precedente costruzione permette di ottenere bellissime spirali che abbiano, ad ogni passo, interstizi e porzioni di area doppia di quelle ottenute al passo precedente (Figura 2.10). Allora le relazioni sussistenti ad ogni passo tra i vari interstizi e le varie porzioni, in virtù della 2.2 e della 2.3, possono anche essere visualizzate nel modo illustrato nella Figura 2.11. Nella Figura 2.12 sono riportati alcuni esempi di quadrature che derivano direttamente da diverse applicazioni di tali relazioni: basta sostituire per ogni coppia di porzioni più piccole quella maggiore equivalente alla somma delle due.

Tra le bellissime figure di Leonardo se ne trovano altre sempre costituite da quadrati e cerchi ma contenenti una o più *lunule di Ipparco* diversamente orientate e disposte (2.13). La costruzione della lunula è semplicissima (Figura 2.14): a partire da un triangolo rettangolo isoscele PQR si tracciano due circonferenze, una di centro P e raggio PR, la seconda di centro O e raggio OR. Quest'ultima, è costituita dal triangolo dato PQR, dalle due porzioni uguali **b**, dalla porzione **B** e dalla figura curvilinea grigia di estremi R e Q che è proprio la lunula da costruire. Concentrando l'attenzione sul cerchio più piccolo che è diviso a metà dal diametro QR, in virtù

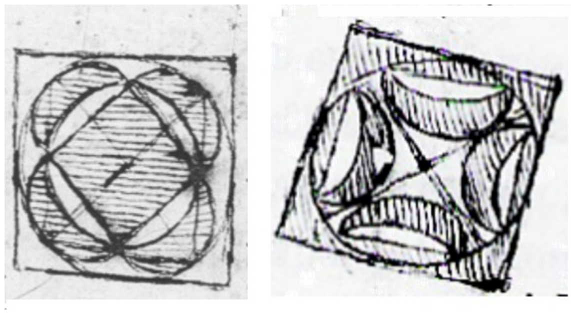


Figura 2.13: Le lunule

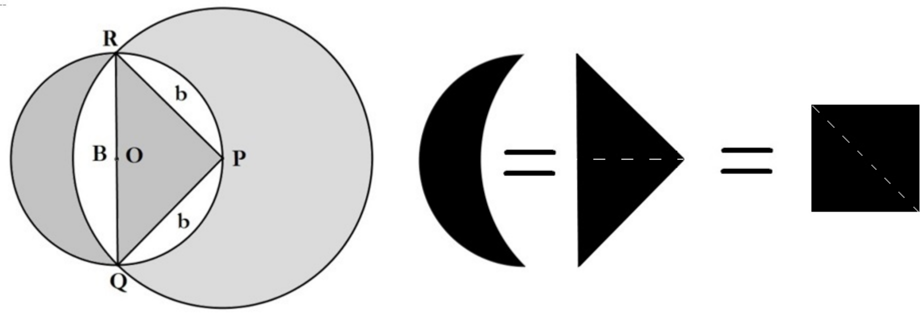


Figura 2.14: La costruzione della lunula; equivalenza tra triangolo e lunula.

ancora delle relazioni riportate in Figura 2.11, si scopre la stupenda equivalenza tra la lunula di estremi R e Q e il triangolo PQR. Quest'ultimo, rimane diviso in due metà uguali dall'altezza rispetto all'ipotenusa che, ricongiunte opportunamente, permettono di ottenere un nuovo quadrato (Figura 2.14). Per questo è lecito parlare, anche per la lunula, di quadratura. Osservando i disegni della Figura 2.15 si riesce facilmente a comprendere in che modo avvengano le quadrature applicando l'equivalenza mostrata in Figura 2.14.

Le equivalenze evidenziate dalle figure di Leonardo hanno una valenza didattica fondamentale. Si consideri anche solo quella tra la lunula e il triangolo della Figura 2.14. È questo un esempio molto semplice da comprendere ma al tempo stesso estremamente formativo in relazione alle difficoltà percettive che tipicamente si rilevano negli studenti: essi hanno l'opportunità di avere a che fare con due figure completamente differenti, l'una curvilinea e l'altra rettilinea, che tuttavia hanno la stessa area. Non solo: come si vedrà nel un prossimo Paragrafo 2.7.1, si riesce a effettuare, mediante argomentazioni qualitative ma rigorose, anche una stima che permette di confrontare i perimetri delle due figure. È, dunque, con esempi di questo tipo che si contribuisce quanto meno a ridurre se non a cancellare definitivamente la confusione che gli studenti commettono tra il concetto di uguaglianza, equivalenza e isoperimetria.

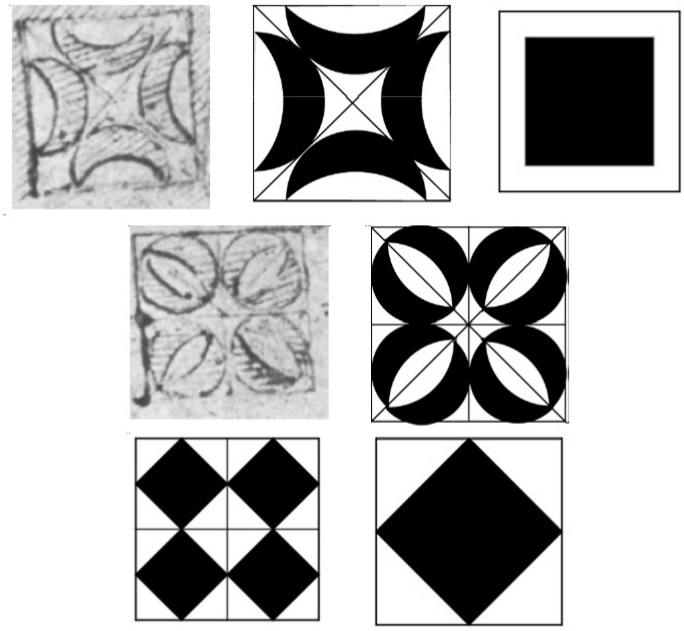


Figura 2.15: Esempi di quadrature delle lunule

2.7.1 Il gioco

Leonardo ha descritto la quadratura di tantissime figure presenti nel Codice Atlantico, alcune delle quali mostrate nel Paragrafo 2.7, servendosi semplicemente delle regole riportate in Figura 2.11 e in Figura 2.14: il tutto ci appare, in realtà, come se avesse voluto realizzare un gioco. È presumibile che la sua idea originaria

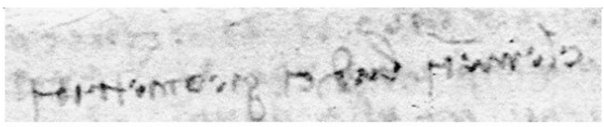


Figura 2.16: Elementi ludici geometrici, Codice Atlantico: Foglio 124 recto.

fosse stata proprio questa visto che, comunque, gli assegna un nome (Figura 2.16) anche se non risulta essere stato mai realizzato. Tuttavia, le idee che sono alla sua base, appaiono particolarmente adatte per sviluppare attività didattiche in forma ludica per studenti frequentanti la scuola del primo ciclo. Si è pensato di porre come scopo didattico di tale gioco la determinazione del valore delle superfici «depennate» e, quando possibile, il loro rapporto con quelle «non depennate» ossia quelle bianche circostanti. I problemi posti, dunque, pur avendo formulazioni semplici, non implicano in genere risposte altrettanto ovvie anche perché non sono note formule per la determinazione dell'area di ciascuna di tali superfici. Per questo, l'obiettivo generale più importante da perseguire, è lo sviluppo e il potenziamento delle capacità percettive che permettano agli studenti di determininare le equivalenze tra superfici attraverso quadrature. Ciò è favorito dall'utilizzo di strumenti didattici appositamente realizzati in un contesto di attività laboratoriale, nel quale sia favorita la scoperta individuale da parte degli studenti.

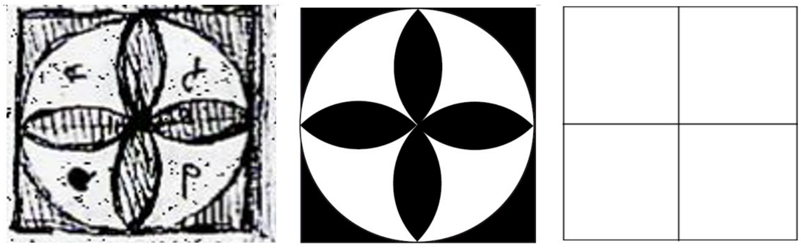


Figura 2.17: Il quadrifoglio di Leonardo, la Tavola e la base relativa

Figura 2.18: I pezzi in plaxiglass necessari per la quadratura del quadrifoglio

A singoli studenti o, al più, a piccoli gruppi, vengono consegnati i seguenti materiali: una *tavola* con la riproduzione dei disegni di Leonardo, una *base* su cui lavorare, quindi, a seconda dei casi, interstizi, porzioni (che possono essere di 3 diverse dimensioni, minime, medie e massime), lunule e triangoli in plexiglass.

Vediamo un esempio: si consideri il disegno di Leonardo (il quadrifoglio), la sua riproduzione sulla annessa Tavola e la base relativa riportati in Figura 2.17. Per quadrare la superficie di colore nero della figura e determinare il rapporto con quella bianca si hanno a disposizione 4 interstizi medi, 4 porzioni medie e 8 minime (Figura 2.18).

Prima occorre ricostruire la figura riportata sulla tavola utilizzando i pezzi opportuni tra quelli in dotazione. Quelli che avanzano, in questo caso le 4 porzioni medie, devono essere utilizzati per effettuare le sostituzioni badando bene al fatto che, ad ogni passo, la nuova figura ottenuta sia equivalente a quella precedente. Nello specifico, sapendo che una delle porzioni avanzate è equivalente alla somma delle due minori in virtù della equivalenza mostrata in Figura 2.11, si sostituiscono le due piccole con la maggiore (Figura 2.19).

Ripetendo analoghe sostituzioni con le altre 3 porzioni rimanenti si otterrà alla

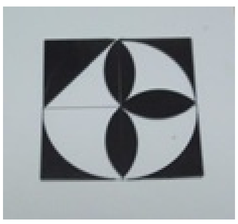


Figura 2.19: La prima sostituzione

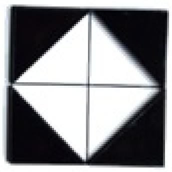


Figura 2.20: La quadratura del quadrifoglio

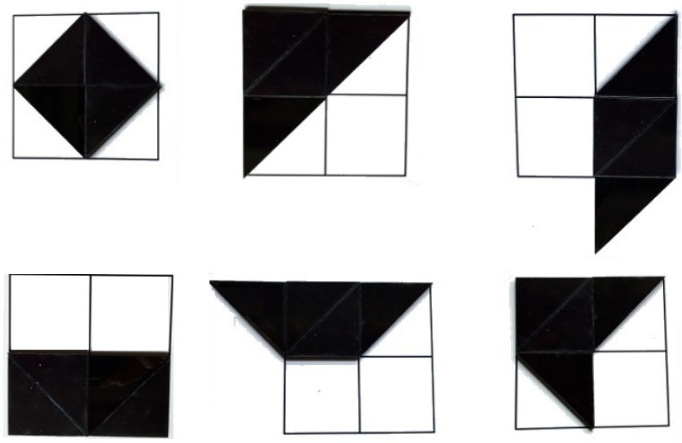


Figura 2.21: Poligoni equicomposti

fine la nuova figura riportata in Figura 2.20 della quale è semplice calcolare la superficie. Poiché ci si rende conto facilmente che i 4 triangoli neri possono riempire perfettamente anche lo spazio bianco di forma anch'essa quadrata (che ha dunque area metà di quello maggiore) segue che l'area nera ha la stessa estensione di quella bianca. Pertanto, volendo, basterà misurare con un righello il lato del quadrato bianco per determinare il valore di tutte le superfici.

Come detto nel Paragrafo 2.5, dai casi specifici studiati per mezzo dei materiali, si deve stabilire la validità generale della proprietà appena trovata: se si considerasse un nuovo quadrato di lato diverso dal precedente si dovranno scoprire le strutture stabili della figura che, in questo caso, sono rappresentate dagli otto triangoli rettangoli isosceli tutti uguali che si vengano sempre a formare nel suo interno.

Ma il materiale consente di superare una delle difficoltà maggiormente riscontrate tra gli studenti (vedere Paragrafo 2.7) ossia il riconoscimento di figure equivalenti: infatti in Figura 2.21 si può osservare tutti i modi in cui il quadrato della Figura 2.20 può essere trasformato in altre figure tutte diverse tra loro ma aventi la stessa superficie. Costruire direttamente con le proprie mani, osservare e riflettere su quanto ottenuto, permette la costituzione di modelli mentali relativi: è mediante questi che si apprende efficacemente, in questo caso, il concetto di equiscomponibilità.

Un secondo esempio riguarda il disegno di Leonardo riportato in Figura 2.22: sono rappresentate 4 lunule iscritte nei 4 grandi triangoli isosceli in cui è diviso un quadrato dalle sue stesse diagonali. Con il materiale in dotazione, dopo aver riprodotto la figura con i pezzi in plexiglass opportuni, si effettua la sua quadratura

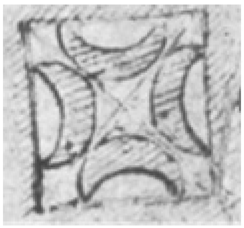


Figura 2.22: Quadrato con 4 lunule

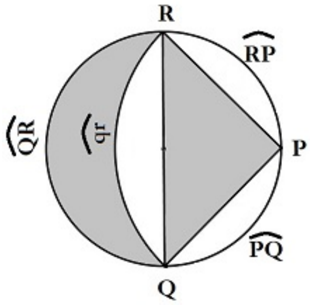


Figura 2.23

in virtù della regola riportata in Figura 2.14. Il quadrato che si ottiene è ancora equivalente al poligono di Figura 2.20 e a quelli di Figura 2.21.

Si sottolinea che ogni figura di Leonardo necessita generalmente, per essere quadrata, di una strategia risolutiva diversa da quella delle altre: ciò motiva, ogni volta, a riflettere sulle caratteristiche essenziali della figura esaminata anche sulla base dei pezzi a disposizione elaborando la risposta relativa senza potersi rifugiare in procedimenti da applicare meccanicamente.

Si vuole accennare a un'altra difficoltà tipicamente riscontrata negli studenti che ha origine dalla confusione tra il significato di equivalenza ed isoperimetria. Si capisce, di solito, facilmente che due figure uguali, avendo uguali tutti i i lati avranno anche lo stesso perimetro. Me due figure diverse? E due figure diverse ma equivalenti, saranno anche isoperimetriche? Questa domanda ha generato talvolta risposte affermative tra studenti che avevano appena terminato le attività volta alla comprensione della relazione 2.14 concludendo che se il triangolo e la lunula occupano la medesima superficie devono avere anche lo stesso perimetro. La costruzione della lunula permette, in realtà, di fugare ogni dubbio tenendo conto del fatto che il cammino più breve tra due punti sia quello rettilineo. Infatti, tenendo in considerazione la Figura 2.23, poiché

$$\overline{RP} + \overline{PQ} < \widehat{RP} + \widehat{PQ} = \widehat{RQ}$$

segue che il perimetro del triangolo RPQ è tale che:

$$p(RPQ) = \overline{QR} + \overline{RP} + \overline{PQ} < \widehat{qr} + \widehat{RQ}$$

essendo di fatto

$$\widehat{qr} + \widehat{RQ}$$

il perimetro della lunula.

Un'osservazione sulla precedente diseguaglianza: sono rare, o forse inesistenti, le occasioni nelle quali si chiede agli studenti di fare stime di misure di grandezze. Ma saper fare stime è un aspetto matematico molto importante: a volte, infatti, è proprio impossibile riuscire a determinare il valore esatto di una certa misura e, quello che si può al più fare, è determinare un suo estremo superiore o inferiore. È questo il caso del precedente esercizio non essendo fornita la lunghezza di nessun segmento. Tra l'altro, interpretando correttamente il senso della domanda posta, è sufficiente verificare che il perimetro del triangolo e della lunula siano diversi, il che non necessita l'esecuzione di calcoli.

2.8 Un esempio di attività laboratoriale in classe

Considerando anche quanto sia importante fornire solide basi per affrontare i sistemi lineari nel biennio della scuola superiore, si è studiato un problema aritmetico molto interessante che può essere formulato, nella scuola secondaria di primo grado, nel seguente modo: *determinare due numeri interi nota la loro somma e la loro differenza*. Rimanendo però all'interno dell'ambito esclusivamente aritmetico, si è riscontrato in passate sperimentazioni, che non esistono metodi efficaci per trovare autonomamente le ragioni di possibili strategie risolutive pur riuscendo gli studenti ad applicare (anche se solo meccanicamente) gli algoritmi che risolvono il problema. Tale difficoltà, solitamente, può ostacolare l'applicazione delle stesse strategie a problemi simili o magari contestualizzati in altri ambiti, limitando di fatto le possibilità di raggiungere competenze essenziali da parte degli alunni. Le carenze argomentative di un approccio aritmetico in questo tipo di problema erano già state evidenziate da Emma Castelnuovo in [5]: «Si comprende come il problema, proposto con un linguaggio aritmetico, offre delle difficoltà ancora maggiori. Ma è evidente che sarà sempre possibile vedere il numero come un segmento di una certa lunghezza, e che, quindi, il linguaggio aritmetico si tradurrà immediatamente in linguaggio geometrico».

Sebbene l'associazione di un numero con la lunghezza di un segmento aiuti a concretizzare i problemi precedentemente menzionati, in genere questo ancora non basta agli studenti per dedurre autonomamente strategie risolutive. Così come non è sempre vincente far utilizzare due strisce di cartone o legno incernierate tra di loro per rappresentare i due segmenti. Si è allora deciso di utilizzare, durante una sperimentazione nelle classi, delle semplici pedine, ciascuna delle quali rappresentante una unità numerica. Tale scelta, come si vedrà, è risultata appropriata perché le pedine permettono di passare da casi più semplici a casi più complessi con gradualità. Attraverso la loro manipolazione e grazie alla continuità del movimento, è evidentemente più semplice per gli studenti individuare strutture riconoscibili che fanno congetturare essere delle possibili proprietà: l'analisi poi di casi più complessi permette di verificare la loro effettiva stabilità.

Sono state scelte pedine belle al tatto e nei colori e in modo che riescano, soprattutto in una fase iniziale delle attività, a conquistare l'attenzione dello studente che dovrà usarli. Come capita spesso, sono state utilizzate pedine che avevano originariamente una funzione diversa ossia semplici fiches da gioco. Queste sono apparse comunque «essenziali»: le loro caratteristiche predominanti sono state utili ad introdurre i ragazzi al concetto da indagare senza elementi distrattivi.

L'esistenza delle soluzioni intere positive del problema è strettamente dipendente dalla contemporanea parità o disparità della somma e differenza iniziale data; questo significa che è opportuo che si sappiano fare inferenze generali, per esempio, sulla somma e differenza di due pari o di due dispari ecc. Per questo la parte iniziale delle attività è stata dedicata a questi argomenti.

2.9 Presentazione delle attività

Le attività didattiche dedicate al problema della ricerca di due numeri interi positivi, date la loro somma e la loro differenza, sono state sperimentate per la prima volta nell'a.s. 2017/2018 in due classi prime di scuola secondaria di primo grado: sono stati dedicati quattro incontri da due ore in ognuna delle due classi, più un'ora per ciascuna delle due verifiche finali. La presenza di più docenti contemporaneamente nelle classi ha permesso di prendere nota, durante le attività, di vari aspetti precedentemente concordati in riunioni preliminari, di distribuirsi i vari compiti, anche in termini di aiuto ai ragazzi con più difficoltà, di scattare fotografie per la documentazione, di avviare discussioni al termine.

I seguenti sono gli **obiettivi generali** da far conseguire al termine delle attività:

1. comprendere l'esigenza e l'utilità di una dimostrazione figurata;
2. individuare strutture stabili in un oggetto matematico;
3. formulare inferenze predittive relativamente ai problemi studiati;
4. saper argomentare le proprie idee;
5. saper ascoltare e a ponderare le idee altrui; cambiare le proprie opinioni se ritenute non corrette.

I seguenti sono gli **obiettivi di apprendimento**:

1. conoscere le proprietà generali dei numeri pari e dispari;
2. saper risolvere problemi aritmetici riguardanti i numeri pari e dispari;
3. saper fare inferenze predittive sulla risolubilità di problemi aritmetici a doppia condizione (somma e differenza di due numeri naturali) e saper risolvere tali problemi;
4. saper costruire problemi nei quali è data la somma e la differenza di due numeri interi.

La modalità didattica utilizzata è stata prevalentemente laboratoriale: i ragazzi sono stati divisi in gruppi (da 2 massimo 3). I ragazzi DSA o H sono inseriti preferibilmente nei gruppi da 3. Il sottoscritto affiancava i docenti della classe durante le varie attività.

I prerequisiti richiesti riguardavano la conoscenza dei numeri naturali e le loro operazioni, il riconoscimento di un numero pari da un dispari, i segmenti, la definizione di triangolo e il suo disegno.

Gli strumenti occorrenti sono state le pedine, cartellini di cartoncino, il quaderno, il computer, e la lavagna multimediale.

2.10 Attività 1

Consegnate agli studenti un certo numero di pedine è stato posto il seguente:

Problema 1. *Trova una disposizione di pedine che faccia capire senza contare, che il loro numero sia pari.*

Nella Figura 2.24 sono riportate le risposte più frequenti degli studenti.

Figura 2.24: Le forme più comuni che i ragazzi hanno attribuito ai numeri pari

La parità dei numeri evoca il concetto di coppia (osservare come i ragazzi usino contemporaneamente le due mani o le due dita) comunque vengano ordinate le pedine. Meritano qualche considerazione anche le forme riportate in Figura 2.25.

Qual è l'origine di queste forme? Come sono venute in mente ai ragazzi? Per capire, era dunque necessario vederli in azione: pertanto si è chiesto loro di raffigurare nuovi numeri pari, più grandi dei precedenti, avendo a disposizione altre pedine. I ragazzi continuavano ad aggiungerne al fine di ottenere numeri maggiori, ma, per avere sempre dei pari, lasciavano invariata la forma del numero che risultava essere sempre simmetrica. Per i ragazzi era dunque chiaro, che per riconoscere immediatamente i numeri pari, occorreva attribuirgli una forma simmetrica. Avevano trovato, proprio come i loro compagni che avevano realizzato disposizioni su

Figura 2.25: Due forme meno comuni attribuite ai numeri pari

Figura 2.26: La forma scelta per dare forma ai numero dispari

due file parallele, una struttura stabile che era proprio nella forma da attribuire ai numeri pari che doveva essere sempre simmetrica. Quindi, in questo caso, usando una terminologia introdotta precedentemente, è la base a mantenere una struttura stabile, pur aumentando in dimensioni. Tuttavia, durante il momento di confronto tra le varie risposte, i ragazzi convenivano che la disposizione su due file parallele fosse la più semplice da realizzare ma anche da pensare qualora non si avesse più la possibilità di avere a disposizione le pedine.

L'attività è proseguita ponendo il seguente:

Problema 2. *Trova una disposizione di pedine che faccia capire senza contare, che il loro numero sia dispari.*

E' risultato evidente nel disporre le pedine su due file, la presenza della pedina «non accompagnata» o «sola» (queste sono le parole degli studenti) per evidenziare la disparità dei numeri in questione (Figura 2.26).

Una breve osservazione: è particolarmente significativo constatare che la forma attribuita più frequentemente dagli studenti ai numeri pari e dispari ci riconduce alle descrizioni di tali numeri dei pitagorici. Per essi, nei numeri pari dominava l'illimitato (i bambini montessoriani, infatti, se ne possono rendere conto sono perché abituati a far scorrere un dito tra le due file di pedine senza che s'incontrino ostacoli), pertanto erano considerati imperfetti; invece nei dispari dominava il limite (in questo caso, scorrendo un dito tra le due file s'incontra la pedina finale che interrompe il movimento), per questo erano perfetti.

Se la rappresentazione con pedine dei numeri pari e dispari, sia effettivamente per gli studenti una efficace rappresentazione di tali numeri, è stato immediatamente verificato ponendo il seguente:

Quesito 2.10.1. *Raddoppia un qualunque numero pari: ottieni un numero pari o dispari?*

E' stato fondamentale leggere o ascoltare le risposte dei ragazzi facendo principalmente attenzione alle loro argomentazioni per capire se per rispondere si fossero avvalsi di soli esempi concreti oppure se avessero cominciato a ragionare sul modello a pedine. Soffermandoci su coloro che già in queste prime fasi «vedevano» la soluzione avvicinando due gruppi pari e uguali di pedine, ci si è accorti che le loro espressioni erano tutte riconducibili al fatto che fosse evidente l'impossibilità di avere pedine non accompagnate (Figura 2.27). Quindi si è posto:

Quesito 2.10.2. *Raddoppia un qualunque numero dispari: ottieni un numero pari o dispari?*

Figura 2.27: Rappresentazione della somma di due numeri pari.

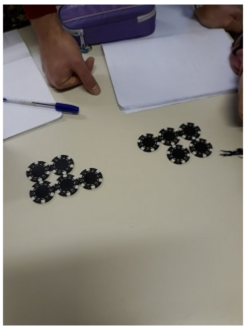


Figura 2.28: Rappresentazione della somma di due numeri dispari.

Anche in questo caso, ci soffermiamo a commentare le risposte di coloro che si sono avvalsi del modello a pedine: trattandosi di numeri dispari, raddoppiandoli, le due pedine non accoppiate di ciascun gruppo, venivano a costituire una nuova coppia, facendo capire di aver ottenuto un numero pari (Figura 2.28).

Dopo aver fatto risolvere esercizi simili ai precedenti si è fatto verbalizzare il risultato principale raggiunto che, sintetizzato in una frase formulata direttamente dai ragazzi dopo aggiustamenti successivi, è stato:

Proprietà 1. *La somma e la differenza di due pari o di due dispari da sempre come risultato un numero pari. Dalla somma e dalla differenza tra un pari e un dispari si ottiene sempre un numero dispari.*

Si è assegnato, quindi, il seguente:

Quesito 2.10.3. *Considera il quadruplo di un numero pari; considera il doppio di un numero dispari; somma i due numeri ottenuti. Il numero finale è pari o dispari? Perché?*

La modalità di svolgimento deve fornire utili informazioni su come le attività svolte in classe stiano contribuendo alla costruzione di adeguati modelli mentali che inducano processi corretti di risoluzione. Nella Figura 2.29 sono riportate, a titolo di esempio, alcune risposte significative.

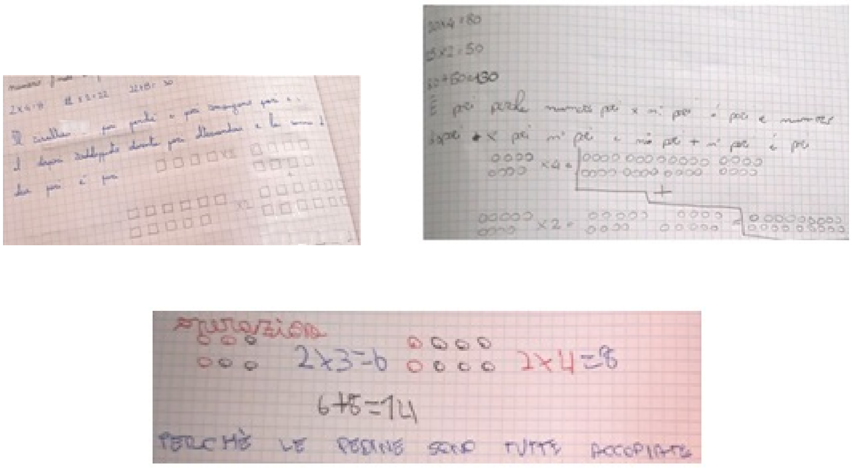


Figura 2.29: Esempi di risposta al Quesito 2.10.3

Di fatto, si studia un caso particolare per dare una risposta generale. Tuttavia appare evidente che ci si sta sforzando di fare uso di quanto appreso in precedenza. A fianco dei calcoli, compaiono i disegni delle pedine, anche se, non aggiungono nulla di più ai numeri riportati (si osserva che il numero delle pedine è esattamente uguale agli esempi numerici riportati). Quindi si può concludere che non si tratta ancora di una vera e propria generalizzazione, tuttavia si può dire che i ragazzi ci stanno provando.

Le altre due proposte di soluzioni riportate in Figura 2.30 ci dicono che pur giungendo ad una corretta soluzione, i due studenti abbiano ancora fatto uso di esempi concreti, aggiungendo però dei disegni: se la forma dei numeri pari e dispari nel primo dei due tentativi non appare ancora particolarmente vantaggiosa, nella soluzione presentata a destra, invece, comunque la quadruplicazione o il raddoppio mette comunque in evidenza la parità del numero sfruttando la simmetria della figura finale ottenuta.

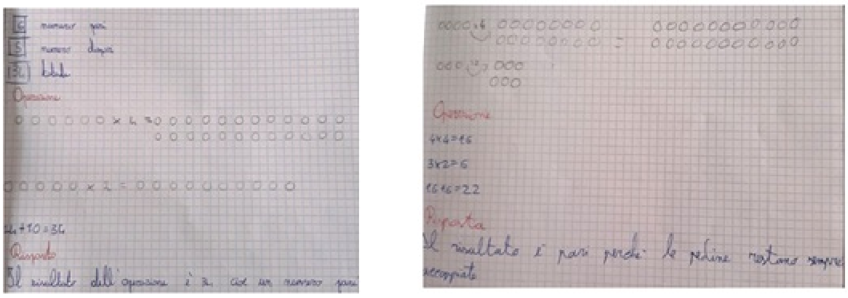


Figura 2.30: Altri esempi di risposta al Quesito 2.10.3

Molto interessanti invece sono i tentativi di soluzione evidentemente più sintetici riportati in Figura 2.31, che manifestano una capacità astrattiva non banale ed anche inattesa visto che ci si trova ancora in una fase pressoché iniziale: nel visualizzare graficamente il numero, si è considerata solo la sua parte finale, in sostanza quella che contraddistingue un numero pari (due pedine accoppiate) da un numero dispari (una pedina non accoppiata).

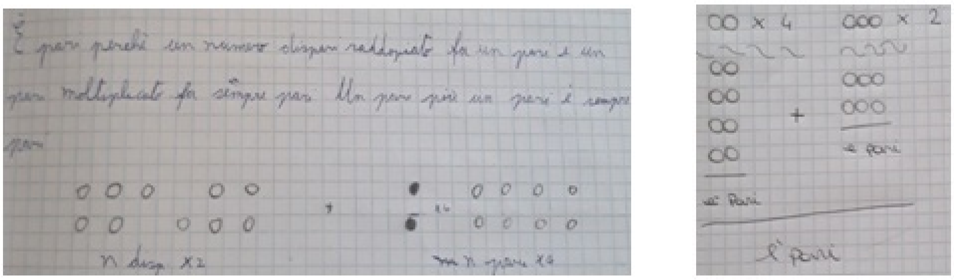


Figura 2.31: Esempi di risposta con approccio valido in generale al Quesito 2.10.3

2.11 Attività 2

Gli obiettivi specifici di questa attività riguardano la ricerca di un metodo efficace che rappresenti tutte le coppie di numeri naturali la cui somma sia 10 e che permetta di rilevare le proprietà delle loro differenze al fine di determinare eventuali strutture stabili. Le applicazioni riguarderanno, in questa fase, solo alcuni semplici problemi.

L'attività ha inizio ponendo il seguente:

Problema 3. *Trova due numeri naturali tali che la loro somma sia 10 e la loro differenza sia 8.*

Tipicamente i ragazzi, procedendo per prove ed errori, rispondano correttamente. Ma, di fronte alla stessa domanda nella quale la somma era 84 e la differenza 30, il procedimento per tentativi ha monstrato i suoi limiti. Pertanto si è fatto comprendere l'esigenza di possedere un metodo che fosse utile per qualunque somma e per qualunque differenza.

A tal proposito, si è partiti indagando inizialmente situazioni molto semplici. Ad ogni gruppo di studenti sono state consegnate inizialmente 10 pedine. Si è posto il seguente:

Problema 4. *Usando le pedine, visualizza tutte le coppie di numeri che sommati diano 10.*

Come sempre, si deve essere pronti ad accogliere tutte le possibili soluzioni avanzate dagli studenti. Qui di seguito sono riportati alcuni tentativi tra quelli più frequenti che denotavano essenzialmente due tipi di disposizioni. La prima, ereditata presumibilmente dalle attività precedenti, è stata ottenuta disponendo le pedine su due file uguali, da una delle quali veniva allontanata una pedina alla volta per portarla nell'altra (Figura 2.32).

La seconda (Figura 2.33), è stata ottenuta disponendo le pedine su un'unica fila, dalla quale se ne spostava una alla volta.

Si è poi posto il seguente:

Problema 5. *Osservando le pedine ricava la differenza di ogni coppia di numeri la cui somma sia 10.*

Attraverso le pedine sono stati eliminati eventuali problemi di memorizzazione in quanto che, i numeri da queste rappresentate, erano sempre ben visibili così la loro somma, data dal numero totale di pedine e la loro differenza.

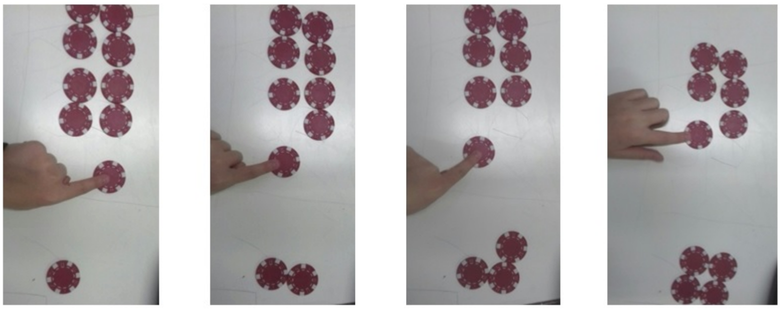


Figura 2.32: Risposta più frequente al Quesito 4

Figura 2.33: Un altro tipo di risposta piuttosto frequente al Problema 4

Di fronte a tale domanda i ragazzi hanno manifestato la preferenza per la disposizione su due file avendone compreso i vantaggi. Ancora una volta i ragazzi ci hanno mostrato cosa significhi fare la scelta migliore, quella cioè che sia più efficace per gli scopi da perseguire.

Si sono fatte realizzare tabelle come quella in Figura 2.34 per far notare che la differenza tra le coppie può essere scritta anche come somma del più piccolo dei due numeri più un altro. Si è fatto sempre attenzione a utilizzare contemporaneamente questi due modalità per far abituare i ragazzi alle due diverse forme ma analoghe (vedremo che questo sarà di particolare aiuto quando si svolgeranno gli esercizi).

10 =	10 + 0		10 - 0 =	10
10 =	9 + 1		9 - 1 =	8
10 =	8 + 2		8 - 2 =	6
10 =	7 + 3		7 - 3 =	4
10 =	6 + 4		6 - 4 =	2
10 =	5 +5		5 - 5 =	0

10 =	10 + 0		10 = 0 +	10
10 =	9 + 1		9= 1 +	8
10 =	8 + 2		8= 2 +	6
10 =	7 + 3		7= 3 +	4
10 =	6 + 4		6= 4 +	2
10 =	5 +5		5= 5 +	0

Figura 2.34: Tabella riassuntiva

L'uso delle pedine, così come la realizzazione delle tabelle, ha fatto emergere immediatamente una proprietà che riguardava le differenze tra le singole coppie: queste sembravano sempre essere date da un numero pari. Questa congettura, ritenuta di estrema importanza, ha motivato a porre il seguente:

Quesito 2.11.1. *La differenza tra i numeri di queste coppie è sempre un numero pari (e in un caso nulla)? Perché?*

Questa domanda ha spiazzato i ragazzi perché la proprietà appare così ovvia che, a loro avviso, non necessitava di ulteriori indagini. Invece la nostra intenzione è stata proprio quella di portarli a riflettere su quella che potrebbe essere una struttura stabile per i numeri in questione. Nella Figura 2.35 si mostra l'idea più diffusa che lentamente è emersa dai ragazzi, quella che evidentemente è presente comunque nel loro modo di ragionare, che evidentemente tre origine dal modello mentale che si sta costruendo: partendo dalle due file uguali di pedine, si spostava una pedina alla volta da una fila all'altra.

Figura 2.35: La creazione del «buco da due».

Uno studente ha saputo spiegare la sua idea: «spostando la pedina si crea un buco da due!» Cioè voleva dire che si creava una differenza di due unità tra i due numeri della coppia ogniqualvolta si effettuava uno spostamento da una fila all'altra. Questo è ovvio perché una fila acquista una pedina e una la perde, dunque la differenza è proprio di due unità. Volendo approfondire questa sua idea gli è stato chiesto cosa sarebbe accaduto se si fosse effettuato un altro spostamento. La risposta è stata: «Si crea un altro buco da due». Quindi, in definitiva: un buco da quattro! Ogni nuovo spostamento di una pedina, crea un nuovo buco da due, pertanto le differenze delle coppie di numeri la cui somma sia 10 non possono che essere multipli di 2 e quindi solo numeri pari (in un caso nulla). Al ragazzo è stato dato il tempo di migliorare la sua esposizione ripetendola più volte. I loro compagni ascoltavano, talvolta correggendolo.

A conclusione si è deciso di annotare la conclusione raggiunta nella seguente:

Proprietà 2. *Se la somma di due numeri è 10, la loro differenza sarà sicuramente data da un numero pari o zero.*

2.12 Attività 3

L'obiettivo di questa attività era ricercare un metodo efficace che rappresentasse tutte le coppie di numeri naturali la cui somma fosse un multiplo 10 e che permettesse di rilevare le proprietà della loro differenza al fine di determinare eventuali strutture stabili.

L'obiettivo della seguente attività, è stato verificare se le proprietà scoperte per le coppie di numeri naturali la cui somma fosse 10, permanevano anche per coppie di numeri la cui somma fosse 20, 30 cioè in generale per un multiplo di 10, essendo quindi, in questo modo, una struttura stabile. Interessante, per tal fine, la spiegazione fornita da uno studente: «se un qualsiasi multiplo di 10 è costituito da blocchi di 10, le conclusioni saranno le stesse». Alla richiesta di delucidazioni, le motivazioni addotte dal ragazzo sono state queste: «ragionando su ogni blocco da 10, sappiamo che la differenza tra una qualunque coppia è sempre pari. Pertanto qualunque sia il numero di blocchi del 10 in esame, due, tre, quattro o più, se in ognuno di essi le differenze non possono che essere pari, siccome la somma di pari è sempre pari, la differenza complessiva non potrà che essere pari». Invece, la maggior parte dei ragazzi, aveva concluso la propria ricerca accertando l'esistenza di una struttura stabile all'interno della base costituita da due file di pedine (la cui somma fosse 20 o 30).

2.13 Attività 4

Tale attività ha avuto i medesimi obiettivi delle due precedenti ma ha riguardato la ricerca di coppie di numeri naturali la cui somma fosse un qualsiasi numero pari. L'attività ha condotto i ragazzi a raggiungere conclusioni riassunte nella seguente:

Proprietà 3. *Due numeri la cui somma è pari, sono tali che la loro differenza è sempre pari. Oppure: dati due numeri la cui somma è pari, il maggiore dei due è sempre dato dalla somma del minore e di un altro numero pari (che sarà zero quando i due numeri sono uguali).*

Terminata l'attività, ci si è soffermati un po' più a lungo sulla verifica di questi primi apprendimenti mediante alcuni appositi esercizi: qui di seguito ne sono riportati alcuni a titolo di esempio:

Quesito 2.13.1. *Esistono due numeri tali che la somma sia 44 e il maggiore sia più grande del minore di 16? .*

Quesito 2.13.2. *Esistono due numeri tali che la somma sia 60 ed il minore sia più piccolo di 17?*

Sostanzialmente gli studenti si sono divisi tra quelli che hanno risposto senza fare calcoli applicando quanto appreso in precedenza e quelli che invece, mediante prove ed errori, hanno effettivamente determinato i due numeri. Diciamo che sostanzialmente è quanto ci si aspettava giunti a questo punto delle attività in cui le scoperte effettuate non hanno ancora generato capacità d'astrazione in tutti.

E' stato asssegnato anche il seguente:

Quesito 2.13.3. *Costruisci tre problemi possibili (nel senso che ammettono soluzioni) di somma e differenza e tre problemi impossibili.*

Questi esercizi, che necessitano anche di appropriate capacità sintattiche e lessicali, sono realizzabili a patto di aver compreso adeguatamente i nodi cruciali degli argomenti trattati, non appartenendo ad una tipologia standard di problemi per i quali, per essere risolti, basta applicare una procedura convenzionale. Per questo motivo svolgono un ruolo molto importante in didattica.

2.14 Attività 5

L'obiettivo di questa attività è stato ricercare coppie di numeri naturali la cui somma fosse un qualunque numero dispari individuando le strutture stabili di tali numeri. Si è voluto portare i ragazzi a capire che, proprietà analoghe a quelle scoperte per i numeri pari, valessero anche per coppie di due numeri dispari. Ci si aspettava ed infatti è stato così, che i ragazzi giungessero a comprendere tali proprietà più velocemente, essendo le argomentazioni necessarie sostanzialmente identiche alle precedenti. Pertanto, la nuova attività è cominciata ponendo il seguente:

Problema 6. *Usando le pedine visualizza tutte le coppie di numeri che sommate diano 11.*

Facendo tesoro delle precedenti esperienze, abbiamo osservato che alla maggior parte degli studenti, è venuto in mente di disporre le pedine ancora in coppie su due file: naturalmente è emerso da subito che una pedina non fosse accoppiata. Spostando, più volte, una pedina dalla fila inferiore (per esempio) a quella superiore, cioè dal numero più piccolo al più grande, si sono trovate tutte le coppie di numeri la cui somma fosse 11. Ci si è accorti facilmente che le differenze tra le varie coppie, in questo caso, erano sempre dispari. Alla richiesta della ragione, è venuta fuori di nuovo la questione del «buco da due» che si crea ogni qualvolta si sposta una pedina da una riga all'altra. Ma siccome in partenza, la differenza tra le due righe era già di una pedina, dopo uno spostamento diveniva di 3 (1 + 2), dopo due spostamenti di 5 (1 + 4) e così via, ossia sempre un numero dispari. In definitiva, individuata la struttura stabile, si è concluso che:

Proprietà 4. *Se la somma tra due numeri e dispari, la loro differenza è sempre dispari.*

Come alla fine delle precedenti attività sono stati proposti esercizi di verifica.

2.15 Attività 6

Al termine di questa attività bisognava essere in grado di saper determinare una strategia risolutiva efficace che permettesse d'individuare coppie di numeri interi, essendo note la loro somma e la loro differenza. Per tal fine, è stato utile in questo contesto proporre di ragionare su numeri grandi, al fine di scoraggiare il procedimento per prove ed errori. Sulla lavagna è stata scritta una somme s e una differenza d, essendo s e d numeri grandi. Anche se scettici di essere in grado di trovare la soluzione del problema posto i ragazzi sono comunque stati sfidati a provarci.

Inizialmente, ogni gruppo è stato dapprima invitato a scegliersi due numeri s e d a caso ma che non fossero eccessivamente grandi: le pedine consegnate, dovevano aiutare a determinare la coppia di numeri la cui somma fosse s e la differenza fosse d. Per facilitare la memorizzazione di più dati (i due numeri, la loro somma, la loro differenza), sono stati consegnati dei cartellini con su scritto «somma» o «differenza» chiedendo ai ragazzi di decidere dove posizionarli in prossimità delle pedine. Qualche piccola incertezza c'è stata su dove disporre il cartellino «somma», mentre unanimità c'è stata nel decidere la posizione del cartellino «differenza» (Figura 2.36).

A questo punto è stato chiesto ai ragazzi di enunciare tutte le caratteristiche delle configurazione che avevano davanti. Tenendo presente le regole della percezione indicate della teoria della Gestalt si sono capite molto bene le loro osservazioni: è emerso chiaramente che la loro attenzione si posava essenzialmente sugli aspetti legati alla simmetria delle disposizioni realizzate. Molti ragazzi notavano un vuoto che «rompeva» una potenziale simmetria (tranne nel caso che le due righe fossero uguali); questa asimmetria faceva percepire una sensazione di disturbo e pertanto in un certo senso, faceva sorgere il desiderio di eliminarla. Questa capacità di riconoscere forme simmetriche da quelle non simmetriche è naturale come si è già detto in 1.8: la natura infatti ci offre molti esempi di simmetria (il nostro viso, il nostro

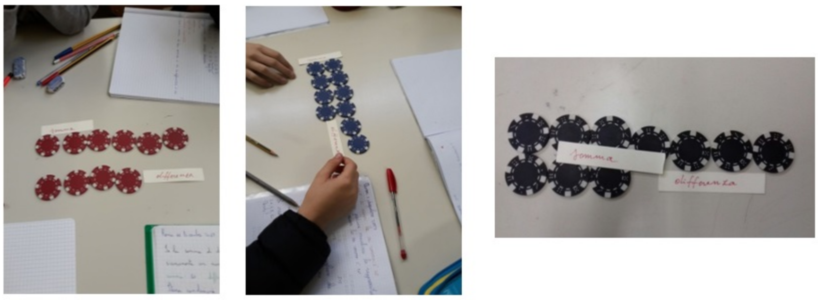


Figura 2.36: I cartellini

corpo, un arancio tagliato a metà, un monte che si specchia nel lago ecc) e anche molti nostri manufatti sono simmetrici. Pertanto cresciamo imparando a riconoscere le forme simmetriche da quelle non simmetriche senza bisogno di alcuna istruzione (che naturalmente sarà necessaria per una formalizzazione del concetto). Ecco, per l'appunto, qui di seguito, alcune espressioni utilizzate dei ragazzi che di fatto volevano esprimere le loro sensazioni intuitive, usando una terminologia progressivamente sempre più precisa: «c'è un rettangolo più un segmento che sporge»; «la figura per una parte si ripete per una parte no»; «la figura non è simmetrica!» Pertanto si è chiesto loro quali modifiche si potessero fare affinché la composizione realizzata diventasse simmetrica. Le risposte sono state quelle attese e cioè sostanzialmente due. Ecco una sintesi dei dialoghi con gli studenti (con «i» indichiamo insegnante, con «a» l'alunno):

Prima proposta

a: «Eliminando ciò che causa la mancata simmetria e quindi togliendo pedine». Tutti i gruppi sono stati invitati ad eseguire ciò che è stato suggerito sulla propria disposizione di pedine ossia a togliere la causa dell'asimmetria (termine mai usato dagli studenti ma qui introdotto per semplicità). i: «Cosa è rimasto?» a: «Il rettangolo». i: «D'accordo come forma è un rettangolo, ma non dimentichiamo che le pedine rappresentano dei numeri. Quindi?» a: «Sono rimasti due numeri uguali». i: «Bene, ma rispetto ai due numeri di partenza, questi due numeri a chi sono uguali?« a: «Al più piccolo». i: «Allora, se togliamo la differenza, otteniamo due volte il numero più piccolo. Ma la togliamo da chi?» a: «Dalla somma». i: «In sostanza ci avete detto che se dalla somma togliamo la differenza otteniamo due volte il numero più piccolo. E per avere una volta il numero più piccolo?» a: «Basta dividere per 2!» A questo punto, tutti i gruppi sono stati invitati ad applicare il ragionamento appena esposto sulle pedine a loro disposizione.

Seconda proposta

a: «Aggiungendo pedine per eliminare l'asimmetria». Mediante un dialogo simile al precedente, si è arrivati ad un secondo modo per determinare la soluzione: l'aggiunta della differenza alla somma data, permette di ottenere due volte il numero più grande dei due.

In conclusione, si è atteso che ogni gruppo trovasse la soluzione del proprio problema usando ciascuno dei due metodi proposti. Infine, per costatare la potenza dei due metodi conosciuti, si è chiesto ai ragazzi di provare a trovare le soluzioni degli esercizi proposti inizialmente alla lavagna, ossia quelli che presentavano delle somme e delle differenze con dei numeri molto grandi. Una certa aspettativa si è creata intorno all'esercizio in cui la somma s fosse 110.448 e la differenza d fosse 28.834. Uno studente è stato invitato ad usare la calcolatrice del computer (i calcoli ora impegnativi non dovevano distogliere l'attenzione dal ragionamento da fare) collegato con la lavagna multimediale per eseguire i conti che i suoi compagni di classe gli suggerivano di fare. Giunti alla conclusione, si è potuta costatare una grande soddisfazione da parte di tutti per essere riusciti a risolvere insieme un problema di tale difficoltà.

2.16 Attività 7

In questa sezione vengono riportate le verifiche fatte svolgere al termine delle attività e dopo 5 mesi dalla fine delle stesse. In base anche agli obiettivi preposti ed elencati nel Paragrafo 2.9, ci si voleva accertare che i ragazzi fossero in grado di risolvere gli esercizi assegnati attraverso strategie risolutive che sapessero «governare»; ma, soprattutto, che manifestassero sempre più una capacità d'astrazione che permettesse loro di risolvere situazioni generali senza più fornire motivazioni legate a casi specifici. Qui di seguito sono riportate alcuni delle risposte più significative degli studenti che hanno permesso un'analisi dell'evoluzione degli apprendimenti.

Prima attività di verifica. I seguenti quesiti sono stati proposti subito dopo la fine delle precedenti attività.

Quesito 2.16.1. *Considera il doppio di un numero pari; considera il triplo di un numero dispari; sottrai i due numeri ottenuti (il primo numero deve essere maggiore o uguale al secondo). Il numero finale è pari o dispari? Perché?*

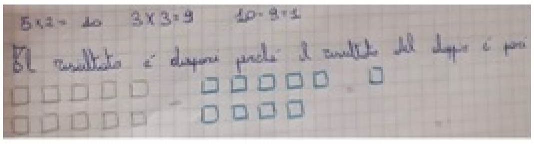


Figura 2.37: Una soluzione al Quesito 2.16.1

Nella soluzione riportata nella Figura 2.37 si vedono disegnate tante pedine quante ne sono indicate nei numeri degli esempi mostrati. Anche altri studenti che hanno risposto in questo modo, hanno dimostrato di dover fare ancora riferimento a casi specifici per dare una risposta di carattere generale. Tale ricorso al concreto, specie per quegli studenti che hanno difficoltà in matematica, può essere considerato ancora normale a questo punto delle attività.

Quesito 2.16.2. *Considera il doppio di un numero dispari; considera il triplo di un numero pari; somma i due numeri ottenuti. Il numero finale è pari o dispari? Perché?*

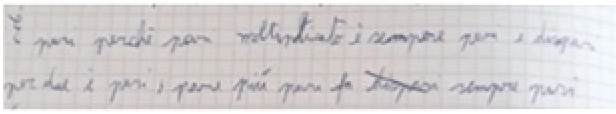


Figura 2.38: Una soluzione al Quesito 2.16.2

Particolarmente interessante è il modo di procedere riportato in Figura 2.38: dall'analisi delle risposte di questo studente si osserva un progressivo abbandono dell'aspetto grafico nella strategia risolutiva per proseguire rispondendo esclusivamente in forma linguistica. E' presumibile che un modello adeguato si sia ormai già costituito nella sua mente. Meritevole di essere citata è la strategia risolutiva riportata in Figura 2.39 dello stesso esercizio proposta da un altro studente: è evidente che questi non ha più bisogno dell'esempio concreto. Il generico numero pari è rappresentato da quattro pedine (diciamo che ne sarebbero bastate anche solo due), mentre il dispari da tre. L'approccio testimonia già un livello di astrazione non banale specie se si considera che sono passate circa due settimane dall'inizio delle attività.

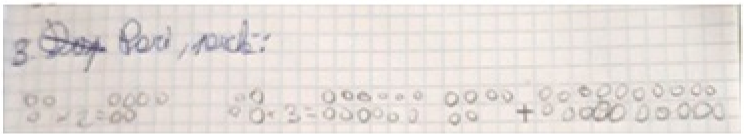


Figura 2.39: Un'altra soluzione al Quesito 2.16.2

Seconda attività di verifica. Il seguente quesito fa parte di una esercitazione proposta qualche giorno dopo la prima attività di verifica. Questo necessiterebbe, per essere risolto, dello stesso modello matematico utilizzato per risolverne altri già proposti in precedenza. Tuttavia, come si vedrà, non è il primo approccio che viene in mente agli studenti.

Quesito 2.16.3. *La somma di due numeri pari consecutivi è 126. Quali sono questi due numeri?*

Tra gli studenti che hanno trovato la soluzione (non per tentativi) sono emerse sostanzialmente due diverse strategie.

Soluzione 1: siccome 126 = 120 + 6, si considera la metà di 120 che è 60; poiché il numero dato ha 6 unità e dovendo essere la somma di due pari consecutivi, non può che essere ottenuto da 2 + 4; allora i numeri in questione sono 62 e 64.
Soluzione 2: si divide 126 per 2 ottenendo due numeri uguali; poi al primo si toglie 1 e al secondo si aggiunge 1 ossia si ottiene 63 - 1 = 62 e 63 + 1 = 64.

La soluzione 1 è valida solo in qualche caso particolare: se la somma dei due numeri pari consecutivi fosse stata un altro numero come ad esempio 114, non poteva certamente essere adottata.

E' possibile, invece, che sia la piccola differenza tra i due numeri cercati a far scattare in mente prima l'idea di dividere la somma in due numeri uguali per poi sottrarre 1 ad uno e aggiungere 1 all'altro. La bontà delle strategie adottate, deve essere stabilita sulla base dalla loro generalità, pertanto si è fatto notare alla classe, che la soluzione 2 oltre che essere corretta, differentemente dalla soluzione 1, è assolutamente generale, cioè vale per ricercare qualsiasi coppia di numeri la cui somma sia espressa da un numero pari e quindi sicuramente da considerare come metodologia da adottare.

Terza attività di verifica. I seguenti invece, sono alcuni dei quesiti di una verifica eseguita in classe valutata dagli insegnanti[1]

Quesito 2.16.4. *La somma di due numeri è 434 e la loro differenza è 226. Trova i due numeri.*

Quesito 2.16.5. *In una classe di 25 alunni, i ragazzi sono 3 in meno delle ragazze. Quante sono i ragazzi e le ragazze?*

Quesito 2.16.6. *Due fratelli hanno in tutto 234 figurine; uno dei due ne possiede 126 in più del fratello. Quante figurine ha ciascuno di loro?*

Praticamente tutti gli studenti hanno risolto gli esercizi, come si può constatare nella Figure 2.40 e 2.41, riconoscendoli nei problemi di somma e differenza nonostante questo non sia sempre stato esplicitato nel testo.

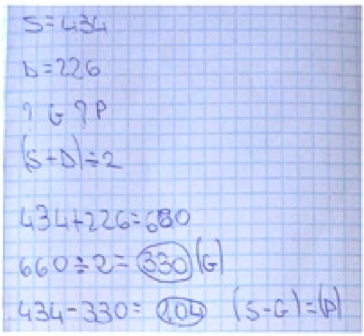


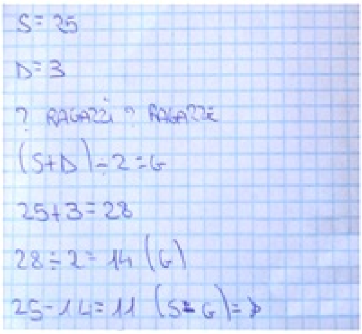
Figura 2.40: Una soluzione al Quesito 2.16.4

Quesito 2.16.7. *La somma di due numeri pari consecutivi è 170. Quali sono i due numeri?*

La maggior parte è pervenuto alla soluzione mediante la stessa strategia adottata per il Quesito 2.16.3. Tuttavia è emersa una novità: tre studenti hanno riconosciuto il problema come facente parte della classe di problemi di somma e differenza. Nella Figura 2.42 è stato riportato uno di questi.

Quesito 2.16.8. *Costruisci un problema in cui compaia la somma di due grandezze e la loro differenza usando i numeri 68 e 34. Quindi risolvilo.*

[1] La scelta dei quesiti è stata fatta esclusivamente dagli insegnanti curriculari per usare contesti e linguaggi familiari a vantaggio degli studenti: tali quesiti, infatti, costituivano una verifica valutata.



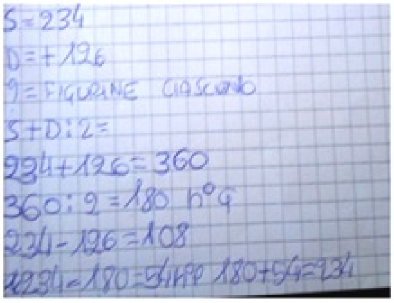


Figura 2.41: Una soluzione al Quesito 2.16.5 ed una al Quesito 2.16.6

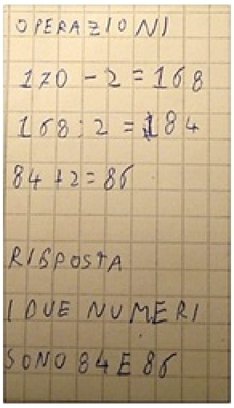


Figura 2.42: Una soluzione al Quesito 2.16.7

Problemi di questo tipo sono stati costruiti correttamente sostanzialmente da tutti.

Quesito 2.16.9. *Esistono due numeri naturali la cui somma sia 102 e la loro differenza sia 21? Motiva la risposta.*

Le risposte a questo esercizio, dovendo essere argomentative, come era facile aspettarsi, hanno messo in seria difficoltà gli studenti: la maggior parte se l'è cavata rispondendo semplicemente in maniera negativa. Pochi hanno tentato di motivare la risposta, utilizzando le conoscenze acquisite durante le attività. Nella Figura 2.42, vi è un esempio di questo tipo.

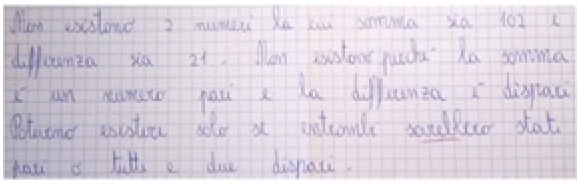


Figura 2.43: Una soluzione al Quesito 2.16.9

Quarta attività di verifica. Dopo circa 5 mesi dalla data della precedente verifica, i ragazzi di una delle due classi ne hanno svolta un'altra sotto forma di esercitazione. Tra queste due prove, la loro insegnante non ha compiuto alcun tipo di ripasso specifico, proseguendo il suo piano di lavoro affrontando i vari argomenti prefissati, ossia in aritmetica la divisibilità, la ricerca del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo, le frazioni, mentre in geometria, le rette sul piano, gli angoli, facendo solo un accenno ai triangoli. Quindi, in nessuna verifica per casa o in classe concernente i precedenti argomenti, è stato chiesto ai ragazzi di svolgere esercizi di somma e differenza. Naturalmente si deve tenere necessariamente conto che, dopo tre mesi, in virtù degli studi in ogni disciplina affrontati a scuola, i ragazzi abbiano raggiunto una diversa maturazione cerebrale. Inoltre l'insegnante non ha informato in nessun modo i suoi studenti che avrebbe eseguito la nuova prova. Pertanto avendo escluso ogni forma d'intervento specifico che avrebbe potuto condizionare evidentemente i risultati ottenuti, sono stati somministrati degli esercizi, di cui ne riportiamo solo alcuni per brevità ai ventuno studenti presenti. Come si potrà notare facilmente, sebbene l'ambito di questi esercizi sia quello geometrico, di fatto sono problemi aritmetici nei quali, le lunghezze dei segmenti coinvolti sono ancora espresse da numeri naturali. Si faranno alcuni osservazioni sulle risposte ad alcuni quesiti.[2]

Quesito 2.16.10. *Due segmenti hanno la lunghezza espressa da due numeri dispari consecutivi; sapendo che la loro somma è 200, determina la lunghezza dei due segmenti.*

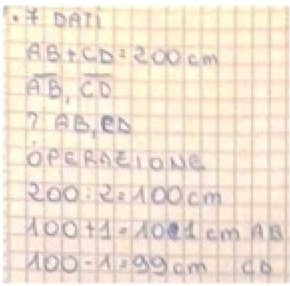


Figura 2.44: Una soluzione al Quesito 2.16.10

I due studenti con BES non l'hanno svolto, mentre invece altri tre lo hanno eseguito ma con un procedimento errato. Tutti gli altri sedici alunni lo hanno risolto (si veda Figura 2.44) dividendo in due la somma data, per aggiungere e sottrarre un'unità rispettivamente ad una e all'altra metà.

Quesito 2.16.11. *Due segmenti diversi sono tali che il minore sia più piccolo di 25 cm; sapendo che la loro somma sia di 77 cm, determina la lunghezza dei due segmenti.*

Questo quesito è stato svolto correttamente da tutti gli studenti tranne cinque, di cui tre hanno commesso errori di calcolo mentre gli altri due, lo hanno svolto solo parzialmente. Interessante (perché non è mai stato mostrato agli studenti in questi termini) nei due procedimenti risolutivi riportati in Figura 2.45, la presenza del disegno che argomenta il ragionamento eseguito.

[2]Anche questi quesiti sono stati elaborati dal docente curriculare.

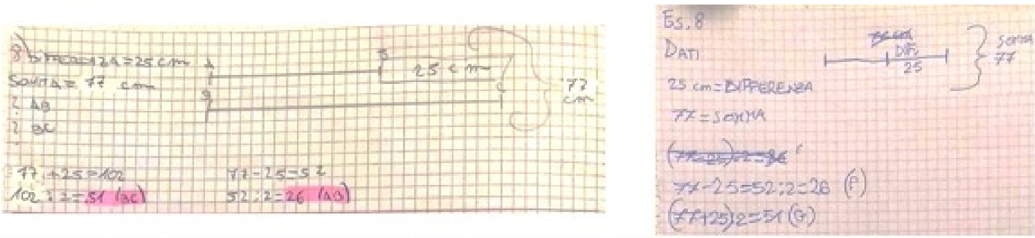


Figura 2.45: Una soluzione al Quesito 2.16.11

Quesito 2.16.12. *Costruisci un problema possibile che coinvolga due segmenti diversi di cui si sappia la loro somma e quanto sia maggiore il più grande dei due.*

Solo due studenti, pur costruendo correttamente il problema, hanno commesso errori nella strategia risolutiva. Tutti gli altri lo hanno svolto correttamente. Nelle due proposte riportate in Figura 2.46, i «protagonisti» del problema non sono segmenti bensì liane e corde (in realtà ce ne sono altre due in cui compaiono spaghi e collane), ossia oggetti concreti: evidentemente questi studenti hanno chiaro che il segmento è un modello per un qualsiasi oggetto concreto lineare.

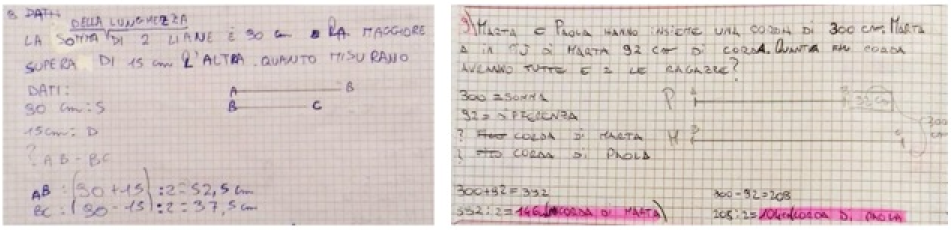


Figura 2.46: Una soluzione al Quesito 2.16.12

Quinta attività di verifica. Tre giorni dopo è stata eseguita un'ulteriore verifica a completamento della precedente; in quest'ultima, gli esercizi assegnati riguardavano ancora una volta segmenti però questa volta visti come lati di un triangolo. Tale prova è stata molto soddisfacente nel numero delle risposte corrette e nella loro qualità: tuttavia non si può escludere naturalmente che abbia risentito dell'effetto dell'esercitazione effettuata pochi giorni prima. Qui di seguito i quesiti proposti.

Quesito 2.16.13. *In un triangolo un lato è di 150 mm, mentre gli altri due sono tali che la loro somma è di 27 cm mentre la loro differenza è di 3 cm; determinare i lati mancanti e specificare di che tipo di triangolo si tratti.*

Questo esercizio è stato risolto da venti studenti su venti (compresi due ragazzi con DSA).

Quesito 2.16.14. *Un triangolo ha un lato di 8 cm, mentre gli altri due sono tali che la loro somma è di 16 cm e la loro differenza è zero. Di che triangolo si tratta? Motivare le risposte ed esegui il suo disegno.*

Si voleva anche verificare, dalle risposte al quesito, quanti avrebbero risposto alla domanda senza effettuare alcun calcolo. Sempre su venti alunni, solo uno ha svolto in modo errato il quesito. Gli altri diciannove hanno operato in questo modo: sei alunni hanno eseguito calcoli utilizzando il procedimento ormai solito mentre gli altri, indicando l'operazione $16 : 2$, hanno determinato la lunghezza dei lati deducendo che si trattava di un triangolo equilatero.

2.17 Conclusioni al capitolo

Il percorso effettuato nelle classi ha fornito un validissimo contributo grazie all'analisi dettagliata che si è condotta sui comportamenti degli studenti, sia nella fase laboratoriale di scoperta delle proprietà sia durante la verifica degli apprendimenti. Dalle risposte dei ragazzi verbali e scritte nei singoli quesiti posti, è possibile comprendere le eventuali criticità emergenti nel loro apprendimento. Inoltre, molto importante, è stato confrontarsi con i loro docenti per venire a conoscenza, in generale, dell'approccio avuto dagli studenti in queste attività in rapporto con quello tenuto solitamente.

Da tutto questo lavoro di analisi è emerso, innanzi tutto, che studenti in genere non costanti nello studio della matematica, si sono attivati nelle attività proposte loro in maniera costruttiva manifestando decisamente un aumento d'interesse. Significativo, come un alunno avente un disturbo specifico dell'apprendimento certificato riguardante anche l'area numerica, sia stato particolarmente operoso durante le attività di tipo geometrico sorprendendo decisamente i suoi insegnanti. Ciò può essere del tutto normale considerando che, chi ha un deficit nell'area numerica, non necessariamente manifesta difficoltà in ambito geometrico essendo coinvolte aree cerebrali diverse (come è stato detto in più parti del Capitolo 1).

Dalla descrizione dettagliata di quanto fatto, è emerso che le attività laboratoriali richiedono più tempo di una lezione frontale, anche per il solo fatto che alcuni studenti possono manifestare difficoltà nella ricerca di una nuova proprietà. E' in casi come questo che si è dovuto avere la giusta attenzione e pazienza per capire dove si nascondesse l'ostacolo, aiutando gli alunni a «vedere» ciò che autonomamente non riuscivano a percepire. Se fossero stati i docenti a rimuovere questi ostacoli, svelando esplicitamente le strategie risolutive, sicuramente si sarebbe risparmiato molto tempo; tuttavia questo atteggiamento non avrebbe permesso il raggiungimento di alcuni obiettivi. Infatti, la scoperta autonoma deve avvenire gradatamente permettendo così la «conquista» dei vari concetti in maniera personalizzata. Per questo è fondamentale rispettare i tempi di apprendimento di ciascun ragazzo (almeno nei limiti del possibile). Tutto ciò naturalmente non dà garanzia di riuscita sicura, ma è molto facile riscontare disagio da parte dello studente che non riesce a seguire quanto si sta facendo se si passa troppo velocemente per lui da un aspetto all'altro: ciò lo porta ad annoiarsi, a disinteressarsi, fino ad abbandonare le attività. E' riscontrabile invece che i concetti conquistati per scoperta personale, permettendo anche una comprensione adeguata dei meccanismi che li governano, non solo consentono allo studente di «gestire» autonomamente il proprio lavoro favorendo una partecipazione attiva, ma vengono più facilmente richiamati in seguito ed anche in contesti diversi: indicativi sono in tal senso i risultati delle prove che sono state fatte eseguire a distanza di circa cinque mesi dalla fine delle attività. Pertanto ben venga il tempo speso in più nelle attività laboratoriali se questo permette di far consolidare meglio le conoscenze, le abilità e quindi le competenze dei ragazzi.

Naturalmente è stato di fondamentale importanza far percepire ai ragazzi un clima di serenità durante le attività tale da permettere loro di poter manifestare apertamente le proprie opinioni, intervenendo liberamente senza paura di sbagliare. Al raggiungimento delle singole tappe i docenti sono stati pronti a gratificare gli sforzi dei ragazzi in ogni caso e attenti a non denigrare il loro operato in caso di errori: nelle attività laboratoriali, infatti, l'errore è un elemento fondamentale, la cui analisi può portare verso una nuova strada da intraprendere che magari permette di pervenire alla soluzione del problema. E' anche mediante questi accorgimenti che, a nostro avviso, si pone realmente lo studente al centro di tutto il proprio processo di apprendimento. Analizzando nel loro complesso tutte le attività eseguite e le varie tipologie di verifiche effettuate, non si può dire certamente in maniera troppo semplicistica di aver raggiunto tutti gli obiettivi prefissati inizialmente. Tuttavia si può affermare che i risultati fino a questo punto raggiunti incoraggiano a a proseguire in questa direzione. Da un punto di vista didattico si può concludere che:

1. le supposizioni fatte sulla forma da far acquisire ai numeri pari per riconoscerli dai dispari senza effettuare alcun conteggio sono risultate corrette; la nozione di simmetria, posseduta già dai ragazzi di quest'età, suggerisce in realtà molte forme possibili, a volte fin troppo complesse. Tuttavia, dopo poco tempo, gli studenti comprendono l'importanza di utilizzare la più semplice ossia quella costituita disponendo le pedine su due file;

2. monitorando le risposte dei ragazzi agli esercizi, abbiamo potuto costatare, almeno in linea generale, come si sono evolute le loro idee, le loro capacità di generalizzazione e di astrazione. Inizialmente molti ragazzi tendevano a fornire risposte generali deducendole dall'analisi di esempi concreti seppur corredate da disegni di pedine: ciò è stato interpretato comunque come un tentativo verso un nuovo approccio risolutivo (evidentemente non ancora raggiunto);

3. la manipolazione delle pedine ha permesso la verifica immediata delle proprie congetture e, in caso di errore, ha motivato all'autocorrezione. Quindi ha contribuito alla fomazione di un pensiero «produttivo» facendo giungere autonomamente molti ragazzi alla scoperta delle proprietà dei numeri. Determinante è risultato essere la scoperta delle strutture stabili delle figure: ciò ha consentito di avere sempre meno l'esigenza di appoggiarsi all'elemento grafico evidenziando una personale evoluzione dei propri modelli mentali necessari per fare inferenze predittive corrette;

4. la formazione di adeguati modelli mentali è riscontrabile anche da altri due fattori: il pensiero dei ragazzi è risultato infatti essere produttivo in contesti diversi rispetto a quello in cui si sono sviluppate le attività. Inoltre, tale capacità ha resistito al passare del tempo se 5 mesi dopo il termine delle attività i risultati conseguiti dai ragazzi sono stati molto soddisfacenti.

5. l'uso dei materiali ha entusiasmato anche gli studenti con disturbi specifici che si sono impegnati a tal punto di sentirsi di poter dare il proprio contributo collaborando con i compagni ed intervenendo nelle discussioni di gruppo. Questo atteggiamento ha decisamente sorpreso i loro insegnanti;

6. non abbiamo riscontrato significativi miglioramenti nell'argomentazione scritta della propria strategia risolutiva; ciò non è del tutto inaspettato visti i tempi brevi delll'intervento effettuato.

Possibili passi futuri. Sarebbe opportuno, in un prossimo futuro, riproporre questo studio a nuovi gruppi di studenti, raffinando i termini della nostra ricerca sulla base delle indicazioni finali emerse dal presente lavoro. A tal proposito, risulta dunque necessario l'impiego di protocolli noti per la conduzione di un esperimento comportamentale e metodi statistici per valutare, in modo rigoroso, gli effetti degli interventi mirati effettuati nelle classi rispetto ad una situazione di partenza.

A tal fine, prima dell'inizio delle attività, è necessario:

1. comprendere più dettagliatamente quali siano le conoscenze generali degli studenti sui numeri pari e dispari;

2. quali siano le strategie risolutive applicate a semplici problemi aritmetici nei quali si cerchino coppie di numeri soddisfacenti due condizioni;

3. se siano già presenti negli alunni capacità di astrazione.

Successivamente, occorrerà valutare:

1. in che modo evolvano le capacità d'astrazione in relazione alla scoperta delle strutture stabili delle figure;

2. capire con maggiori dettagli le connessioni tra l'individuazione delle strutture stabili e i materiali specifici utilizzati;

3. se il progredire del processo di astrazione, che permette la formazione di modelli mentali adeguati, renda desueto l'uso dei materiali specifici;

4. se l'acquisizione di modelli mentali appropriati accresca le competenze degli studenti, da renderli capaci di risolvere problemi inseriti in nuovi ambiti ma che necessitino delle medesime strutture matematiche per essere risolti.

Capitolo 3

Sviluppo di capacità intuitive-geometriche

3.1 Introduzione

L'esperienza maturata durante le attività svolte nelle classi di prima media nell'A.S. 2017/2018 e descritta nel Paragrafo 2.8 ha fatto comprendere l'assoluta necessità di utilizzare protocolli convenzionali d'indagine per la conduzione di esperimenti comportamentali: questi debbono procedere di pari passo a metodologie statistiche, con particolare riferimento alla psicometria, per valutare, in modo rigoroso, le conseguenze degli interventi didattici sull'apprendimento degli studenti. Tuttavia non si è ritenuto, durante questo periodo di lavoro, di fare tutto ciò per le attività presentate nel Paragrafo 2.8. Non perché non lo meritassero, ovviamente, ma è sembrato più opportuno fare esperienze diverse, comunque, a queste propedeutiche: in questo capitolo si descriverà nel dettaglio l'attività sperimentale che è stata condotta nell'A.S. 2018/2019 che ha coinvolto 8 classi di seconda media di 3 Istituti Comprensivi diversi.

Si è già sottolineato che la ricerca di una strategia risolutiva di un problema, aritmetico o geometrico, che porti alla determinazione della sua soluzione costituisce una delle tipiche difficoltà degli studenti. I motivi per cui non si riesce a risolvere un problema possono essere i più disparati; per questo, è altresì complicato per il docente capire come intervenire sullo studente per aiutarlo. Occorre, prima di tutto, qualche precisazione. Intanto si vuole dapprima specificare cosa s'intende, in questo contesto, per problema geometrico: s'intende un problema i cui «protagonisti» siano effettivamente enti geometrici ma anche che le possibili strategie risolutive dipendano tutte dalla conoscenza delle loro proprietà intrinseche e della scoperta di relazioni sussistenti tra tali enti. Queste relazioni possono riguardare l'uguaglianza tra lati, tra angoli, tra poligoni, tra figure qualsiasi, tra superfici ma anche il concetto di parallelismo, di perpendicolarità, di simmetrie, ecc. In questi tipi di problemi sono riportate anche misure di lati, di angoli e di superfici: tuttavia, per giungere alla soluzione è necessario comunque scoprire i rapporti esistenti, non palesemente espliciti, tra gli enti geometrici coinvolti. Per intenderci, il classico dei problemi nel quale si chiede di calcolare l'area di un rettangolo, noti la sua base e la sua altezza, non è considerabile un problema geometrico bensì un problema aritmetico contestualizzato in ambito geometrico. Per la sua soluzione basterà sapere applicare una formula che si può ricordare anche a memoria e magari senza averla capita: infatti, i rapporti tra gli enti geometrici coinvolti sono semplici e espliciti. Far affrontare esclusivamente problemi di questo tipo può persuadere gli studenti dell'esistenza di un'unica modalità risolutrice di tutti i problemi. E' facile, d'altronde, constatare l'approccio tipicamente utilizzato dai preadolescenti: questi si limitano a passare in rassegna le formule che conoscono per applicare quella che ritengono più idonea al problema che stanno cercando di risolvere. La scelta della formula dipende anche dalla somiglianza del problema oggetto di studio con tutti quelli studiati in precedenza. Dunque, di fatto, una ricerca della soluzione per analogia. Del resto, la tentazione di risolvere un problema qualsiasi inquadrandolo all'interno di una famiglia di problemi già noti e per i quali si conosca la strategia risolutiva è sempre molto forte perchè, di solito, meno dispendiosa.

Spesso i libri di testo non aiutano in questo senso: la presenza di un titolo che precede un elenco di esercizi applicativi condiziona gli studenti al punto da far considerare loro solo ciò che è inerente l'argomento dichiarato escludendo tutto il resto.

Si può constatare, inoltre, che non accorgersi delle relazioni sussistenti tra gli enti geometrici coinvolti può non far intraprendere le strade risolutive più agevoli portando, a volte, verso lunghi e noiosi calcoli. Fare tanti calcoli significa, inoltre, dilatare i tempi di risposta (si pensi questo quanto possa influire sulla valutazione di una verifica) ed esporsi maggiormente alla possibilità di errori. In definitiva, sviluppare esclusivamente un approccio aritmetico negli studenti non è risulta essere una modalità per lo più efficace e, soprattutto, non aiuta a generare negli studenti un pensiero razionale (si veda il Paragrafo 2.5). Naturalmente non si vuole sostenere che non sia importante saper padroneggiare tecniche di calcolo o formule già a partire dal primo ciclo di istruzione. Si sta solo affermando che affrontare i problemi con un approccio esclusivamente aritmetico è sicuramente limitativo per lo sviluppo delle capacità razionali dello studente.

Nella prima fase dell'esperimento condotto sarà somministrato un primo test a tutti gli studenti coinvolti per appurare effettivamente quale sia l'approccio con il quale preferiscono affrontare un problema geometrico. Ci si aspetta che la maggioranza di ragazzi propenda per un approccio aritmetico. Successivamente, verrà avviata la vera e propria fase sperimentale. Questa è caratterizzata da una seconda ipotesi da verificare: sviluppando attraverso interventi mirati capacità percettivo - geometriche negli studenti si riesce a modificare, in modo significativo, l'approccio adeguato alla ricerca della soluzione di un problema geometrico? Come generare negli studenti tali capacità? Queste, naturalmente, dipendono da conoscenze specifiche e, soprattutto, dall'essere in grado d'individuare le relazioni sussistenti tra gli enti geometrici. Si comprende quanto sia importante saper estrarre informazioni dalla figura legata al problema oggetto di studio. Lo sviluppo di questa «competenza» è fortemente ostacolata dalla presenza di fissità funzionali di cui si è già parlato nel Paragrafo 1.12: ogni oggetto coinvolto in un problema (un lato, un angolo, un poligono ecc) può avere in generale molteplici funzioni all'interno della figura e queste non sono sempre tutte percepite ad una prima osservazione. Inoltre, non è facile in generale, tenerle tutte contemporaneamente in considerazione per capire quale

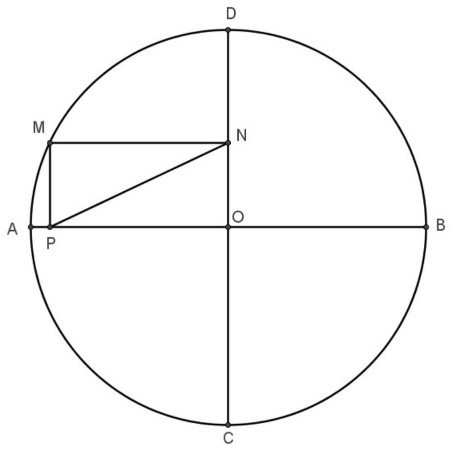


Figura 3.1

tra queste sia utile per intraprendere la strategia risolutiva che porti alla soluzione del problema. Si vuole, qui di seguito, riportare un altro esempio più complesso di quello già riportato nel Paragrafo 1.12, tratto da [8], che spiega molto bene quanto si sta asserendo.

Sia data una circonferenza di centro O e raggio 1 e si disegnino due diametri perpendicolari AB e CD. Si scelga arbitrariamente un punto M sulla circonferenza e si traccino le perpendicolari ai diametri MN e MP. Si chiede di determinare la lunghezza di PN. Ad una prima osservazione, che PN sia l'ipotenusa del triangolo rettangolo PMN. Ma ci si renderà conto che, considerarando tale segmento esclusivamente sotto questo "ruolo", non si riesce a giungere alla soluzione. Percepire dunque PN solo come ipotenusa del triangolo PMN risulta essere una fissità funzionale.

Per risolvere il problema occorre, quindi, "rompere" il proprio set mentale costituito dal modo abituale di percepire una situazione e/o un oggetto. Quale altra funzione può svolgere PN all'interno della figura? Occorre, a questo punto, "ristrutturare" la situazione in un modo diverso da quella emersa inizialmente. Questa ristrutturazione, questa riorganizzazione del problema può portare ad un'intuizione improvvisa, ad «un nuovo modo di vedere» il problema. Il termine tipicamente utilizzato, coniato da Köhler è *insight* ([81]): esso indica, in effetti, il momento in cui un soggetto riesce a «vedere dentro» ad una certa situazione, riuscendo a riorganizzarla e giungendo così alla sua giusta soluzione. Nel caso in esame, dimenticando il primo ruolo attribuito a PN, ci si renderà conto che questo è anche diagonale del rettangolo PMNO. A questo punto si può intravvedere la soluzione: l'altra diagonale, MO, uguale a PN è proprio il raggio della circonferenza e pertabto PN $= 1$. E' in questo modo che si manifesta un pensiero produttivo, usando il termine di Wertheimer, che permette di indagare in maniera efficace situazioni nuove mai affrontatate precedentemente.

Le fissità funzionali possono essere anche di un altro tipo. Si è già sottolineato nei Paragrafi 1.8, 1.9 e 1.10, come le nostre capacità di percezione visiva svolgano un ruolo di primissimo piano nello studio della matematica. Il nostro sistema visivo, infatti, riceve stimoli dal mondo esterno e li proietta anche verso il lobo temporale inferiore: qui sono localizzate regioni corticali deputate al riconoscimento di ciò che vediamo. Sappiamo dell'esistenza di neuroni che si attivano solo in presenza di determinati volti, di determinati oggetti e forme. È grazie a queste aree che impariamo a riconoscere oggetti uguali, della stessa forma e simmetrici. Sono queste capacità innate che ci derivano dall'evoluzione per selezione naturale. La plasticità di questi neuroni, però, è tale che, alcuni di questi, diverranno «capaci», per effetto dell'educazione culturale, di attivarsi in presenza di specifici simboli come lettere e numeri o per intere parole ([13]).

Come detto nel Paragrafo 2.4, si riesce a dedurre facilmente l'uguaglianza di lati, di angoli, di perimetro e di superficie in due figure geometriche uguali. Diversamente, stabilire in figure diverse, con altrettanta facilità, l'eventuale uguaglianza delle aree oppure in che rapporto si trovino non è altrettanto semplice. Dall'esperienza didattica è noto che le difficoltà di percezione visiva aumentino sensibilmente nel caso in cui le superfici esaminate abbiano parti in comune. Infatti, come riassunto nella Figura 1.28 del Paragrafo 1.12, il nostro sistema di riconoscimento delle forme, sempre per meccanismi innati, è predisposto ad accorpare diversi elementi sensoriali sulla base di regole di organizzazione della percezione. Per tali motivi, può capitare, a volte, che questi possa addirittura ostacolare o comunque rendere più ardua la codifica dei costituenti delle figure che stiamo osservando. Queste difficoltà hanno frequentemente una causa comune e cioè, anche in questo caso, l'incapacità di riconoscere la molteplicità dei «ruoli» che uno stesso elemento può assumere all'interno dell'intera configurazione considerata.

Durante l'esperimento, volendo stimolare la ricerca di soluzioni dei problemi posti mediante un approccio intuitivo - geometrico, ci si occuperà proprio di quest'ultimo tipo di fissità e di come rimuoverle. Per tal scopo, i ragazzi coinvolti verranno divisi in due gruppi: in uno, detto sperimentale, gli studenti potranno rispondere a problemi aperti avvalendosi di un opportuno materiale didattico manipolabile: in questo modo, effettueranno movimenti a loro piacimento, cambiare i punti di osservazione, fare congetture, verificarle e autocorreggersi quando necessario. E' presumibile che uguaglianze, simmetrie, equivalenze saranno più facilmente individuabili consentendo di pervenire ad una rapida e corretta soluzione del problema in esame.

Diversamente, al secondo gruppo di studenti detto di controllo, verranno comunque sottoposti gli stessi problemi e nelle stesse modalità del primo ma essi potranno rispondere solo effettuando disegni con riga e compasso sul proprio quaderno.

Agli studenti di entrambi i gruppi si somministrerà un secondo test immediatamente dopo la fine delle attività didattiche per accertare se quest'ultime siano state efficaci. Ci si aspetta che tutti i ragazzi manifestino un sensibile miglioramento che consisterà in un approccio risolutivo più adeguato e in un aumento delle risposte corrette ai quesiti. Si congettura, inoltre, che l'utilizzo di materiali didattici possa determinare l'attivazione di molti più circuiti neuronali (ricordare quanto detto nei Paragrafi 1.14 e 1.16) nei ragazzi del gruppo sperimentale rispetto ai ragazzi del gruppo di controllo che hanno fatto uso solo di righe e compasso. Questo dovrebbe facilitare, nei ragazzi del primo gruppo, la permanenza o quantomeno un più facile recupero nel tempo della metodologia più efficace per la risoluzione di problemi geometrici. Per questo, si procederà all'esecuzione di un terzo test, diversi mesi dopo il secondo, per verificare se le competenze acquisite permangano nel tempo. L'utilizzo di un terzo test è una novità rispetto ai protocolli tradizionali ma necessaria per il tipo d'indagine che si vuole condurre.

3.2 Contenuti disciplinari scelti

Per individuare l'approccio preferito dagli studenti nella risoluzione di problemi geometrici, la presenza di eventuali fissità funzionali e per sviluppare capacità percettivo-geometriche negli studenti sono stati scelti i seguenti argomenti disciplinari:

1. determinazione del rapporto tra le aree di due superfici;
2. verifiche di equivalenza tra due superfici;
3. calcolo esplicito di aree.

Tale scelta è stata anche condizionata dal fatto che, avendo deciso di eseguire l'esperimento direttamente nelle scuole in orario curriculare (i motivi verranno meglio spiegati nel Paragrafo 3.5) i possibili argomenti da scegliere andavano ricercati tra quelli sicuramente inseriti nella programmazione annuale di ogni insegnante che fossero, inoltre, nodi cruciali nell'insegnamento della matematica.

Il corretto e più completo sviluppo delle capacità percettivo-geometriche avviene più facilmente durante il periodo temporale più sensibile all'acquisizione di tali capacità e cioè durante la frequentazione della scuola primaria: ciò fa supporre che interventi adeguati in questo periodo dello sviluppo possa incidere nell'apprendimento degli studenti in maniera più immediata e duratura nel tempo. Ciononostante, si è deciso di rivolgere questo esperimento a studenti più grandi e cioè di scuola secondaria di primo grado che svolgono la seconda media. I motivi sono sostanzialmente due: perché il campo di ricerca interessata in questo lavoro è relativo alla didattica della matematica nella scuola media e soprattutto per verificare che, attraverso un intervento mirato, si possa ancora rimediare a situazioni deficitarie.

3.3 Prerequisiti all'esperimento

Quando si darà inizio all'esperimento nelle classi ci si troverà in un momento dell'anno scolastico in cui gli studenti avranno già studiato il concetto di superficie e di equivalenza. Nello specifico, i prerequisiti che sarebbe necessario possedere sono:

1. conoscere il concetto di superficie in senso strettamente geometrico;
2. saper riconoscere due figure uguali;
3. saper riconoscere due poligoni equivalenti;
4. conoscere o quanto meno saper applicare il contenuto della Nozione Comune 3 degli Elementi di Euclide nella seguente versione: "se a superfici equivalenti si sottraggono superfici equivalenti, le rimanenti sono equivalenti";

5. conoscere o quanto meno saper applicare il contenuto della Nozione Comune 6 degli Elementi di Euclide che afferma: «Le metà di uno stesso sono equivalenti tra loro»;

6. saper calcolare numericamente l'area di un quadrato, di un rettangolo, di un parallelogramma e di un triangolo servendosi delle formule apposite.

3.4 Descrizione generale delle fasi dell'esperimento

L'esperimento è diviso nelle seguenti 6 fasi:

- Fase 1: ideazione e realizzazione del primo test detto *Pre-test*;

- Fase 2: validazione del Pre-test da parte di studenti di un istituto casualmente scelto, studio dati raccolti ed eventuali modifiche del Pre-test;

- Fase 3: somministrazione del Pre-test, eventualmente modificato, nelle classi degli istituti coinvolti nell'esperimento (diversi da quello in cui si è validado il Pre-test); correzione e raccolta dati del Pre-test;

- Fase 4: esecuzione di interventi mirati, detti *trattamenti*, nelle classi;

- Fase 5: ideazione e somministrazione del primo post-test, detto *Post-test 1*, correzione e raccolta dati relativa;

- Fase 6: somministrazione del secondo post-test (identico al Pre-test), detto *Post-test 2*, correzione e raccolta dati relativa.

La formulazione delle ipotesi (vedi l'Introduzione 3.1) da verificare per mezzo dell'esperimento che si andrà qui di seguito a descrivere ha fatto propendere, come luogo di esecuzione di ogni attività, direttamente gli istituti scolastici. Tuttavia, tale scelta, ha presentato alcune criticità che hanno rischiato di alterare gli esiti delle prove. Per evitare di avere a che fare con gruppi omogenei è, infatti, opportuno che questi vengano formati mediante una distribuzione casuale di studenti. Per poterlo fare in orario antimeridiano, quindi durante le giornate di ordinaria attività didattica, si deve modificare l'orario scolastico di diverse classi e, conseguentemente, l'orario di servizio di tutti i docenti per le diverse giornate dedicate all'esperimento. Inoltre, far svolgere le attività sperimentali contemporaneamente alle lezioni di tutte le altre classi presenta comunque problemi organizzativi legati alle numerose iniziative a cui i ragazzi quasi ogni giorno partecipano (progetti interni, esterni ecc) e fà correre il rischio di far deconcentrare i ragazzi coinvolti da rumori (voci di ragazzi, suono campanella ecc.) e da persone che entrano frequentemente nella classi in cui si lavora (docenti, collaboratori) interrompendo ogni volta il lavoro.

Tuttavia, la scelta dell'orario antimeridiano, riduce notevolmente i possibili effetti dovuti alla cosiddetta *mortalità sperimentale*. Questo aspetto è molto importante: è infatti necessario mantenere una congruenza numerica degli studenti per tutto il tempo della sperimentazione.

Un'altra possibilità è svolgere l'esperimento in orario pomeridiano; questa scelta permette sicuramente di formare gruppi con studenti provenienti da classi diverse e quindi più eterogenei e poi di evitare tutti i fattori di distrazione di cui si è accennato. Tuttavia, poché non si può ovviamente obbligare gli studenti a partecipare in orario pomeridano, è più probabile che partecipino solo gli studenti più motivati o comunque appartenenti a famiglie più motivate. Quindi, anche in questo caso, la scelta degli studenti non sarebbe stata proprio del tutto casuale.

In conclusione, analizzati tutti i pro e i contro di ogni scelta possibile, si è deciso di far eseguire comunque ogni attività durante l'orario curricolare antimeridiano cercando di ridurre il più che sia possibile tutti gli elementi che potrebbero alterare gli esiti dell'esperimento.

Nella sola fase sperimentale saranno complessivamente coinvolte 4 classi di cui 2 di un istituto comprensivo e 2 di un altro. Gli istituti (chiamati C e R) e le classi (dette E, D, F, G) sono stati scelti casualmente (si veda il Paragrafo 3.5.1). In ogni istituto, sempre mediante una scelta casuale, una classe sarà denominata *classe sperimentale* e l'altra *classe di controllo*. Le classi che costituiscono il gruppo sperimentale sono state denominate dunque CE e RF mentre quelle che costituiscono il gruppo di controllo sono denominate CD e RG. In tutte le classi è stato somministrato il medesimo *Pre-test* (denominato O_1 e O_2 rispettivamente nei due gruppi); successivamente, le classi del gruppo sperimentale sono state sottoposte al *trattamento A* (X_A), al *Post-test 1* (O_2) e al *Post-test 2* (O_3), mentre quelle di controllo sono state sottoposte al *trattamento B* (X_B) e, anche queste, ai due medesimi post-test (O_5 e O_6). Lo schema della Figura 3.2 sintetizza il quadro completo del disegno sperimentale utilizzato.

Gruppo	Pre – test	Trattamento	Post test 1	Post test 2
CE ,RF	O_1	X_A	O_2	O_3
CD,RG	O_4	X_B	O_5	O_6

Figura 3.2: Le classi coinvolte nell'esperimento e le attività in cui sono coinvolte.

3.5 Il disegno di ricerca utilizzato.

Gli effetti dei due trattamenti X_A e X_B potranno, in questo modo, essere studiati mediante molteplici analisi diverse e complementari. Si è, tuttavia, consapevoli del fatto che, in ambito educativo, ogni variabile analizzata interagisce con numerose altre variabili (posizione geografica degli istituti coinvolti, contesto culturale e sociale dei docenti e dei genitori, motivazioni degli studenti, preparazone dei docenti, offerta formativa della scuola ecc). In sintesi, le possibili analisi che possono essere condotte nel disegno sperimentale ideato possono essere sintetizzate in questo modo:

- O_2 in rapporto a O_1; differenza tra Post-test 1 e Pre-test nel gruppo sperimentale.
- O_5 in rapporto a O_4; differenza tra Post-test 1 e Pre-test nel gruppo di controllo.
- O_3 in rapporto a O_2; differenza tra Post-test 2 e Post-test 1 nel gruppo sperimentale.

- O_6 in rapporto a O_5; differenza tra Post-test 2 e Post-test 1 nel gruppo di controllo.
- O_3 in rapporto a O_1; differenza tra Post-test 2 e Pre-test nel gruppo sperimentale.
- O_6 in rapporto a O_4; differenza tra Post-test 2 e Pre-test nel gruppo di controllo.
- O_1 in rapporto a O_4; differenza tra i due Pre-test nei due gruppi.
- O_2 in rapporto a O_5; differenza tra i due Post-test 1 nei due gruppi.
- O_3 in rapporto a O_6; differenza tra i due Post-test 2 nei due gruppi.

Si vuole innanzi tutto sottolineare l'esigenza di somministrare a tutte le classi dei due gruppi il Pre-test: si è ritenuto infatti necessario disporre di una valutazione iniziale degli approcci tipicamente utilizzati dagli studenti nell'eseguire un problema di natura geometrica e conoscere quanto questi fossero effettivamente efficaci alla ricerca della corretta soluzione. Si è tuttavia consapevoli del fatto che, in questo modo, la semplice somministrazione del Pre-test interagisca sulle capacità oggetto d'indagine e cioè sull'approccio risolutivo dei problemi geometrici (ciò che nei disegni sperimentali costituisce la *variabile indipendente*). Non si è avuta, purtroppo, la possibilità di usufruire di almeno altre due classi (una per il gruppo sperimentale e una per quello di controllo) da far partecipare all'esperimento senza che agli studenti fosse somministrato il Pre-test.

3.5.1 Breve presentazione degli istituti e delle classi coivolte nell'esperimento.

La scelta dei due istituti comprensivi coinvolti nell'esperimento (denominati C e R) è stata, come detto, del tutto arbitraria. Appartengono al territorio di Roma sud: sono stati scelti logisticamente molto vicini tra di loro soprattutto per essere abbastanza sicuri che, i docenti, gli studenti, le famiglie, fossero all'interno del medesimo contesto ambientale, sociale e culturale. In questo modo, tali contesti, in generale non dovrebbero aver influito in modo diverso sui piani dell'offerta formativa nonché sui risultati delle prove Invalsi. Nell'istituto C sono state coinvolte due classi di seconda media, dette D ed E, denominate CD, gruppo di controllo e CE gruppo sperimentale, mentre nell'Istituto R, sono state coinvolte le classi, sempre di seconda media, G e F, dette RG, gruppo di controllo e RF gruppo sperimentale.

Ai docenti di ciascuna classe è stato fatto compilare un questionario: in questo compariva il codice di ciascun studente (nome scuola, sezione e numero d'ordine, ad esempio RG12) e, per ognuno di essi, andava riportato il sesso, l'anno di nascita, se fosse ripetente, la votazione in matematica conseguita nell'ultimo scrutinio (febbraio 2019) e se in possesso di eventuale certificazine (BES, H, DSA, DVA). I dati raccolti nella Figura 3.3 ci dicono che i due gruppi, sperimentale e controllo, sono sostanzialmente identici: infatti sono costituiti dallo stesso numero di studenti, il numero dei maschi è uguale nei due gruppi così come le femmine, l'età media è la stessa, non ci sono ripetenti in nessuno dei due, le medie in matematica sono quasi uguali così come il numero dei certificati è più o meno lo stesso.

GRUPPO	N.	MASCHI	FEMMINE	Nato 05	Nato 06	Nato 07	Rip.	Media	Certificazioni			
									Bes	H	Dsa	dva
SPERIMENTALE	43	23	20	2	37	4	0	6,3	2	1	5	1
CONTROLLO	44	24	20	4	38	2	0	6,2	1	2	3	0

Figura 3.3

3.5.2 Analisi delle variabili di sfondo.

Nell'ottica di essere ancora più sicuri che il gruppo sperimentale ed il gruppo di controllo non presentassero, all'atto di partenza, delle significative differenze, si è ritenuto opportuno avere qualche informazione più dettagliata su i ragazzi coinvolti nell'esperimento. A tal fine, si è somministrato un questionario da compilare a scuola costituito da domande per ricavare informazioni, essenzialmente, su tre ambiti:

1. informazioni anagrafiche dei genitori;
2. aspettative dei ragazzi e atteggiamenti nei confronti dello studio della matematica;
3. studio a casa e attività extrascolastiche.

Chiamiamo *variabili di sfondo* i dati rilevati riguardanti questi ambiti; ovviamente, sono strettamente correlati al rendimento di ciascun studente in matematica. Tale rapporto è stata determinato mediante un'*analisi di correlazione* di cui verranno forniti, di volta in volta e quando opportuno, i relativi *coefficienti di correlazione* (ρ) e di *significatività* (p).

Quello che emerge dall'analisi dei risultati ottenuti è che sostanzialmente i due gruppi, sperimentale e controllo, non differiscono per le caratteristiche demografiche principali e per gli atteggiamenti rispetto alla matematica. Gli studenti si dividono perfettamente in maschi e femmine e sono nati quasi tutti in Italia. Circa il 90% dei papà sono italiani poco meno le mamme: il loro titolo di studio è per lo più il diploma o la laurea e frequentemente lo stesso nel medesimo nucleo familiare. Anche le aspettative dei ragazzi si concentrano per lo più sulla laurea o sul diploma: tali aspettative hanno una correlazione con i risultati del Post-test 1 (ρ= 0,519 per i sottoquesiti A e $\rho = 0{,}536$ per i sottoquesiti B con $p < 0{,}05$ in entrambi i casi) nei soli ragazzi del gruppo di controllo; non ci sono correlazioni, invece per quelli del gruppo sperimentale.

Passando agli atteggiamenti nei confronti della matematica continua l'equità tra i due gruppi: si dividono a metà i ragazzi che ritengono di andare bene in matematica da quelli che non lo ritengono. Questi risultati hanno una buona correlazione con gli altri atteggiamenti rilevati nei confronti della matematica: uno di questi è l'attitudine che si ritiene avere nei confronti della matematica ($\rho = 0{,}566$ per il gruppo sperimentale, $\rho = 0{,}591$ per il gruppo di controllo con $p < 0{,}05$ in entrambi i casi). Un'altra significativa correlazione si ha con il piacere che si prova a studiare la matematica ($\rho = 0{,}520$ per il gruppo sperimentale, $\rho = 0{,}334$ per quello di controllo, $p < 0{,}05$ sempre in entrambi i casi); infine, si riscontra un'altra significativa correlazione con la consapevolezza che studiare la matematica sia utile per il proprio futuro (ρ

= 0,372 per il gruppo sperimentale, ρ = 0,243 con quello di controllo con $p <$ 0,05 in tutti e due i casi).

Non si sono rilevate correlazioni, invece, in entrambi i gruppi, tra i precedenti atteggiamenti e la volontà di approfondire a casa argomenti studiati in classe: c'è, tuttavia, una leggera predominanza da parte dei ragazzi del gruppo sperimentale (57%) su quelli di controllo (47%).

Per quanto riguarda gli hobbies e le attività extrascolastiche c'è una certa uniformità sul tempo dedicato alla TV, alla play station così come all'uso del cellulare sempre superiore a quello dedicato per lo sport, per la lettura di un libro. Inoltre, nel gruppo di controllo, c'è una correlazione significativa lineare negativa (ρ = -356, $p <$ 0,05) tra le ore dedicate a giochi multimediali e il tempo dedicato alla lettura. Un'ultima uniformità è stata riscontrata sul tempo dedicato allo studio che è al più di un'ora e mezzo a pomeriggio per più dell'80% degli studenti di ciascun gruppo.

3.5.3 Particolarità del disegno di ricerca: i due trattamenti e i due post-test.

Il disegno di ricerca ideato per questo esperimento presenta alcune specificità che non si ritrovano in altri: inizialmente si farà eseguire a tutte le classi coinvolte un test d'ingresso, che abbiamo chiamato Pre-test, con lo scopo di valutare l'approccio preferito dagli studenti nella risoluzione di problemi geometrici. Come detto, l'ipotesi è che quello preferito sia quello aritmetico. Successivamente, a distanza di pochi giorni, in tutti e due i gruppi si farà eseguire un trattamento: il fatto di eseguirne uno in ciascuno dei due gruppi, costituisce una particolarità del disegno di ricerca. Il trattamento dedicato al gruppo sperimentale sarà diverso da quello dedicato al gruppo di controllo: ad ogni modo, la seconda ipotesi della fase sperimentale è che entrambi i cambiamenti riescano a modificare sensibilmente l'approccio risolutivo di tutti gli studenti. Per verificare tale ipotesi si somministrerà un secondo test, detto Post-test 1 che presenterà sempre quesiti di geometria.

Il disegno ideato presenta, inoltre, una seconda particolarità: è previsto un secondo post-test che sarà somministrato ben 6 mesi dopo il primo. Occorre tenere conto che i due trattamenti che verranno proposti, sebbene tra di loro diversi e dei quali verrà data ampia descrizione più avanti, hanno gli stessi obiettivi didattico disciplinari. Tuttavia, il trattamento A, proposto alle classi sperimentali, è caratterizzato da una modalità tipicamente laboratoriale: gli alunni saranno chiamati a risolvere problemi aperti da affrontare grazie all'ausilio di materiali didattici messi loro a disposizione. Il trattamento B riservato alle classi di controllo, invece, si caratterizzerà sempre per la proposizione ai ragazzi dei medesimi problemi aperti che però dovranno essere affrontati senza l'ausilio di alcun materiale: essi potranno eseguire disegni sui propri quaderni e avvalersi di animazioni realizzate mediante software di geometria dinamica e interattiva proiettate su lavagna multimediale. In conclusione, entrambi gli interventi sono stati pensati per favorire un approccio intuitivo - geometrico per migliorare, conseguentemente, le performance degli studenti nel test somministrati successivamente.

Sensibili differenze tra i risultati dei gruppi sperimentali e di controllo ci si aspetta, invece, che si evidenzino a distanza di tempo. Per questo il secondo post-test è fatto eseguire 6 mesi dopo. I motivi di questa congettura sono legati a quanto detto nel Paragrafo 1.16: sappiamo che la corteccia motoria ha compiti di ordine superiore e di tipo cognitivo perché processi come comprendere, memorizzare, ricordare possono essere legati ad atti motori. Gli studenti sottoposti al trattamento A, avranno la possibilità di manipolare personalmente strumenti didattici appositamente realizzati per le attività in cui sono coinvolti. Grazie ad un naturale processo di maturazione ma soprattutto allo stimolo ed al conseguente sviluppo di un maggior numero di circuiti neuronali coinvolti, si ipotizza che, nel secondo post-test, emerga che le loro nuove competenze abbiano resistito al passare del tempo. Di contro, ci si aspetta che i ragazzi del gruppo di controllo non manifestino i medesimi miglioramenti in tale test se non minimali e attribuibili al solo processo di maturazione.

3.6 Dettagli delle fasi dell'esperimento

L'intero esperimento, come detto nel Paragrafo 3.4, è stato diviso in 6 fasi che, nei prossimi paragrafi, verranno descritte dettagliatamente.

3.6.1 Fase 1: ideazione e realizzazione del primo test detto *Pre-test*; modalità di correzione, punteggi attribuiti

Un test, costituito da una batteria di domande specifiche, è un cosiddetto *strumento di misurazione* ormai utilizzato di prassi a livello nazionale e internazionale ed è necessario per misurare le competenze in possesso o acquisite dagli studenti in seguito ad un processo di apprendimento. Nell'esperimento che si sta descrivendo il test sarà utilizzato per misurare le competenze in tre momenti diversi: all'inizio, ossia al primo incontro con gli studenti, dopo i trattamenti per valutare gli effetti che questi hanno avuto e dopo circa sei mesi dal secondo per constatare se gli effetti del trattamento sono duraturi nel tempo.

L'*oggetto di misurazione* a cui si è interessati in questo contesto è definito dalla preferenza di approccio risolutivo ad un problema di natura geometrica da parte degli studenti. Non esistendo già un test standardizzato utile ai nostri scopi è stato deciso di realizzarlo partendo praticamente da zero basandosi su esperienze pregresse.

Una volta formulati i quesiti finalizzati a valutare l'oggetto di misurazione individuato è stato necessario verificare la coerenza e l'attendibilità del test: pertanto, si è sottoposto dapprima a singoli studenti, in orario pomeridiano e al di fuori dal contesto scolastico per constatare possibili problemi legati alla chiarezza e alla comprensione del testo dei quesiti, alla ragionevolezza delle possibili risposte, al livello di difficoltà di un singolo item in relazione a quello degli altri, al tempo di esecuzione dell'intero test ecc.

Successivamente è stata approntata una griglia di correzione indispensabile per una qualsiasi analisi successiva: l'uso, infatti, dei metodi statistici consentirà di affrontare in modo rigoroso aspetti che sono cruciali per una buona riuscita nel processo di valutazione.

Superata questa prima prova ed effettuate le opportune modifiche, il test è stato somministrato ad un campione di studenti più ampio, in orario curriculare, con dinamiche e tempistiche sicuramente più vicine a quelle che potranno essere utilizzate nella fase sperimentale vera e propria. Tale seconda prova ha consentito di fare altre constatazioni riguardanti la bontà del test e ha permesso, inoltre, di apportare migliorie alla griglia di valutazione.

Fatte tutte le dovute modifiche, la prova sarà pronta per essere somministrata agli studenti dei gruppi coinvolti nell'esperimento.

Si entra ora nel dettaglio dei quesiti (o *item*) che fanno parte del test: le domande saranno sempre poste in modalità discorsiva mentre i dati forniti, se non sono presenti nella domanda stessa, saranno riportati nella figura relativa alla domanda. Quest'ultima sarà sempre presente nelle vicinanze del testo del problema. La risposte che dovranno fornire gli studenti sono, per ogni item, sempre due e in modalità aperta. Infatti, per ogni quesito sono predisposti due spazi: in uno è obbligatorio riportare le motivazioni della risposta (detto *sottoquesito A*), cioè l'argomentazione della strategia risolutiva utilizzata per poter rispondere alla domanda vera e propria. A quest'ultima, detta (*sottoquesito B*), si potrà rispondere, a seconda dei casi, semplicemente con un numero oppure con una frase sintetica.

Ad ogni risposta degli studenti, sia al sottoquesito A che B, è stato assegnato il valore 0 o 1 in base al seguente schema.

	Risposta aritmetica	Risposta intuitiva/geometrica
Sottoquesito A	0	1
	Risposta errata	Riposta corretta
Sottoquesito B	0	1

Tutti gli spazi bianchi, come pure il retro di ogni foglio del fascicolo consegnato, potranno essere utilizzati per disegnare, scrivere appunti, fare calcoli ecc. Si motiverà tutti gli studenti a rispondere sempre ai quesiti.

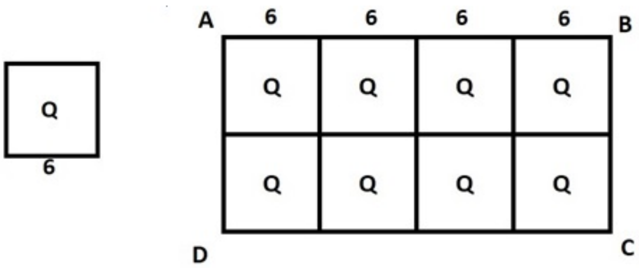
Tutte queste informazioni, unitamente ad altre legate alla simbologia utilizzata nei quesiti e al tempo a disposizione (75 minuti) per completare tutta la prova, saranno comunicate verbalmente a tutti gli studenti prima di cominciare il test e per iscritto mediante apposita scheda lasciata loro a disposizione anche durante la prova. Gli studenti potranno utilizzare la calcolatrice e un qualsiasi formulario ma non potranno comunicare tra di loro.

Qui di seguito è riportato l'elenco dei 20 quesiti cha saranno sottoposti a validazione. Questi sono divisi, secondo le loro caratteristiche generali, in 7 *blocchi*. Di ciascun quesito è riportato il testo, la figura ad esso relativa, nonché le possibili risposte attese: una è intuitiva-geometrica mentre l'altra è aritmetica.

BLOCCO 1. Sono date due figure: una di riferimento, di base, l'altra che ha una superficie multipla di quella di base; la figura multipla può essere ruotata oppure no rispetto a quella base. Il rapporto tra le superfici delle figure è reso evidente dal disegno stesso. I problemi di questo bloccco sono di tre tipi.

tipo 1: sono date due figure di cui una multipla di un'altra entrambe rappresentate orizzontalmente.

QUESITO 1. *Quante volte l'area del rettangolo* ABCD *è più grande di quella del quadrato* Q?



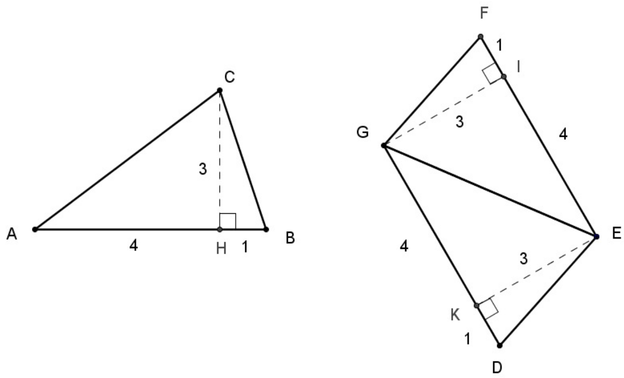
Risposte corrette attese.

Intuitiva-geometrica: il rettangolo ABCD è costituito da 8 quadrati Q e quindi la sua area è otto volte quella di Q.

Aritmetica: si calcola l'area di Q, si calcola l'area di ABCD, poi si calcola il loro rapporto dividendo il valore delle due aree trovate.

tipo 2: Figura multipla ruotata di 90° rispetto a quella base. Si congettura che la rotazione a 90° della seconda figura rispetto alla prima possa ostacolare la risposta di tipo intuitiva-geometrica.

QUESITO 2. *Quante volte l'area del parallelogramma* EFGD *è più grande dell'area del triangolo* ABC?



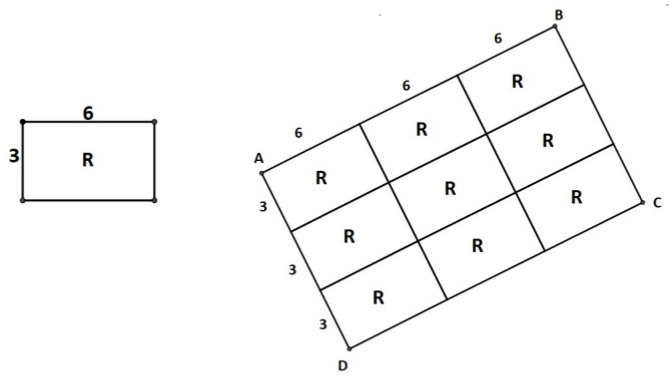
Risposte corrette attese.

Intuitiva-geometrica: EFGD è costituito di 2 triangoli ABC pertanto la sua area doppia di quella di ABC, oppure è due volte di quella di ABC.

Aritmetica: si calcolano esplicitamente le aree del triangolo ABC e del quadrilatero EFGD, quindi si calcola il loro rapporto.

tipo 3: Figura multipla di quella base ruotata di un angolo minore di 45°. Si congettura che una rotazione di tale entità della seconda figura alla prima possa in parte ostacolare la percezione delle figure tanto da non inibire più di tanto una risposta di tipo intuitiva-geometrico.

QUESITO 3. *Quante volte l'area del rettangolo* ABCD *è maggiore dell'area del rettangolo* R?



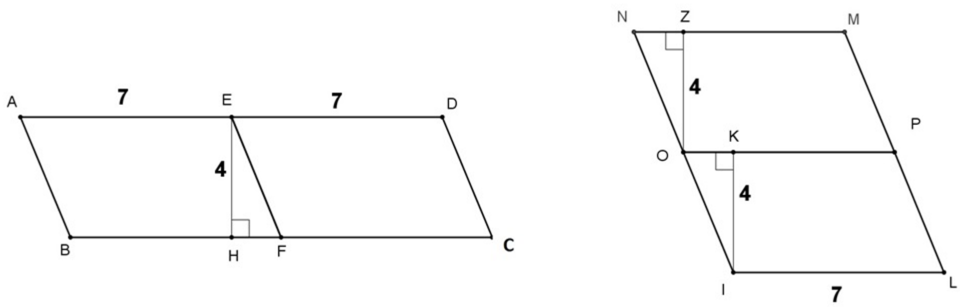
Risposte corrette attese.

Intuitiva-geometrica: ABCD è costituito da 9 rettangoli R pertanto la sua area è nove volte maggiore o più grande di R.

Aritmetica: si calcola l'area di ABCD e di R. Poi si determina il loro rapporto.

BLOCCO 2. Sono date figure equicomposte da un ugual numero di poligoni uguali tra di loro. Le figure si trasformano una nell'altra attraverso traslazioni di figure uguali. I quesiti di questo Blocco sono correlati a quelli del Blocco 6 sempre riguardanti le figure equicomposte ma che si diversificano le une dalle altre per altre tipologie di movimenti rigidi di figure uguali.

QUESITO 4. *Perché il parallelogramma* ABCD *ha la stessa area del parallelogramma* ILMN?

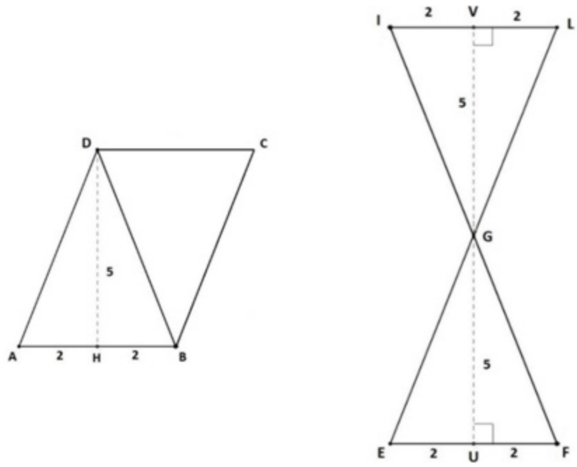


Risposte corrette attese.

Intuitiva-geometrica: perché entrambi sono costituiti dallo stesso numero di poligoni uguali, cioè sono equicomposti .

Aritmetica: Si calcola l'area di un parallelogramma di base e si moltiplica per 2; oppure, si calcola dell'area di un parallelogramma completo e si considera l'area del secondo uguale in quanto equivalenti oppure si calcolano entrambe: AD = 14, A(ABCD) = 14·4, NM = 7, IK+OZ = 8, A(EFGH) = 7·8.

QUESITO 5. *Perché il parallelogramma* ABCD *ha la stessa area del poligono intrecciato* EFIL?



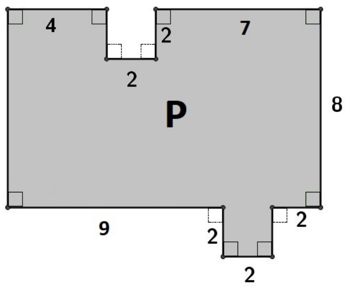
Risposte corrette attese.

Intuitiva-geometrica: perché entrambi sono costituiti dallo stesso numero di poligoni uguali, cioè sono equicomposti .

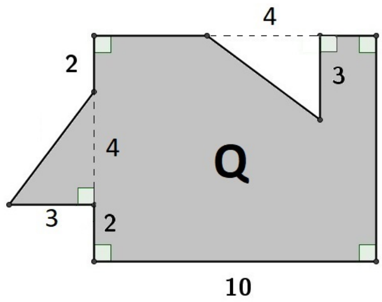
Aritmetica: si calcola l'area del parallelogramma ABCD e si deduce quella di EFIL perchè equivalenti. Oppure, si determina l'area di un singolo triangolo per poi moltiplicarla per due: 4·5.

BLOCCO 3. Poligoni o figure con «disordini di struttura» ossia con parti «eccedenti» uguali a parti «mancanti». Il nostro sistema visivo (lobo occipito - temporale) ci permette di percepire comunque quale sia il poligono o la figura nota che è stata "alterata" dalla presenza delle eccedenze e delle lacune. Ciò dipende da quanto la figura «alterata» si discosti da una figura riconoscibile e nota. Inoltre, la percezione dell'uguaglianza tra eccedenze e lacune motiverà a immaginare le opportune traslazioni che spostino la parte eccedente proprio là dove ci sia una lacuna uguale.

QUESITO 6. *Calcola l'area del poligono di color grigio* **P** *in figura.*



QUESITO 7. *Calcola l'area del poligono di color grigio* **Q** *in figura.*



Risposte corrette attese.

Intuitiva-geometrica: si calcola l'area del rettangolo che si ottiene spostando l'eccedenza là dove c'è la lacuna della stessa forma.

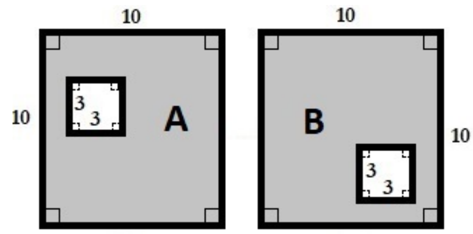
Aritmetica: calcolo dell'area delle parti eccedenti e di quelle mancanti. Queste verranno rispettivamente sottratte e sommate all'area del rettangolo completo. L'area di Q può anche essere determinata scomponendolo in poligoni noti.

BLOCCO 4

Si sollecita un confronto tra superfici uguali, distinte o che s'intersecano, alle quali viene sottratta la medesima superficie.

Tipo 1 Si presentano due figure che non s'intersecano: queste sono uguali e con le medesime lacune collocate in posizioni diverse. Tali lacune possono trovarsi internamente alla figura oppure sul suo bordo.

QUESITO 8. *Calcola l'area della superficie colorata* **A**. *Calcola anche quella di* **B**.

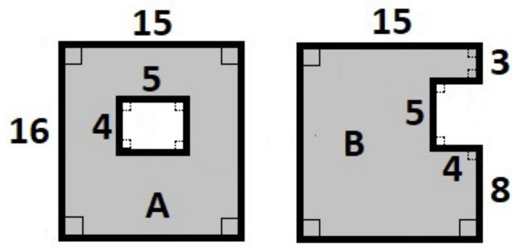


Risposte corrette attese.

Intuitiva-geometrica: si determina l'area di A togliendo all'area del quadrato maggiore di lato 10 l'area di quello minore di lato 3. Non si riesegue il calcolo per la superficie B perché si riconosce essere equivalente.

Aritmetica: I conti per determinare l'area della superficie A vengono ripetuti per determinare quella di B.

QUESITO 9. *Perché la superficie di color grigio* **A** *ha la stessa area della superficie di color grigio* **B**?

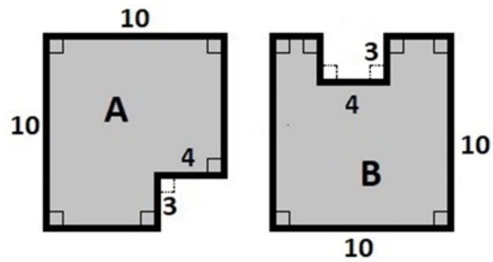


Risposte corrette attese.

Intuitiva geometrica: A due superfici aventi stessa area sono tolte 2 superfici aventi stessa area (Nozione Comune 3); le rimanenti avranno la stessa area.

Aritmetica: Si determinano, in uno o in entrambi i casi, le aree delle superfici totali come se fossero intere; a queste, si sottraggono quelle delle lacune.

QUESITO 10. *Calcola l'area della superficie colorata* **A**. *Calcola anche quella di* **B**.



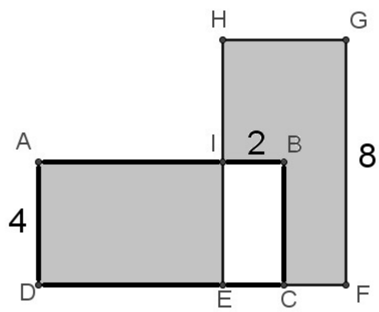
Risposte corrette attese.

Intuitiva-geometrica: si determina l'area di A togliendo all'area del quadrato di lato 10 l'area del rettangolo di lati 4 e 3. Non si riesegue il calcolo per la superficie B perché si riconosce essere equivalente.

Aritmetica: Si determinano, in entrambi i casi, le aree delle superfici totali come se fossero intere alle quali si sottraggono quelle delle lacune.

Tipo 2 Si hanno due figure uguali che s'intersecano: si chiede di determinare la superfcie dei poligoni dati dalla differenza di quelli iniziali con la parte in comune.

QUESITO12. *I due rettangoli* **ABCD** *e* **EFGH** *sono uguali: perché i due poligoni colorati* **ADEI** *e* **CFGHIB** *hanno la stessa area?*



Risposte corrette attese.

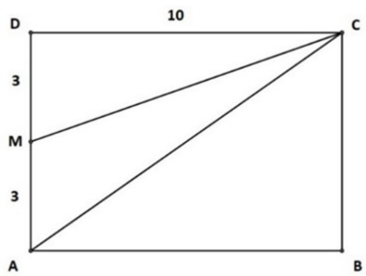
Intuitiva-geometrica: alle due superfici uguali, ABCD e EFGH, si sottrae la medesima superficie BCEI per ottenere due superfici non uguali ma equivalenti. Oppure, si riconosce che la parte in comune è $\frac{1}{4}$ dei rettangoli di partenza. Pertanto, le due rimanenti debbono essere $\frac{3}{4}$ delle superfici iniziali.

Aritmetica: Si determina l'area della superficie in comune e la si sottrae all'area di uno dei due rettangoli di partenza.

BLOCCO 5. Riconoscimento del rapporto esistente tra le aree di due superfici reso evidente dalla figura; quest'ultime possono essere una contenuta nell'altra o appartenere a superfici distinte oppure essere diverse e distinte.

Tipo 1 Riconoscimento del rapporto esistente tra le aree di due superfici una contenuta nell'altra.

QUESITO 13. *Perché l'area del rettangolo* **ABCD** *è quattro volte più grande dell'area del triangolo* **ACM**?



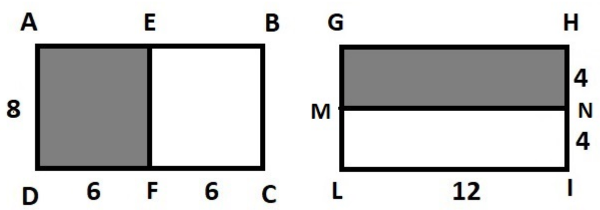
Risposte corrette attese.

Intuitiva-geometrica: il triangolo ha la stessa altezza del rettangolo mentre la base è la metà. Dunque, la sua superficie è $\frac{1}{4}$ di quella del rettangolo. Oppure, essendo AC la diagonale del rettangolo ABCD ed M il punto medio di AD, ACM è $\frac{1}{2}$ della metà del rettangolo e quindi $\frac{1}{4}$ del rettangolo totale.

Aritmetica: con i dati a disposizione si calcolano esplicitamente le aree del rettangolo e del triangolo per poi determinarne il rapporto. Oppure si calcola l'area del rettangolo quella dei due triangoli rettangoli complementari ad ACM per poi fare la differenza di superfici.

Tipo 2 Determinazione del rapporto esistente tra le aree di due superfici appartenenti a superfici distinte.

QUESITO 14. *I due rettangoli* ABCD *e* GHIL *sono uguali. Perché i due rettangoli di color grigio* AEFD *e* GHNM *hanno la stessa area*?



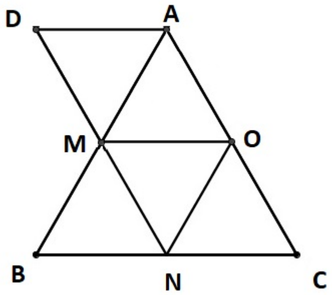
Risposte corrette attese.

Intuitiva geometrica: I rettangoli colorati sono metà di rettangoli uguali e quindi equivalenti tra di loro (Nozione Comune 6).

Aritmetica: con i dati a disposizione si calcolano esplicitamente le aree dei rettangoli colorati per dedurre la loro equivalenza.

Tipo 3 Superfici diverse che hanno una parte riconoscibile in comune. Il rapporto di superfici è reso evidente dalla figura.

QUESITO 11.[1] *Tutti i triangoli presenti in figura sono equilateri e* A(ABC) = 16. *Determina l'area del parallelogramma* ADMO.



Risposte corrette attese.

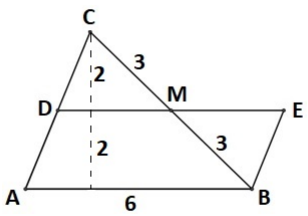
Intuitiva geometrica: ADMO ha superficie che è la metà di ABC; quindi anche la misura della sua area lo sarà.

Aritmetica: si divide il valore dell'area data di ABC in 4 per poi rimoltiplicarla per due.

BLOCCO 6 Riconoscere l'equivalenza di due figure per equicomposizione. Differentemente dai quesiti del Blocco 2, le figure da confrontare hanno una parte in comune e, quelle non in comune, sono ottenute da un movimento rigido (tranne traslazioni) le une rispetto alle altre.

Tipo 1 Figure che si trasformano una nell'altra per simmetria centrale di una parte di esse.

QUESITO 15. *Perché il triangolo* ABC *ha la stessa area del parallelogramma* ABED?



[1] Tale quesito era stato inizialmente inserito in un altro blocco. Questo spiega perché è contraddistinto da un numero che non è consecutivo al precedente.

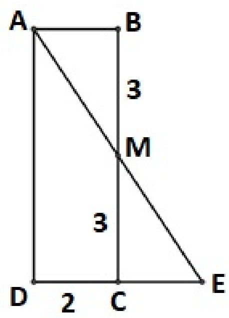
Risposte corrette attese.

Intuitiva geometrica: DCM e MEB sono uguali e quindi, sommati rispettivamente al trapezio ABMD, spiegano l'equivalenza tra ABC e ABED. In breve, ABC e ABED sono equicomposti.

Aritmetica: essendo fornite tutte le misure si possono eseguire tutti i calcoli necessari per determinare le due superfici deducendone l'equivalenza.

QUESITO 16.

Perché il rettangolo ABCD *è equivalente al triangolo* AED?



Risposte corrette attese.

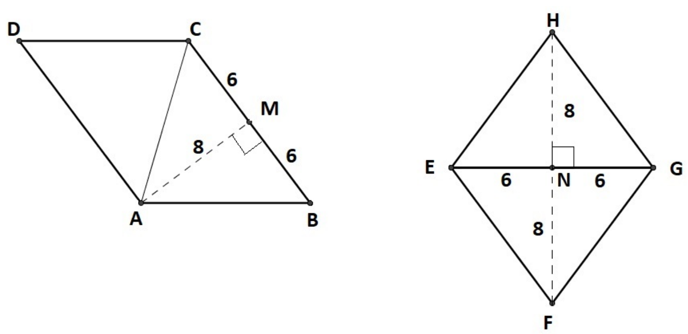
Intuitiva geometrica: ABM e CME sono uguali e quindi, sommati rispettivamente al trapezio AMCD, spiegano l'equivalenza tra ABCD e AED. In breve, ABCD e AED sono equicomposti.

Aritmetica: essendo fornite tutte le misure si possono eseguire i calcoli necessari per determinare le due superfici.

Tipo 2 Si hanno due figure equicomposte: i poligoni uguali che formano le due figure si ottengono gli uni dagli altri mediante movimenti rigidi. Andrebbe verificato che i seguenti quesiti correlino con quelli relativi al Blocco 2. Nel caso in cui che i problemi di quest'ultimo tipo abbiano risultati più negativi (risposte errate o per lo più aritmetiche) di quelli del Blocco 2 significa che le simmetrie e le rotazioni dei poligoni uguali ostacolano il riconoscimento delle uguaglianze.

QUESITO 17.

Perché il parallelogramma ABCD *ha la stessa area del rombo* EFGH?



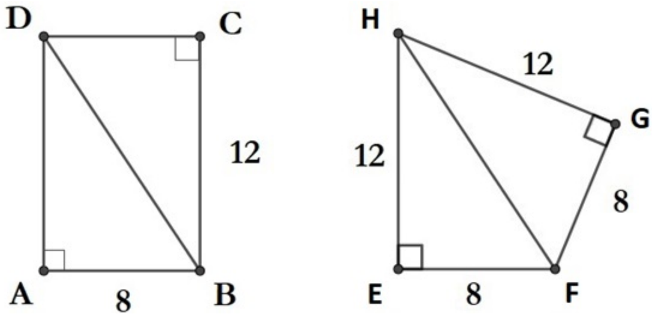
Risposte corrette attese.

Intuitiva geometrica: i due poligoni sono equicomposti.

Aritmetica: si calcola l'area di un singolo triangolo per ottenere le aree dei due poligoni. Oppure si calcolano direttamente le aree di ABCD e EFGH avendo tutti i dati disponibili.

QUESITO 18.

Perché il rettangolo ABCD *ha la stessa area del quadrilatero* EFGH?



Risposte corrette attese.

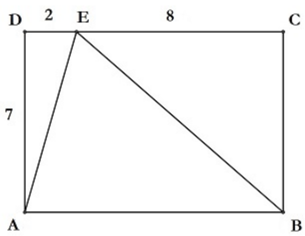
Intuitiva geometrica: i due poligoni sono equicomposti.

Aritmetica: si calcola l'area di un singolo triangolo per poi dedurre anche quella dei due quadrilateri.

BLOCCO 7. Riconoscimento del rapporto tra le aree di due poligoni posizionati uno interno all'altro.

QUESITO 19.

ABCD *è un rettangolo di area 70. Determina l'area del triangolo* ABE.



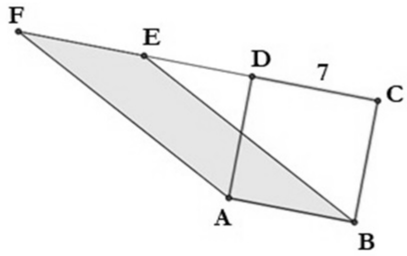
Risposte corrette attese.

Intuitiva geometrica: il triangolo ABE, avendo stessa base e stessa altezza del rettangolo ABCD, ha area metà. Oppure, il triangolo ABE ha la stessa area della somma dei triangoli AED e BCE (si vede tracciando l'altezza EH).

Aritmetica: si calcola l'area del triangolo ABE. Oppure si calcolano le aree dei singoli triangoli interni al rettangolo per poi sottrarle a quella del rettangolo stesso.

QUESITO 20.

ABCE *è un quadrato. Calcola l'area del parallelogramma* ABEF.



Risposte corrette attese.

Intuitiva geometrica: i due quadrilateri, ABCD e ABEF hanno stessa base e stessa altezza. Quindi l'area di ABEF è uguale a quella di ABCD.

Aritmetica: si calcola l'area di ABEF dopo aver calcolato quella del quadrato.

In ogni classe, sia sperimentale che di controllo, gli alunni sono stati divisi casualmente in 4 gruppi, detti A, B, C e D. A ciascun gruppo è stato assegnato un diverso ordine di somministrazione dei quesiti secondo lo schema riportato nella tabella della Figura 3.4. Questa suddivisione è necessaria per studiare possibili correlazioni tra i diversi blocchi di cui i quesiti fanno parte ma anche per valutare se tra queste ce ne sia una migliore delle altre. Fanno eccezione i quesiti 19 e 20 del Blocco 7 che, non avendo nessuna relazione con gli altri, sono stati collocati sempre nella medesima posizione in tutti i test. Naturalmente, salvo controindicazioni, ogni studente manterrà il suo gruppo di appartenenza per tutti e tre i test eseguiti durante l'esperimento.

	Argomento	Blocco
GRUPPO A	Rapporti	1
		5
	Equivalenza	2
		6
	Calcolo area	3
		4

	Argomento	Blocco
GRUPPO B	Rapporti	1
		5
	Equivalenza	6
		2
	Calcolo area	3
		4

	Argomento	Blocco
GRUPPO C	Equivalenza	2
		6
	Rapporti	1
		5
	Calcolo area	3
		4

	Argomento	Blocco
GRUPPO D	Equivalenza	6
		2
	Rapporti	1
		5
	Calcolo area	3
		4

Figura 3.4: La somministrazione dei quesiti nei 4 gruppi in cui sono stati divisi gli alunni di ogni classe

3.6.2 Fase 2: validazione del test

Come detto, un test una volta ideato, deve essere validato sottoponendolo ad un gruppo campione di studenti diverso da quello che sarà coinvolto nell'esperimento vero e proprio. Per tale scopo, sono state coinvolte 4 classi di II media, per un totale di 74 studenti, di uno stesso istituto comprensivo. La scelta di tale scuola è stata, naturalmente, del tutto arbitraria. Il tempo per svolgere il test preparato è stato stabilito, come detto, in 75 minuti: se al termine di questo periodo di tempo nessuno ha consegnato verrà posticipato il tempo di consegna. Questa fase, infatti, serve anche a stabilire un adeguato tempo di svolgimento dell'intero test. Prima di dare inizio ai lavori saranno lette le istruzioni per la compilazione e per la corretta interpretazione dei quesiti. Gli studenti potranno utilizzare la calcolatrice e un qualsiasi formulario ma non potranno comunicare tra di loro. Potranno invece fare richieste di chiarimento ai docenti assistenti. Non potranno uscire dalla classe prima di aver consegnato.

Da ultimo, si specifica che il test sarà assolutamente anonimo: ogni studente sarà riconosciuto mediante un codice dato da lettere che identificano la scuola, la sezione della classe e da un numero uguale a quello posseduto nell'elenco scolastico: quindi, per esempio, lo studente GFB4, appartiene alla scuola GF, appartiene alla sezione B e il suo numero d'ordine è il 4.

Somministrato il test, si è passato alla trascrizione dei risultati su un apposito foglio da lavoro di Excel. Nelle righe sono stati inseriti i codici relativi agli studenti divisi per classe dividendo quelle del gruppo sperimentale da quelle di controllo. Sulle colonne il numero del quesito, distinguendo le risposte dei sottoquesiti A e B. Nella Figura 3.5 viene riportato un estratto di tale foglio.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
Allievo	**1A**	**1B**	**2A**	**2B**	**3A**	**3B**	**4A**	**4B**	**5A**	**5B**	**6A**	**6B**	**7A**	**7B**	**8A**	**8B**	**9A**
GFB15	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
GFB16	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
GFB17	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
GFB18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
GFB19	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
GFB21	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
GFB22	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
GFC1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
GFC2	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
GFC3	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
GFC4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
GFC5	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
GFC6	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
GFC7	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 3.5

Analisi descrittiva Seguendo la traccia riportata in [19] per fornire un'analisi sintetica dei dati ottenuti e rilevare eventuali inadeguatezze dello strumento di misurazione ideato, si riportano nella Tabella 3.1 alcune informazioni generali consistenti nel punteggio grezzo dato dalla somma delle risposte corrette attribuito ad ogni studente distinguendo i Sottoquesiti A dai B. E' stata calcolata la media aritmetica delle risposte e la mediana che sono circa uguali. I punteggi acquisiti dagli studenti hanno una discreta variabilità rappresentata dalla deviazione standard. Nella Figura 3.6 sono raffigurati i diagrammi a barre dei punteggi conseguiti: sull'asse delle ascisse sono riportati il numero dei sottoquesiti che hanno conseguito il punteggio 1 (quindi il massimo è 20), mentre, su quello delle ordinate, il numero di studenti che ha conseguito un determinato punteggio. Come si può facilmente constatare la distribuzione dei punteggi è piuttosto simmetrica: ciò significa che non si evidenzia una preferenza per un approccio in particolare e, al tempo stesso, il test non è risultato essere nè troppo facile nè troppo difficile.

Analisi di affidabilità. Tale analisi viene effettuata per verificare il grado di affidabilità e di coerenza degli item all'interno del test. Per ogni sottoquesito, sia di tipo A che B, è stato determinato l'*indice di difficoltà* dato dal rapporto tra

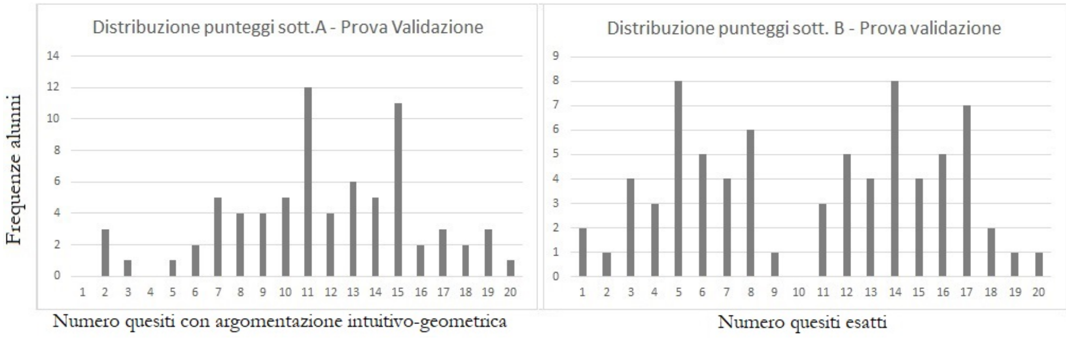


Figura 3.6: Distribuzione dei punteggi ottenuti nella prova di validazione divisi per sottoquesiti

Tabella 3.1: Statistiche descrittive sul punteggio Sottoquesiti A e B

Statistiche descrittive sul punteggio Sottoquesiti A	
N. alunni	74
Punteggio medio	11,73
Mediana	11,5
Deviazione standard	4,14
Statistiche descrittive sul punteggio Sottoquesiti B	
N. alunni	74
Punteggio medio	10,46
Mediana	11,5
Deviazione standard	5,17

il numero di coloro che hanno conseguito il valore 0 al sottoquesito ed il numero totale degli studenti. Occorre controllare che non ci siano troppi sottoquesiti con indice di difficoltà inferiore a 0,2 o superiore a 0,8: qualora capiti una o entrambe le situazioni si possono sostituire i quesiti coinvolti o quanto meno effettuare delle variazioni prima di utilizzarli nella fase sperimentale. Ad esempio: per il Quesito 5 la maggioranza degli studenti ha preferito giungere alla soluzione utilizzando un approccio intuitivo-geometrico (indice di difficoltà pari a 0,12). Invece, per i quesiti 11 e 19, si è riscontrato che la maggior parte degli studenti ha optato per un approccio aritmetico (indice pari a 0,82 e 0,85 rispettivamente). La situazione generale, dunque, si presenta dal punto di vista degli approcci piuttosto bilanciata anche nei casi estremi.

Per i quesiti 1, 2 e 3 si sono rilevati valori dell'indice di difficoltà, questa volta relativamente alle risposte, piuttosto bassi (0,20, 0,11, 0,15 rispettivamente); mentre per i quesiti 13 e 15 i valori dell'indice sono stati piuttosto alti (0,76, 0,70). In generale, dunque, anche per i sottoquesiti B, la situazione, rispetto alla difficoltà dei quesiti, si presenta abbastanza bilanciata anche nei casi estremi.

Mediante il foglio Excel si è calcolato, sempre per ogni sottoquesito di tipo A e B, il *coefficiente di correlazione punto biseriale*: questo è un valore molto importante perché misura la correlazione tra le risposte date da un gruppo di soggetti ad una specifica domanda ed il punteggio ottenuto dagli stessi soggetti al resto del test. Pertanto, in breve, tale coefficiente fornisce una misura del grado di coerenza di ciascun item rispetto al test considerato nel suo insieme. Anche per tale coefficiente sussiste un valore convenzionale, che è 0,3, al di sotto del quale si ritiene l'item avente un basso grado di coerenza con il resto del test. Relativamente al sottoquesito A del Quesito 9 si è ottenuto un coefficiente biseriale 0,19. Si è deciso, comunque, di lasciare il quesito all'interno del fascicolo anche per la fase sperimentale ma variandone il testo sostituendo il termine «equivalente» che sappiamo essere spesso confuso dagli studenti con il significato di congruente e di uguale. Addirittura, per il Quesito 19A, il coefficiente biseriale calcolato è stato 0: anche in questo caso il quesito è stato lasciato per le fasi successive ma indicando tra i dati esplicitamente il valore dell'area del rettangolo dato per dare, in modo più diretto, la possibilità agli studenti di evitare la strada del calcolo.

Da ultimo è stato calcolato il coefficiente *alfa di Cronbach* (α) che fornisce una misura dell'affidabilità del test (considerando il test nella sua totalità). Convenzionalmente, si ritengono accettabili test con un valore di α superiore 0,70. Nel test preparato in questo contesto si è ottenuto α = 0,89 segno di un'affidabilità del test molto alta.

3.6.3 Fase 3: somministrazione del Pre - test nelle classi coinvolte nell'esperimento

Dopo la validazione, il test è stato somministrato nelle 4 classi coinvolte nell'esperimento nelle modalità riportate nel Paragrafo 3.5: in totale, al momento della somministrazione del Pre-test erano presenti 86 studenti. Le modalità di somministrazione sono state identiche a quelle nella fase della validazione del test (vedere il Paragrafo 3.6.1). Non si sono mai fatte osservazioni, insiemi agli studenti, sulle risposte date ai quesiti durante tutto il periodo dell'esperimento.

Il Pre-test è stato somministrato con meno quesiti rispetto al test di validazione soprattutto per motivi legati alle analisi di affidabilità condotte ed anche per esigenze organizzative: la prova, infatti, per come è stata ideata aveva bisogno complessivamente di 75 minuti per essere completata e pertanto si creavano problemi per i cambi dell'ora. Si è convenuto, dunque, eliminare nell'ordine i seguenti quesiti:

- 1, che presentava meno criticità rispetto ai quesiti 2 e 3 dello stesso blocco;
- 5, perché, come detto, ha fatto rilevare un indice di difficoltà piuttosto basso nella scelta dell'approccio;
- 10, che presentava meno criticità rispetto ai quesiti 8 e 9 dello stesso blocco;
- 13, perché presentava un indice di difficoltà superiore rispetto all'altro quesito dello stesso blocco.

Tuttavia, avendo ottenuto, anche per quest'ultima prova con meno quesiti α = 0,89, il test è rimasto quindi affidabile. Per esigenze, invece, di ordine pratico la numerazione dei restanti quesiti non è stata alterata. Lo studio sui dati ottenuti dalla somministrazione del Pre-test è riportato più avanti e, precisamente nel Paragrafo

3.7 e nel Paragrafo 3.8, per facilitare il confronto con quelli ottenuti negli altri test. Qui di seguito, vengono riportate solamente le frequenze dei punteggi conseguiti dai due gruppi separati per sottoquesiti A e B. In particolare, nel grafico della Figura 3.7, come fatto nei grafici relativi allla prova di validazione, sull'asse delle ascisse sono riportati il numero dei sottoquesiti che hanno conseguito il punteggio 1 (il massimo è sempre 20), mentre, su quello delle ordinate, il numero di studenti che ha conseguito un determinato punteggio. Così è stato fatto nel grafico della Figura 3.8. Si noterà, come era facile aspettarsi, che i due gruppi non presentano sostanziali differenze nelle risposte date. Dal grafico della Figura 3.7 si evince che la maggior parte degli studenti ha ottenuto punteggi piuttosto bassi evidenziando una maggiore preferenza per l'approccio aritmetico. Invece, dal grafico riportato nella Figura 3.8, si ricava quanti errori siano stati commessi nella risoluzione dei quesiti.

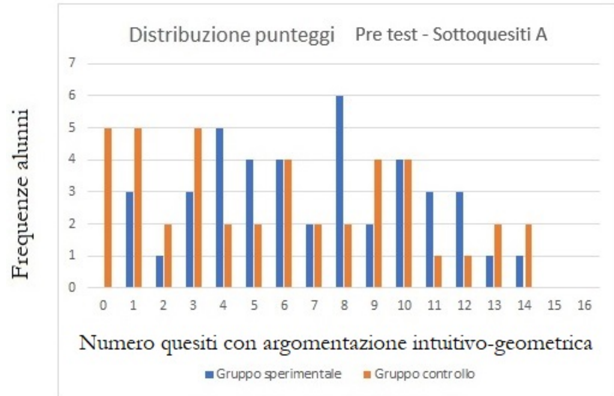


Figura 3.7: Distribuzione dei punteggi del Pre-test nei Sottoquesiti A

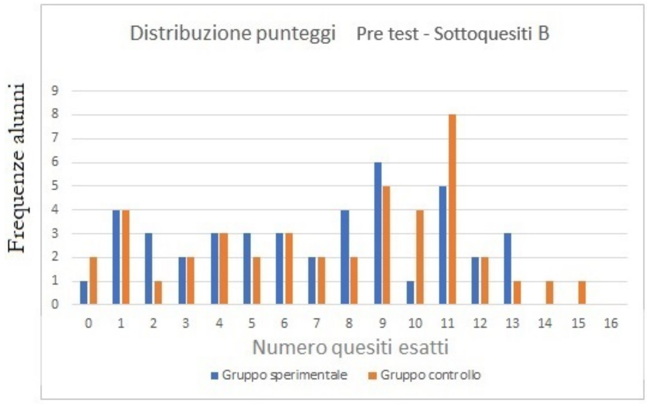


Figura 3.8: Distribuzione dei punteggi del Pre-test nei Sottoquesiti B

3.6.4 Fase 4: i trattamenti nelle classi. Considerazioni generali

Al termine della correzione si è avuto un quadro abbastanza chiaro sulle carenze di percezione geometrica manifestate dagli studenti. Quindi sono state scelte, tra quelle inizialmente ideate, una serie di attività da far svolgere nelle classi per incidere e colmare queste lacune. Non è mai stato fatto cenno, nè agli insegnanti curriculari nè tantomeno agli studenti, delle correlazioni esistenti tra le attività che sono state fatte eseguire e i quesiti svolti nel Pre - test.

Gli interventi nelle classi, per varie problematiche, sono stati ridotti ad un numero minimo. Pertanto sono stati effettuati 3 incontri da 2 ore ciascuno con cadenza settimanale a partire dalla settimana successiva a quella nella quale è stato somministrato il Pre-test. Gli alunni hanno avuto la possibilità di esercitarsi solo ed esclusivamente durante queste attività. Ai docenti curriculari è stato espressamente richiesto di non fare altri interventi mirati durante il resto delle lezioni. Pertanto, qui di seguito, verranno descritte tutte le attività che hanno impegnato gli studenti durante i trattamenti. Queste sono state in totale 6 sia per le classi sperimentali che di controllo e cioè 2 per ogni incontro.

Purtroppo, alcuni alunni hanno saltato uno dei 3 incontri (per fortuna, nessuno ne ha saltato più di 1) perché assenti nell'intera giornata scolastica. Non è stato possibile far recuperare a questi ragazzi le attività perdute.

3.6.5 Fase 4: i trattamenti nelle classi sperimentali

Come detto, le classi sperimentali sono CE e RF di due istituti comprensivi diversi. Le attività preparate per queste classi sono state tutte di natura laboratoriale: queste erano caratterizzate dalla formulazione di problemi aperti. Gli studenti sono stati divisi in gruppi da 2 massimo 3 alunni. A ciascun gruppo veniva fornito un materiale didattico apposito che doveva favorire la risposta al problema posto. Ogni studente doveva riportare sul proprio quaderno, generalmente al termine dei singoli passi delle attività, il problema posto, i disegni delle figure realizzate con i materiali, le argomentazioni fornite, le conclusioni raggiunte, gli esercizi relativi fatti svolgere.

Vengono qui di seguito descritte tutte le attività, gli obiettivi generali e disciplinari che si vogliono perseguire. Sono riportati, in dettaglio, tutti i problemi aperti posti, i singoli quesiti, i materiali utilizzati, le strategie adottate dai ragazzi, le conclusioni raggiunte. Inoltre, è stato specificato su quali quesiti del Pre-test tali attività dovrebbero influire.

Obiettivi generali

- Percezione delle figure geometriche;
- Sviluppo capacità sensoriali.

Attività 1. *Equivalenza tra superfici diverse ottenute per differenza di superfici uguali.*

Obiettivi disciplinari

- Uguaglianza tra superfici;
- Equivalenza tra superfici;
- Distinzione tra il significato di uguaglianza e di equivalenza tra superfici.

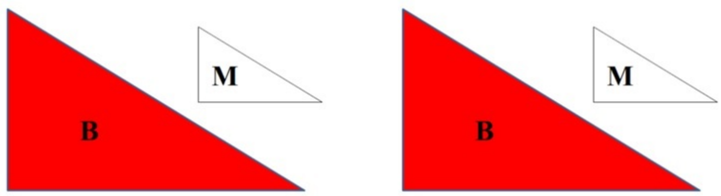
Passo 1 Molte richieste di verifica di equivalenza vengono risolte dagli studenti con la frase: «perché le figure sono uguali» pur non essendolo evidentemente. Tale risposta può dipendere da due motivi: può accadere che lo studente si stia riferendo alle aree delle due superfici, anche se, avrebbe dovuto scrivere: «perché le figure hanno area uguale.» Oppure perché ha confuso il significato del termine «uguale» con quello di «equivalente». In ognuno dei due casi l'area, per questi ragazzi, prima di essere un'estensione superficiale, cioè una proprietà prettamente geometrica delle figure, è un numero da trovarsi mediante una formula. Questa interpretazione va corretta assolutamente.

Per riflettere accuratamente sulla diversità di significato dei termini «uguale» e «equivalenti» e, al tempo stesso, per riprendere un argomento che seppur richiesto nei prerequisiti riportati nel Paragrafo 3.3 non sembra essere in possesso della maggior parte degli studenti, si fa approfondire la Nozione Comune 3 del primo libro degli Elementi di Euclide. Questa recita:

Nozione Comune 3. *Se a cose uguali si sottraggono cose uguali, le rimanenti sono uguali.*

Si è verificato che quando ai ragazzi si chiede se due superfici sono uguali essi tenteranno di sovrapporle per constatare se i loro vertici coincidono, così i loro lati e gli angoli. Se si chiede, successivamente, se tali superifici occupino anche la stessa superficie la risposta non tarderà e sarà sicuramente affermativa.

Passo 2 Si consegnano ai ragazzi due figure mobili (due triangoli bianchi detti **M** in figura) che possano muoversi all'interno delle rispettive cornici (quella rossa **B**, avente stessa forma) o basi.



La necessità di consegnare due copie delle stesse figure nasce dal fatto che, in questo modo, gli studenti hanno costantemente davanti agli occhi gli oggetti da confrontare e non debbono fare alcuno sforzo di recupero in memoria di figure viste in precedenza o non più visibili da un certo momento in poi. Questo tipo di esercizio, invece, si farà fare successivamente.

Innanzi tutto, si è fatto evidenziare ai ragazzi le proprietà generali di **B** ed **M**: sostanzialmente che hanno lati diversi, ma stessi angoli (cioè sono simili). Quindi si è chiesto, muovendo **M** in **B**, di fare osservazioni sulla superficie rossa «rimanente» **B** - **M** (Figura 3.9).

Problema 7. *In che posizioni di **M** all'interno della rispettiva **B**, le due superfici differenza **B** – **M** sono proprio uguali?*

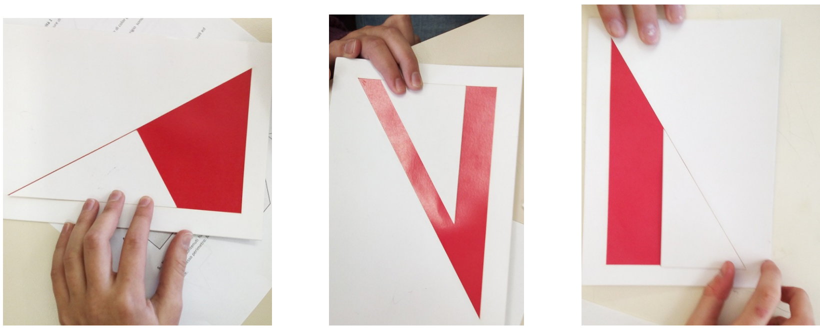
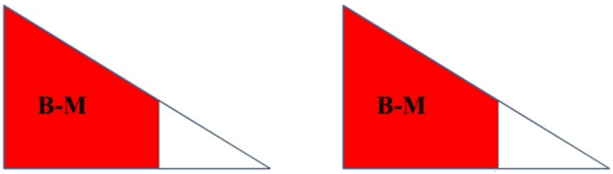
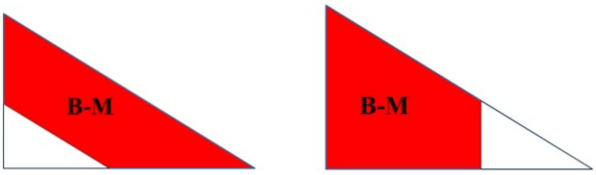


Figura 3.9: I movimenti della figura mobile **M** all'interno della base **B** realizzati dalla classe sperimentale CE il 15 marzo 2019.



I ragazzi quindi sono stati invitati a manipolare la figura **M** dentro la figura **B**. Era evidente che la risposta corretta alla domanda si otteneva quando le due superfici mobili erano collocate nella stessa posizione relativa all'interno della base.

Tuttavia, era evidente che, nella maggior parte dei casi, le due superfici **B** – **M** erano diverse, anche se, sempre equivalenti in quanto occupanti il medesimo spazio.



Quindi, una prima conclusione a cui si è giunti, è che se a due superfici uguali si tolgono due superfici uguali (propriamente contenute nelle prime) le rimanenti non è vero che sono sempre uguali mentre è vero che sono sempre equivalenti. Mediante questo lavoro si verificherà se la confusione tra gli studenti tra il termine di uguaglianza e di equivalenza sia scomparso o quanto meno sia meno diffusa.

Passo 3 .

Successivamente, si è fatto lavorare i ragazzi con una sola base e un solo triangolo che poteva muoversi solo all'interno di essa. Posto **M** in una certa posizione all'interno di **B**, risulta visibile, ovviamente, la superficie differenza, **B** – **M**. Spostando il triangolo **M** in un altra posizione, sempre all'interno di **B**, si vedrà la nuova superficie **B** – **M** ma non si avrà più la possibilità di vedere la precedente che pertanto dovrà essere mantenuta in memoria. Questo lavoro di memorizzazione potrebbe costituire una difficoltà in più. Ma grazie anche all'aiuto dato dalla precedente attività, i ragazzi arrivano a concludere che tutte le superfici del tipo **B** – **M** non sono mai uguali tra di loro ma sempre equivalenti.

Un passaggio successivo è stato far rendere conto i ragazzi che queste prime conclusioni non dipendono dai materiali consegnati. Pertanto, si sarebbero potuti porre problemi del tutto simili utilizzando materiali di forma diversa.

Al termine di ogni singolo passo dell'attività appena descritta, al fine di verificare il raggiungmento degli apprendimenti, i ragazzi hanno eseguito esercizi di verifica. L'elenco degli esercizi proposti si trova in Appendice A.

La totalità delle attività descritte in questo paragrafo sono state pensate con l'intento di favorire un approccio intuitivo-geometrico e quindi d'incrementare il numero delle risposte esatte relativamente ai quesiti 8, 9 e, anche se in maniera meno diretta, al quesito 14.

Attività 2. *Equivalenza tra superfici diverse ottenute per differenza di superfici uguali mediante una quadratura in moto.*

Obiettivi disciplinari

- Uguaglianza tra superfici;
- Equivalenza tra superfici ottenuta mediante la tecnica della quadratura in moto;
- Distinzione tra il significato di uguaglianza e di equivalenza tra superfici.

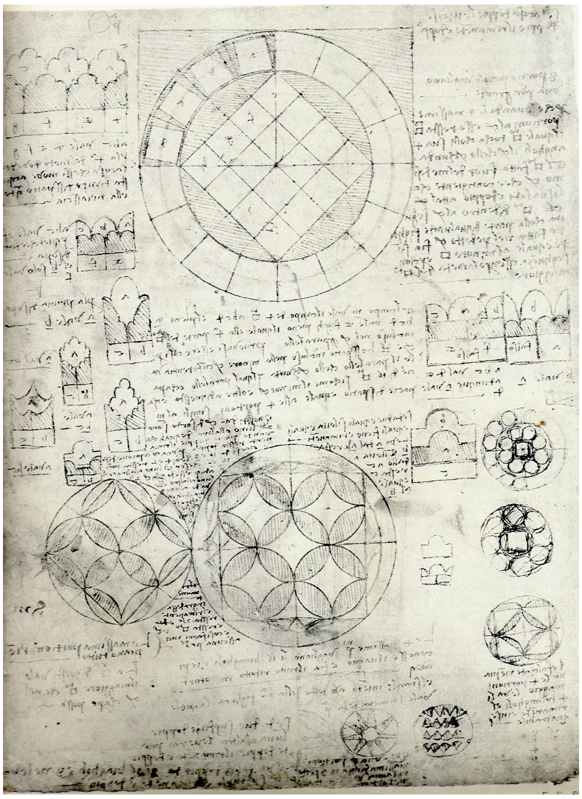


Figura 3.10: Il foglio 505 recto del Codice Atlantico

Le seguenti attività s'ispirano, analogamente a quelle mostrate nel Paragrafo 2.6 e nel Paragrafo 2.7, ad alcune particolari figure di Leonardo presenti nel Codice

Atlantico. Queste si differenziano da quelle utilizzate per realizzare i Ludi Geometrici perché sono per lo più riconducibili a veri e propri frammenti architettonici (se ne trovano per lo più nel Foglio 505 recto, vedere Figura 3.10).

Leonardo, mediante tali figure irregolari, mostra un metodo per trasformarle in altre, generalmente rettangoli, per le quali è più semplice determinare la superficie. Le costruzioni geometriche per ottenere tali equivalenze sono, anche in questo caso, conseguenza dell'applicazione sistematica della Nozione Comune 3 degli Elementi di Euclide. È Leonardo stesso che, come di consueto, rende palesi le sue intenzioni svelandoci come intende effettuare le trasformazioni geometriche per evidenziare le equivalenze cercate.

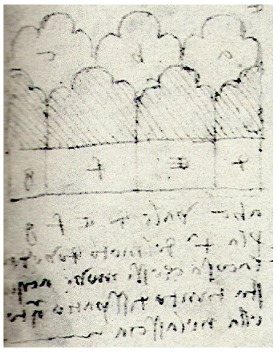
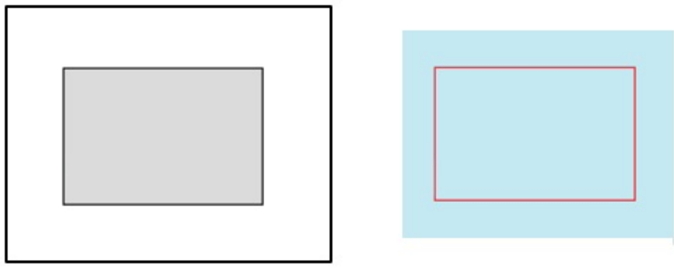


Figura 3.11: Una figura del foglio 505 recto e relativa didascalia

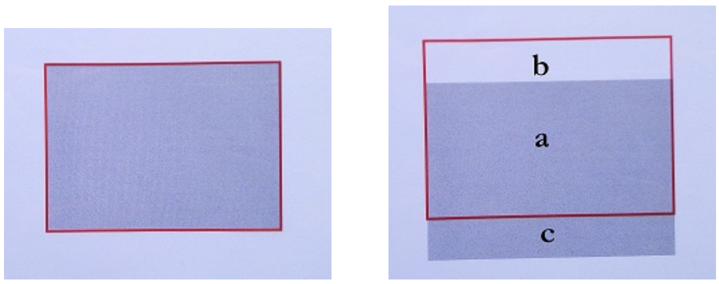
La didascalia, che è riportata sotto il disegno della Figura 3.11 che si trova in alto a sinistra del Foglio 505, dice: «*abc vale defg per la quarta del moto dove dice: la cosa che si muove acquista tanto di spazio, quanto ella ne lascia*». L'approfondimento del significato di queste frasi consegna spunti didattici interessantissimi volti a portare alla luce, anche in questo caso, relazioni tra disegno geometrico e deduzione logica. Leonardo, dunque, si affida al movimento come strumento per trovare la soluzione del problema posto. Se gli studenti riuscissero a «vedere» il possibile moto di elementi di una figura statica sarebbero in possesso di una strategia risolutiva di potenza straordinaria in grado di aumentare le loro capacità di percezione delle proprietà geometriche. Infatti, mediante una trasformazione continua di una figura in un'altra, si avrebbe modo di verificare la permanenza delle eventuali strutture stabili: ciò è di assoluta importanza perché alcune di queste sono indispensabili per comprendere l'equivalenza tra superfici diverse. Favorire queste soluzioni intuitive, vedremo, permetterà a studenti della scuola del primo ciclo, di risolvere problemi che altrimenti avrebbero bisogno di un numero considerevole di calcoli difficilmente gestibili per la loro età.

In questa attività, delle due superfici delle quali occorre stabilire l'equivalenza, si avrà la possibilità di vederne solo una, cioè quella irregolare di Leonardo. E' solo dopo opportuni spostamenti che si avrà la possibilità di vedere contemporaneamente sia la superficie di partenza che quella di arrivo ad essa equivalente, ossia, un rettangolo. Ciò costituisce un fattore di difficoltà per i ragazzi.

Si è proceduto quindi in maniera propedeutica sottoponendo inizialmente situazioni più semplici che introducono quelle basate sui disegni di Leonardo. Nelle prime attività, il materiale consisteva in una *tavola* sulla quale era disegnato un poligono o una superficie curvilinea che costituisce la figura base e un *lucido*, la figura mobile, sulla quale ne è riportata un'altra. Solo nella prima e nella seconda attività la figura base è uguale a quella mobile. Quest'ultima avrà sempre il bordo rosso per facilitare il suo riconoscimento perché, come si vedrà, dovrà essere sarà sovrapposta alla base.

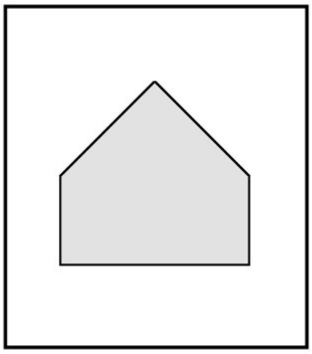


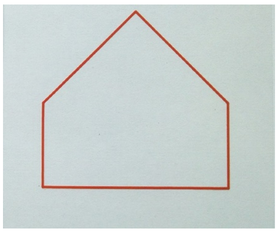
I ragazzi, non appena hanno tra le mani il materiale, congetturando una possibile uguaglianza tra le figure osservate, sovrappongono il lucido sulla tavola facendo coincidere perfettamente i rettangoli e constatando così la loro effettiva uguaglianza. Sollecitandoli a eseguire una traslazione lungo una qualunque direzione parallela ai lati (per esempio lungo il lato più corto come in figura), osserveranno la formazione di diversi rettangoli: **c**+**a**, **a**+**b**, **c**+**a**+**b**, **c**, **a**, e **b**.



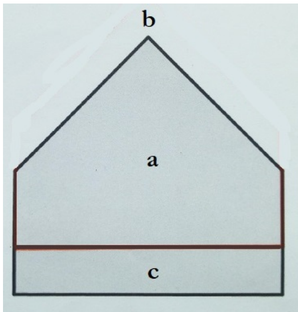
Generalmente, i ragazzi si accorgono facilmente dell'uguaglianza tra i rettangoli **c** e **b** perché hanno stessa base e stessa altezza. Si fa notare che la superficie **b** rappresenta lo spazio che la figura mobile acquisisce durante il suo movimento traslatorio. Allo stesso tempo, poiché **c** è lo spazio che questa lascia nel verso opposto, i ragazzi si rendono conto che le caratteristiche di questo movimento sono riconducibili alle parole di Leonardo e ciò li affascina molto.

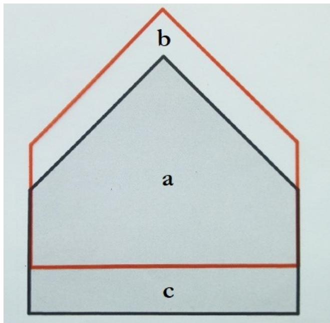
In un'attività successiva si è fatto lavorare i ragazzi su una base nella quale la figura rappresentata fosse leggermente più complessa della precedente: infatti, un lato del rettangolo è stato «spezzato» in due.





Ponendo la figura mobile su lucido, dopo la solita traslazione, l'uguaglianza tra **c** e **b** è, in questo caso, esclusa per ovvietà mentre la loro equivalenza non è più evidente come nel caso precedente.





E' stato necessario fare un passo indietro andando a rivedere il precedente problema sotto un diverso punto di vista. Osservando, infatti, la figura ad esso relativa i ragazzi sono stati invitati a portare la loro attenzione sulla superficie racchiusa dal bordo rosso del lucido prima del suo movimento, cioè su **c**+**a** e alla fine dello stesso, cioè su **a**+**b**. Poiché l'area della figura racchiusa deve essere sempre la medesima ne consegue necessariamente che **b** = **c** per la già citata Nozione Comune 3 degli Elementi di Euclide. Naturalmente, nel caso del rettangolo, è la medesima conclusione a cui si era già pervenuti ma la deduzione dell'equivalenza delle superfici **b** e **c** per mezzo della proprietà euclidea è molto importante perchè utilizzabile in generale in equivalenza quanto applicabile per figure qualunque. Si può verificare infatti che, tornando all'ultimo problema posto, i ragazzi sono a questo punto in grado di capire facilmente l'equivalenza tra **b** e **c** e di determinarne eventualmente la superficie misurando con un righello i lati di quest'ultima.

Volendo proporre situazioni di difficoltà crescente si sono considerate figure aventi almeno un lato curvilineo. Si è, inoltre, ritenuto opportuno proporre una nuova tipologia di problemi per i quali sia sempre vantaggioso elaborare una strategia risolutiva basata sul movimento ma applicata in situazioni nuove per abituare gli studenti a rispondere per diverse situazioni specifiche.

In uno di questi si chiedeva di determinare l'area della superficie **b** avendo a disposizione una base ed un lucido relativo che, da qui in avanti, presenterà una novità: non racchiuderà più l'intera figura ma solamente una sua parte.

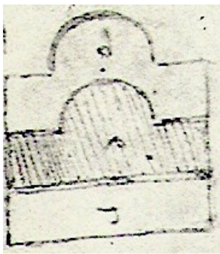
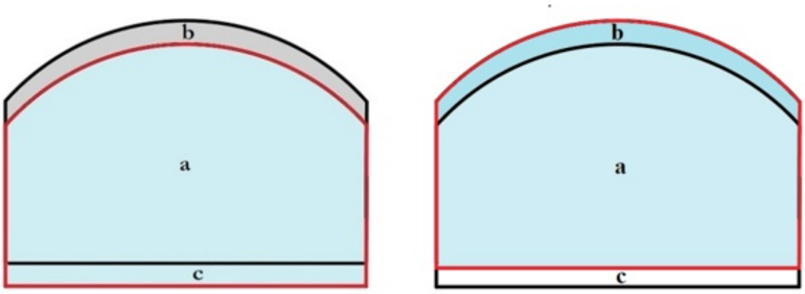
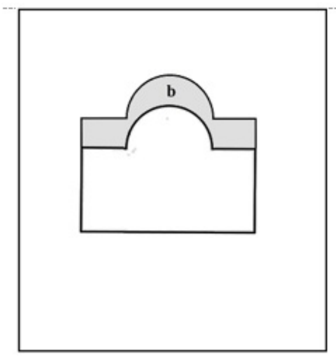


Figura 3.12: Un particolare del foglio 505 recto



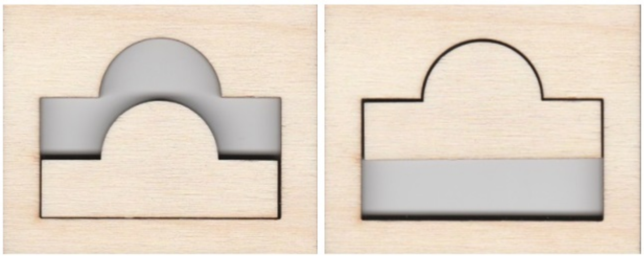
Grazie all'esperienza acquisita nei lavori precedenti, le risposte degli studenti non hanno tardato ad arrivare: si è facilmente compreso che l'area **b** è uguale a quella del rettangolo **c** e quindi facilmente deducibile una volta misurati i lati di quest'ultimo.

Le attività che sono state successivamente fatte svolgere sono quelle che hanno preso spunto direttamente dai disegni di Leonardo. A fianco alla Figura 3.12 c'è la seguente didascalia che è chiaramente riferita alla solita Nozione Comune 3: «*se da due equali si leva equali, equali fieno i rimanenti. Leva a dal ab, resta b; e leva a dallo ac resta c equale al b.* Pertanto, nella nuova attività, si vuol fare determinare esplicitamente l'area della superficie **b** riproposta nella tavola consegnata ai ragazzi (anche nel disegno originale la superficie considerata è indicata con la lettera **b**: non dimenticare che Leonardo scrive in maniera speculare).



Oltre alla tavola si consegna un nuovo tipo materiale, realizzato talvolta in legno talvolta in plexiglass, che mantiene le medesime caratteristiche generali del precedente al fine di perseguire gli stessi obiettivi didattici: questi è costituito da una cornice che racchiude la figura base e da una figura mobile che può muoversi nella cornice stessa che svolge il «ruolo» della figura rossa disegnata sui precedenti lucidi.

I ragazzi debbono disporre i materiali in modo da ricreare la stessa situazione indicata dal disegno raffigurato sulla tavola. Se necessario si propone di sovrapporre tutti i materiali proprio sulla tavola per poter meglio confrontare tra di loro le superfici coinvolte (le misure delle figure devono, in tal caso, coincidere naturalmente).

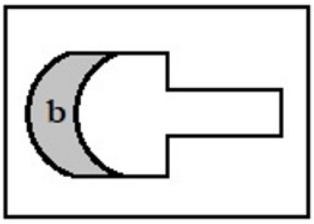


La superficie **b** è rappresentata dalla differenza tra la base e la figura mobile: muovendo quest'ultima fino alla posizione opposta, la differenza questa volta darà un rettangolo naturalmente equivalente a **b** e che permetterà di rispondere alla domanda posta.

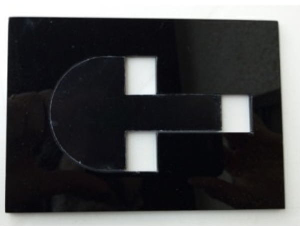
Figura 3.13: Un particolare del foglio 411 recto

La Figura 3.13 che rappresenta un altro disegno di Leonardo ha suggerito la formulazione di un problema leggermente diverso dai precedenti: come determinare l'area della superficie **b** indicata?

Con il seguente materiale a disposizione



i ragazzi, introducendo la figura mobile nella base in modo che abbia la stessa posizione indicata dalla tavola si accorgono, durante il suo movimento, che sussiste un'equivalenza tra la superficie **b** e, in questo caso, tre piccoli rettangoli che, volendo, pensati posizionati in maniera opportuna, formeranno ancora una volta un unico rettangolo.



La determinazione dell'area della superficie **a** del disegno di Leonardo riportata nella Figura 3.14 presenta solitamente molte difficoltà rispetto alle precedenti: come si vedrà, infatti, non sarà più sufficiente una semplice traslazione della figura mobile all'interno della base per determinare la soluzione del problema posto.

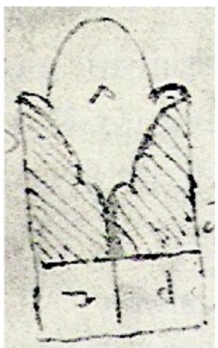


Figura 3.14: Un altro particolare del foglio 505 recto

Il materiale che si mette a disposizione degli studenti è costituito sempre da una figura base rappresentata da una cornice e, in questo caso, due figure mobili, le quali, inserite opportunamente all'interno della base, permettono di riprodurre la figura di Leonardo.

Poiché le due figure mobili, nella posizione in cui sono state inserite, non possono effettuare alcun movimento si deduce che, in questo caso, non si potrà più attuare la solita strategia risolutiva. Tuttavia, il fatto di non essere le due figure inseparabili, fa venire in mente di fare l'unico spostamento possibile ossia d'invertirle: naturalmente le due superfici ottentute per differenza tra cornice e figure mobili, pur differenti, sono equivalenti. A questo punto, nella nuova disposizione, le due figure mobili potranno essere messe in moto contemporaneamente fino al raggiungimento della posizione opposta a quella di partenza. Si scoprirà così l'equivalenza delle precedenti superfici con un rettangolo.

Poiché tutte le figure di Leonardo che abbiamo visto in questo paragrafo sono trasformate in rettangoli equivalenti attraverso un movimento di figure opportune, la strategia risolutiva utilizzata è stata denominata *equivalenza in moto*. Poiché, in generale, con un disegno mediante riga e compasso si può sempre trasformare un rettangolo in un quadrato (Proposizione II.14 degli Elementi di Euclide) si può dire che tutte le figure viste in questo paragrafo sono state quadrate. Inoltre, come detto, poiché le equivalenze sono state dedotte da un movimento è lecito parlare di *quadratura in moto* ([51]).

Anche in questa attività i ragazzi hanno dovuto eseguire esercizi per verificare il raggiungimento degli apprendimenti. L'elenco degli esercizi proposti si trova in Appendice A.

La quadratura in moto, in conclusione, è in grado di sviluppare un vero e proprio «sesto senso»: si auspica che, applicandola più volte in diverse situazioni e in un periodo di tempo abbastanza ampio, questa permetta poi, in situazioni nuove, di cominciare ad immaginarsi i movimenti di punti, lati e figure che permettono di fare inferenze utili alla risoluzione di un problema.

Si ritiene che tutte le esperienze realizzate nell'ambito dell'Attività 2 influiscano sul miglioramento della qualità e dell'esattezza delle risposte del Quesito 6 e Quesito 7 ma anche, se meno direttamente, del Quesito 19 e Quesito 20 del Pre-test.

Attività 3. *Figure aventi superficie multipla di un'altra di riferimento.*

Obiettivi disciplinari

- Costruzione di una superficie che sia multipla di una di riferimento.
- Superfici multiple di una di riferimento: rapporto tra le rispettive aree e dei rispettivi perimetri.

Nel Quesito 2 e nel Quesito 3 del Pre-test si chiedeva quante volte l'area di un poligono fosse più grande dell'area di un altro. Dall'analisi delle risposte emerge una problematica: diversi studenti, nelle loro strategie risolutive, eseguono una differenza tra le aree delle superfici coinvolte. Ciò sta a significare che questi studenti, non pochi in realtà, non hanno chiara la differenza tra le due domande *quante volte è più grande* da *di quanto è più grande*. Pertanto, le seguenti proposte didattiche mireranno, oltre che agli obiettivi disciplinari dichiarati, a chiarire tale differenza.

Passo 1 Agli studenti si sono consegnati 3 triangoli rettangoli tra di loro uguali (la scelta del tipo di poligono, naturalmente, è arbitraria).

Problema 8. *Costruisci un poligono unendo come si vuole, senza sovrapporre, 2 triangoli uguali dati.*

Naturalmente si accettano le disposizioni più disparate a patto che rispettino le richieste fatte.

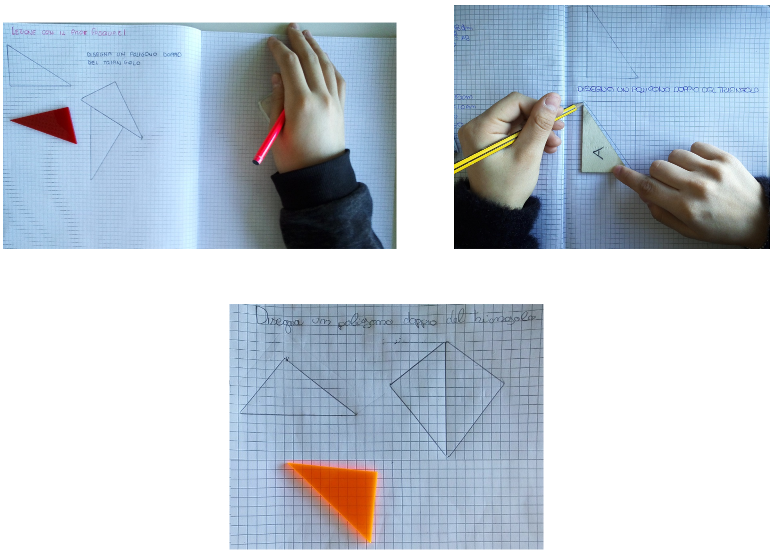


Figura 3.15: Figure realizzate nella classe sperimentale RF il 21 marzo 2019

Quesito 3.6.1. *Quante spazio occupa questo poligono?*

Tutti i ragazzi sono stati d'accordo nell'affermare che tutti questi poligoni occupavano uno spazio doppio di uno solo; pertanto trovavano naturale dire che il poligono costruivato era il doppio di quello di partenza.

Quesito 3.6.2. *Quante volte il poligono è più grande del triangolo?*

Le risposte, a questa domanda, non sono state più univoche. C'è chi ha detto «due volte» c'è chi ha detto «una volta». Chi ha risposto «due volte» sta considerando il nuovo poligono come multiplo di quello di partenza. Chi ha risposto «una volta» ha pensato alla differenza di superficie tra i due poligoni. Di fatto questi ultimi studenti hanno risposto alla domanda: «di quanto è più grande?». Appurato che una qualsiasi delle precedenti disposizioni di due triangoli viene a formare un nuovo poligono più grande di quello di partenza, si è posto il seguente:

Quesito 3.6.3. *In ogni rappresentazione multipla ottenuta, quanti poligoni di base sono in essa contenuti?*

Poiché ci sono esattamente 2 poligoni di base si è detto che quella multipla è due volte più grande di quella di base ma anche che è il doppio.

Poi si è posto il seguente:

Quesito 3.6.4. *Il poligono maggiore di quanto è più grande, nel senso quanto spazio in più occupa?*

Anche attraverso poligoni di colore diverso, si è cercato di far porre l'attenzione sul fatto che in A e in B c'è almeno una parte di superficie in comune, uno spazio occupato uguale mentre il resto è in più e costituisce di quanto B è più grande di A. Le risposte dei ragazzi davano modo di capire, a questo punto, che questi cominciassero a rendersi conto della diversità tra la domanda *quante volte è più grande* dalla domanda *di quanto è più grande*. Tuttavia, l'effettiva comprensione della diversità di richiesta si potrà verificare più rigorosamente negli esercizi di applicazione e nel test da far svolgere al termine dei trattamenti.

Successivamente, si è posto il seguente:

Quesito 3.6.5. *Disegna un poligono che abbia area e perimetro che sono rispettivamente il doppio di quello dato.*

Si sono lasciati gli studenti di vagliare le diverse possibilità: hanno posizionato i triangoli in modo che si toccassero completamente per due lati omologhi oppure per due non omologhi, con uno dei due completamente contenuto nell'altro a partire da un vertice e non. Si è verificato che, in generale, il perimetro della superficie doppia non è mai il doppio della superficie di base tranne nel caso in cui i triangoli abbiano in comune solamente un vertice (Figura 3.16).

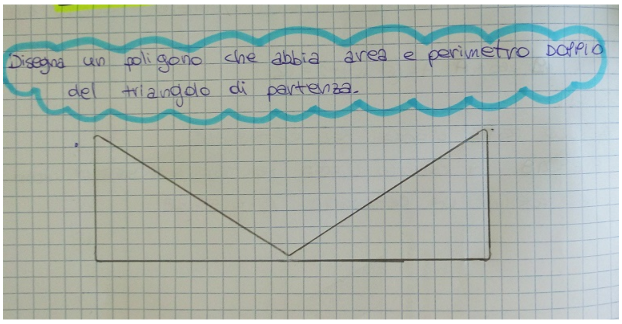


Figura 3.16: Figura realizzata nella classe sperimentale RF il 21 marzo 2019

Passo 2 Si è proseguito con attività del tutto analoghe alla precedente ma fornendo agli studenti un maggior numero di triangoli uguali per far costruire superfici che fossero il quadruplo di quella di partenza. Anche su tali figure si è fatto indagare il rapporto tra i rispettivi perimetri. Analogamente a quanto fatto in precedenza, si è chiesto quindi di determinare figure che avessero anche il perimetro quadruplo di quello di partenza. Di fronte a questo tipo di domanda, grazie anche al materiale a disposizione e alla creatività dei ragazzi, si sono ottenute molte più tipologie di figure di quante se ne potessero aspettare: quella sicuramente più frequente è stata la girandola ossia quella riportata a sinistra della Figura 3.17.

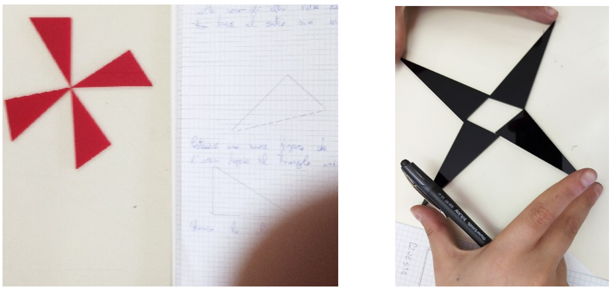


Figura 3.17: Figure realizzate nella classe sperimentale CE il 22 marzo 2019

Interessante il fatto che molti studenti arrivino a realizzare il disegno riportato in Figura 3.18 che, tra l'altro, ha dato la possibilità di fare anche molte riflessioni su che figura fosse quella ottenuta nello spazio interno, la sua superficie, il rapporto con il resto ecc.

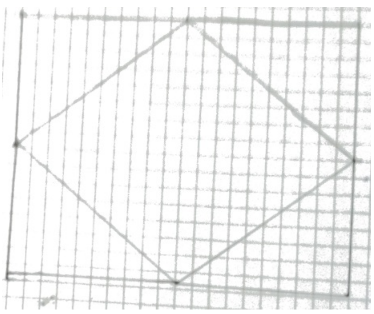


Figura 3.18: Figura realizzata nella classe sperimentale RF il 21 marzo 2019

Anche per queste attività sono stati fatti eseguire esercizi per la verifica del raggiungimento degli obiettivi prefissati. Si trovano in Appendice B. Tutte quello che è stato fatto fare agli studenti nell'ambito dell'Attività 3 è stato pensato per influire sulle risposte al Quesito 2 e Quesito 3.

Attività 4. *Equivalenza tra superfici equicomposte*

Obiettivi disciplinari

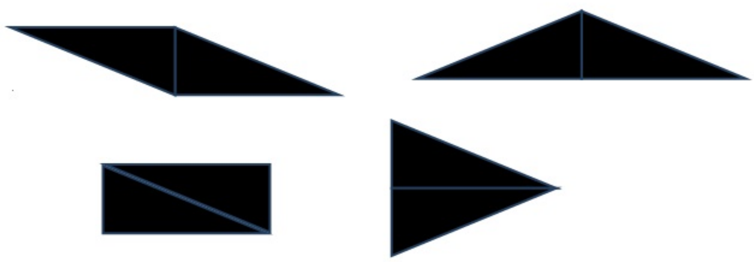
- Figure equicomposte: rapporto tra le superfici;
- Figure equicomposte: rapporto tra i perimetri.

Tra gli studenti che hanno risposto sostanzialmente in modo corretto evitando anche calcoli ridondanti al Quesito 4, oggetto di studio nelle seguenti attività, quasi nessuno ha utilizzato le parole «poligoni equicomposti». Eppure, da informazioni fornite dai loro insegnanti, avrebbero dovuto conoscerne il significato.

Passo 1 Si consegnano 4 triangoli uguali.

Problema 9. *Costruisci, usando tutti e quattro i triangoli consegnati, due poligoni diversi che occupino la stessa superficie.*

I seguenti poligoni, comunque combinati a due a due, rispondono al problema posto.



I ragazzi sono stati portati a riflettere sul numero di poligoni uguali di cui ciascuna figura fosse composta per arrivare a comprendere, in modo più preciso, il significato della parola «equicomposto».

Analogamente a quanto fatto nell'Attività 3 si è posto il seguente:

Problema 10. *I poligoni hanno gli stessi perimetri?*

I ragazzi, sfruttando anche quanto fatto in precedenza, non hanno avuto particolari difficoltà a rispondere correttamente. Avevano, in sostanza, compreso che se i triangoli componenti i poligoni realizzati venivano congiunti secondo lati omologhi allora i perimetri erano uguali.

Passo 2 Per dare maggiore variabilità e stimolare anche creatività in questo genere di compiti si è proseguito consegnando ai ragazzi 3 poligoni non tutti uguali, di solito un quadrato o un rettangolo e due triangoli.

Bisognava costruire coppie di poligoni equivalenti: in Figura 3.19 sono riportati solo alcuni dei poligoni ottenuti, a volte noti a volte no. Sorprende sempre molto che i ragazzi, manipolando personalmente i materiali, riescano a creare diverse tipologie di figure molte delle quali originali, del tutto nuove, di quelle per intenderci che non compaiono tipicamente nei libri di scuola.

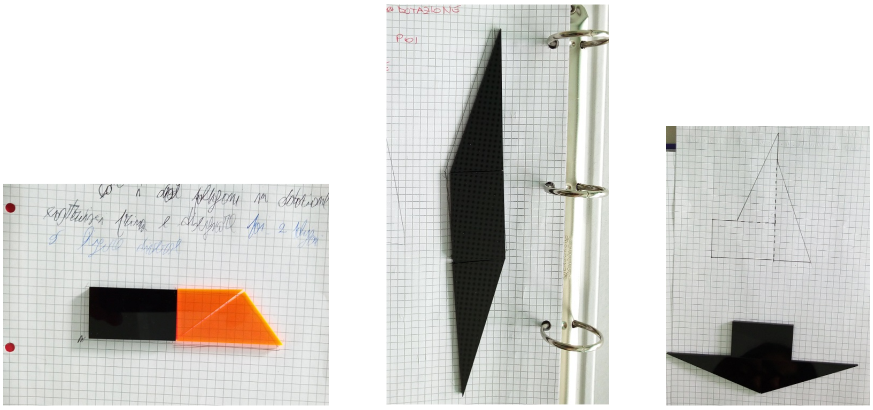


Figura 3.19: Figure realizzate nella classe sperimentale RF il 26 marzo 2019

Anche per questi poligoni si parla di equiscomponibilità. Poi si sono fatte fare le solite riflessioni relativamente ai perimetri. Gli esercizi che si sono fatti eseguire per la verifica del raggiungimento degli obiettivi prefissati si trovano in Appendice B e C.

L'intera Attività 4 si auspica influisca sui risultati relativamente ai quesiti del Pre-test che abbiano riguardato, seppur in situazioni diverse, il problema dell'equiscomponibilità, ossia i quesiti 4, 15, 16, 17 e 18.

Attività 5. *Equivalenza tra parallelogrammi e tra triangoli*

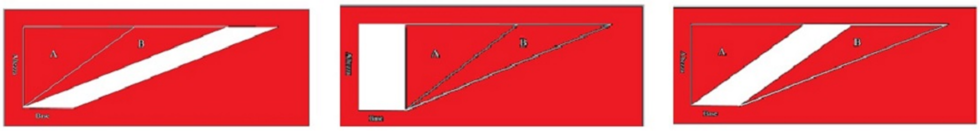
Obiettivi disciplinari

- Equivalenza tra parallelogrammi aventi base in comune o uguale e racchiusi tra le stesse parallele;
- Equivalenza tra triangoli aventi base in comune o uguale e racchiusi tra le stesse parallele;
- Rapporto tra le superfici di parallelogrammi e triangoli aventi medesima base e altezza.

Di fatto, con questa attività, si vuole far conoscere agli studenti il contenuto della Proposizione 35 e della Proposizione 37 del libro 1 degli Elementi di Euclide. Un'adeguata presentazione agli studenti di tali argomenti permette, inoltre, la comprensione corretta dell'equivalenza tra parallelogrammi (e rispettivamente tra triangoli) aventi stessa base e stessa altezza che rende possibile l'applicazione della proprietà senza limitazioni (contrariamente al modo in cui è esposto nel Paragrafo 1.13).

Passo 1 Il materiale utilizzato in queste attività è costituito da una figura di base rappresentata dalla cornice I e da due triangoli A e B che rappresentano le figure mobili.

Si sono fatte inserire le due figure A e B all'interno della base I per formare un triangolo che si possa muovere all'interno di I stesso.



Quindi, si è chiesto di porre attenzione alla superficie differenza I - (A + B). E', infatti, importante far riconoscere che tipo di figure fossero e cosa le caratterizzasse: per la Nozione Comune 3 sono tutte e tre equivalenti.

Figura 3.20: Uso del materiale nella classe sperimentale RF il 26 marzo 2019

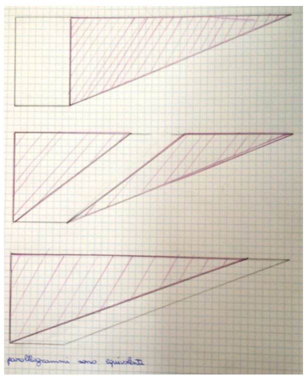


Figura 3.21: Disegni realizzati nella classe sperimentale CE il 29 marzo 2019

Passo 2 Si sono poi consegnati 3 triangoli che sono rispettivamente la metà dei 3 parallelogrammi differenza I - (A + B); inseriti opportunamente nel rispettivo parallelogramma si è dunque dedotta la loro equivalenza.

Gli esercizi proposti per la verifica del raggiungimento degli obiettivi prefissati si trovano in Appendice C. Quanto fatto durante tutta l'Attività 5 è stato pensato per incidere sulle risposte al Quesito 19 e al Quesito 20.

Attività 6. *Figure equivalenti ottenute per intersezione di figure uguali (ma distinte).*

Obiettivi disciplinari Riconoscere superfici equivalenti dalla parziale sovrapposizione di figure uguali.

Passo1 Si parte consegnando ai ragazzi due figure uguali, per esempio due quadrati. Si è fatto riflettere, dapprima, sull'estensione delle superfici differenza che si ricavano dall'intersezione parziale delle due figure uguali. Par faciliatare la percezione delle varie figure intersezione e di quelle ottenute dalla differenza tra quelle date inizialmente e quelle d'intersezione, i quadrati consegnati sono di materiale trasparente (Figura 3.22).

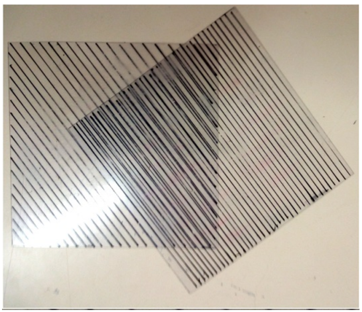


Figura 3.22: Sovrapposizione di quadrati trasparenti ottenuta nella classe sperimentale CE il 29 marzo 2019

In particolar maniera, si riescono a riconoscere 3 superfici diverse: una data dall'intersezione dei 2 quadrati e quelle ottenute come differenza tra ciascuno dei 2 quadrati e la superficie intersezione. Per nessuna di queste, in generale, si può quantificare l'estensione non essendo riconducibili a figure note. Tuttavia si deve far convenire gli studenti che le due superfici differenza, pur essendo diverse, sono equivalenti.

Passo2 Successivamente si è chiesto ai ragazzi di sovrapporre i due quadrati cercando di trovare posizioni reciproche tali che la superficie intersezione fosse un poligono noto. In questo modo era possibile determinarne anche l'area usando un righello (Figura 3.23).

Per la verifica del raggiungimento degli obiettivi prefissati per questa attività si sono proposti gli esercizi in Appendice C. L'intera Attività 6 ha avuto l'obiettivo di influire sulle risposte dei quesiti 11 e 12.

3.6.6 Fase 4: i trattamenti nelle classi controllo

Come già anticipato nel Paragrafo 3.6.4 le classi di controllo e cioè CD, RG passata la fase dedicata alla somministrazione del Pretest hanno partecipato a trattamenti specifici per lo stesso numero di ore per il quale sono state impegnate le classi sperimentali. Anche gli obiettivi disciplinari di ciascuna delle singole attività sono stati gli stessi. La differenza è consistita in alcuni aspetti sostanziali della modalità didattica adottata. Questa era ancora, per certi aspetti, di natura laboratoriale nel

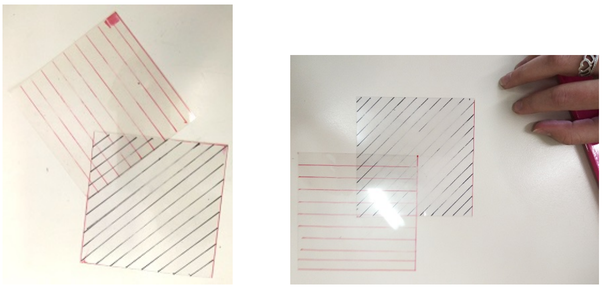


Figura 3.23: Poligoni noti ottenuti per sovrapposizione nella classe sperimentale CE il 29 marzo 2019

senso che le attività si aprivano ancora mediante la presentazione di un problema aperto sul quale si avviava una discussione. Tuttavia, per formulare congetture e verificarle, gli studenti non avevano in dotazione materiali didattici con i quali interagire: potevano utilizzare il proprio quaderno per realizzare tutti i disegni necessari e, inoltre, avevano a disposizione un software di geometria dinamica installato su un unico computer collegato ad uno schermo mediante un proiettore. Ogni qualvolta uno studente individuava una possibile strategia risolutiva del problema posto lo presentava ai propri compagni utilizzando un'animazione precedentemente preparata con il software. Tali animazioni, di fatto, simulavano quei possibili movimenti che gli alunni del gruppo sperimentale potevano eseguire con i materiali. Una volta raggiunta una conclusione condivisa dal resto della classe, ogni studente riportava sul proprio quaderno tutto quello che era stato necessario per raggiungerla nonché le conclusioni e i disegni (un esempio in Figura 3.24).

Dalle osservazioni effettuate durante le attività 3 e 4, sicuramente tra quelle in cui la creatività dei ragazzi veniva maggiormente stimolata, è emerso che, senza la possibilità di utilizzare dei materiali, il numero di tipologie di figure proposte dai ragazzi del gruppo di controllo era senz'altro inferiore a quello del gruppo sperimentale.

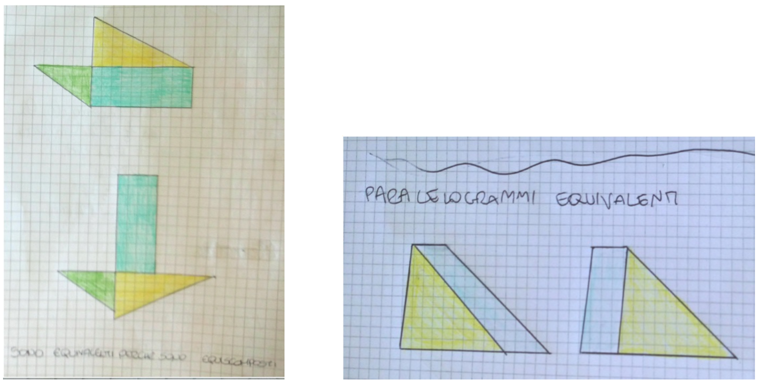


Figura 3.24: Disegni realizzati nella classe di controllo RG il 28 marzo 2019.

Durante tutte le attività così come alla loro conclusione, analogamente alle classi del gruppo sperimentale, gli studenti eseguivano esercizi di verifica e di applicazione di quanto appreso. Tali esercizi erano in tutto identici a quelli somministrati ai ragazzi del gruppo sperimentale.

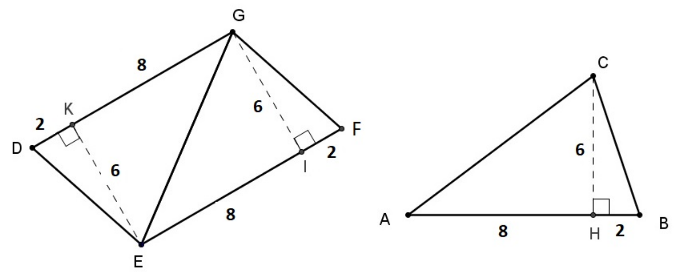
3.6.7 Fase 5: Post-test 1

Terminata l'ultima attività in tutte le classi sperimentali e di controllo, nella prima settimana di aprile, è stato somministrato il primo dei due post-test previsti detto *Post-test 1* a tutti gli studenti che erano presenti durante la somministrazione del Pre-test. Naturalmente, i prerequisiti necessari allo svolgimento del Post-test 1 sono identici a quelli del Pre-test che sono riportati in 3.3; anche le tematiche disciplinari interessate sono le medesime e cioè quelle riportate nel Paragrafo 3.6. Le modalità di somministrazione, identiche a quelle del Pre-test, sono riportate nel Paragrafo 3.6.1.

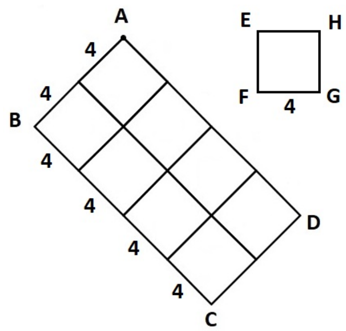
I test saranno concepiti sempre appartenenti agli stessi 7 gruppi del Pre-test; talvolta la figura è leggermente diversa, talvolta è la medesima nella quale però sono diversi i dati forniti. Anche le modalità di correzione saranno identiche a quelle dei quesiti del Pre-test.

Qui di seguito sono riportati i quesiti che costituiscono il Post-test 1: i dettagli che mancano sono ricavabili dal Paragrafo 3.6.1.

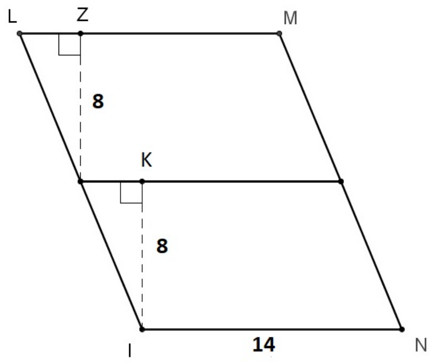
QUESITO 2. *Quante volte l'area del parallelogramma* DEFG *è più grande dell'area del triangolo* ABC?

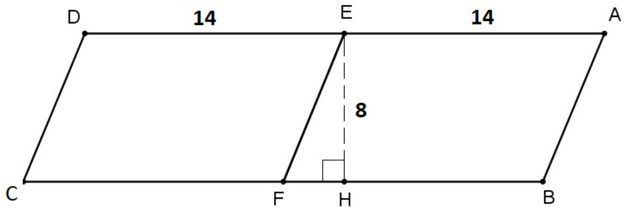


QUESITO 3. *Quante volte l'area del rettangolo* ABCD *è più grande dell'area del quadrato* EFGH?

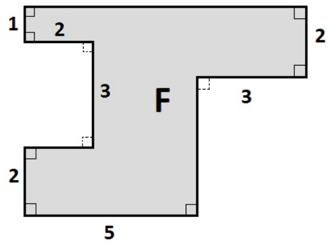


QUESITO 4. *Perché il parallelogramma* ILMN *ha la stessa area del parallelogramma* ABCD?

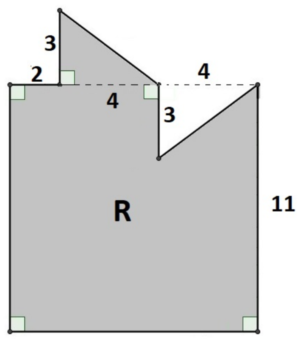




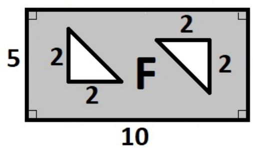
QUESITO 6. *Calcola l'area del poligono di color grigio* F *in figura.*

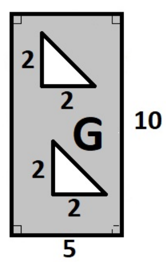


QUESITO 7. *Calcola l'area del poligono di color grigio* R *in figura.*

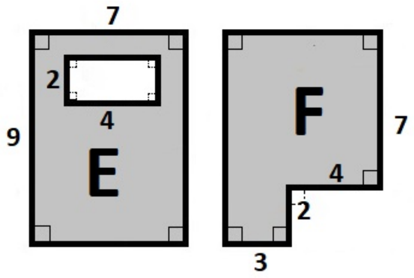


QUESITO 8. *Calcola l'area della superficie di color grigio* F. *Calcola anche l'altra di color grigio* G.

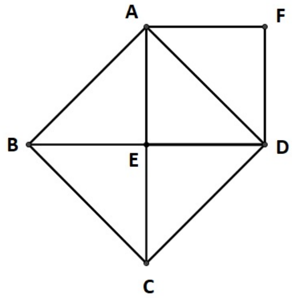




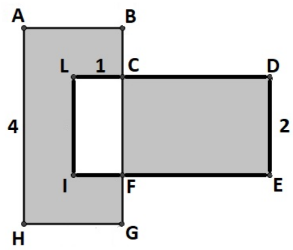
QUESITO 9. *Perché la superficie di color grigio* E *ha la stessa area della superficie di color grigio* F?



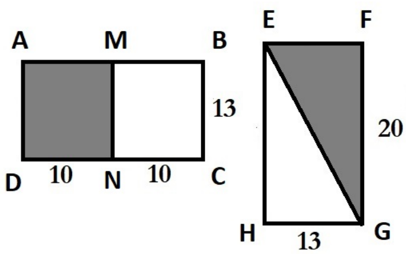
QUESITO 11. *Tutti i triangoli presenti in figura sono rettangoli isosceli e* A(ABCD) = 20. *Calcola l'area del quadrato* AEDF.



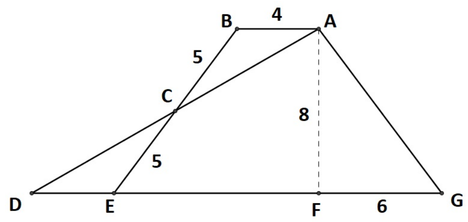
QUESITO 12. *I due rettangoli* ABGH *e* DEIL *sono uguali: perché i due poligoni di color grigio* ABCLIFGH *e* DEFC *hanno la stessa area?*



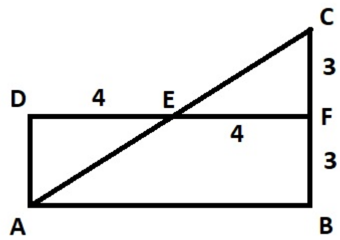
QUESITO 14. *I due rettangoli* ABCD *e* EFGH *sono uguali. Perché il rettangolo* AMND *e il triangolo* EFG hanno la stessa area?



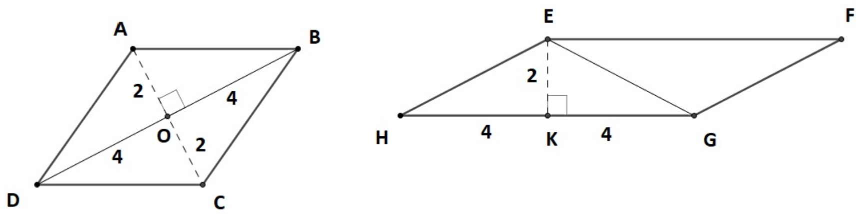
QUESITO 15. *Perchè il triangolo* ADG *ha la stessa area del trapezio isoscele* ABEG?



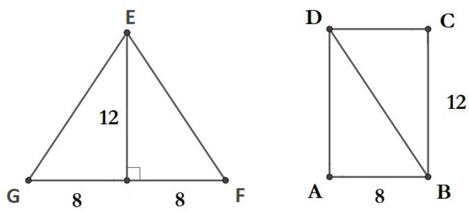
QUESITO 16. *Perché il rettangolo* ABFD *ha la stessa area del triangolo* ABC?



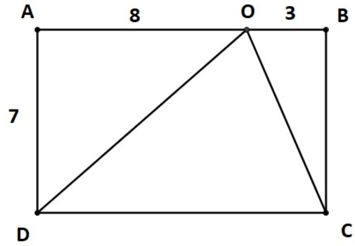
QUESITO 17. *Perché il rombo* ABCD *ha la stessa area del parallelogramma* EFGH?



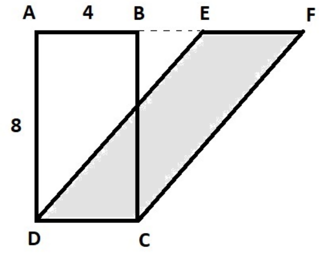
QUESITO 18. *Perché il rettangolo* ABCD *ha la stessa area del triangolo* EFG?



QUESITO 19. ABCD *è un rettangolo di area 96. Determina l'area del triangolo* DOC.



QUESITO 20. ABCD *è un rettangolo. Calcola l'area del parallelogramma* CDEF.



Al Post-test 1 hanno partecipato gli stessi 86 studenti che hanno partecipato al Pre-test. Anche per questo non sono state mai rese note le risposte corrette.

Analisi descrittiva Post-test 1. I dati statistici relativi al Post-test 1, divisi per sottoquesiti, sono riportati nella Tabella 3.2: si evince che le medie delle risposte (ricordare ora che i quesiti sono 16 e non più 20), sono sensibilmente aumentate sia per l'approccio risolutivo sia per la correttezza delle risposte.

Tabella 3.2: Post-test 1: statistiche descrittive sul punteggio Sottoquesiti A e B

Statistiche descrittive sul punteggio Sottoquesiti A	
N. alunni	86
N. Quesiti	16
Punteggio medio	9,59
Mediana	11,00
Deviazione standard	3,64

Statistiche descrittive sul punteggio Sottoquesiti B	
N. alunni	86
N. Quesiti	16
Punteggio medio	9,01
Mediana	9,50
Deviazione standard	4,03

Dai grafici riportati in Figura 3.25 si evince che la distribuzione dei punteggi non è più simmetrica a testimonianza dell'effetto dei trattamenti eseguiti prima della somministrazione del test.

Analisi di affidabilità. Rispetto al Pre-test si può dire che gli indici di difficoltà sono rimasti sostanzialmente invariati: infatti i sottoquesiti 2B e 3B sono risultati ancora piuttosto semplici; non si può più fare un contronto con il sottoquesito 5A in quanto tolto rispetto alla prova di validazione. Nel Post-test 1 è risultato semplice il sottoquesito 20B: quest'ultimo è stato abbastanza cambiato rispetto alla prova di validazione e questo può essere la causa della variazione delle risposte degli studenti (vedere per maggiori dettagli il Paragrafo 3.8.1).

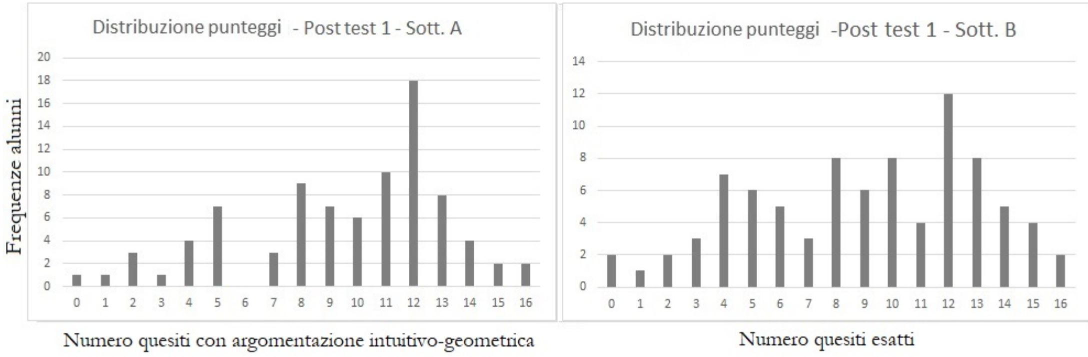


Figura 3.25: Distribuzione dei punteggi ottenuti nel Post-test 1

Infine, il valore di alfa di Cronbach relativo a tutti i quesiti è $\alpha = 0{,}89$ pertanto la nuova prova risulta essere ancora affidabile. Ulteriori dettagli di questa prova sono riportati nel Paragrafo 3.7 e nel Paragrafo 3.8.

3.6.8 Fase 6: Post-test 2

Alla fine di settembre 2019 si è tornati nelle medesime classi coinvolte nell'esperimento e si è fatto eseguire a 85 degli 86 studenti che avevano eseguito sia il Pre-test che il Post-test 1 (pertanto i dati relativi allo studente assente nell'ultimo test sono stati tolti in tutti i test) il secondo post-test denominato *Post-test 2* nelle stesse identiche modalità dei precedenti. Naturalmente, dalla fine delle precedente fase, ossia dopo la somministrazione del Post-test 1, non si sono avuti più contatti con gli studenti ed è stato chiesto ai docenti curriculari di non ritornare nè sui quesiti svolti nè tantomeno sui trattamenti eseguiti.

Come Post-test 2 si è scelto di sottoporre agli studenti il Pre-test lasciando invariato sia il testo degli esercizi, quindi i dati forniti, le immagini e così via. Si è ritenuto, infatti, che essendo trascorsi circa 6 mesi da quando è stato somministrato la prima volta, gli studenti non potevano ricordare le risposte date. Inoltre, si ricorda, che non sono mai stati fatte considerazioni insieme agli studenti relativamente alle risposte dei quesiti.

3.7 Confronto medie dei test

In questo paragrafo si analizzano le medie ottenute separatamente nei sottoquesiti A e B. Per comprendere se le differenze tra la medie registrate sono maggiori di quelle compatibili con vaziazioni casuali si è utilizzato il *t-test accoppiato* o *dipendente* e *t-test indipendente.*

Attraverso il t-test accoppiato si è effettuato un confronto separato tra gli studenti di ciascuno dei due gruppi considerati nei tre test. Da questo tipo di studio rileviamo che, se la differenza di medie, tra il Post-test 1 e il Pre-test sono significative sia per il gruppo sperimentale che di controllo, lo stesso non si può affermare tra Post-test 2 e Post-test 1.

Infatti, la differenza di media tra Post-test 1 e Pre-test per i sottoquesiti A (M = 2,405, DS = 3,357) e per i sottoquesiti B (M = 1,595, DS = 2,905), riscontrata nel gruppo sperimentale, sono entrambe statisticamente significative rispettivamente con t = 4,642 e t = 3,558 e, sempre per entrambe, p(2 code) < 0,05 (vedere i primi due grafici delle rispettive colonne di sinistra della Figura 3.26 e della Figura 3.27).

Figura 3.26: Distribuzione frequenze alunni ai Sottoq. A con approccio intuitivo-geometrico

Analogamente, per il gruppo di controllo, le medesime differenze per i sottoquesiti A (M = 3,186, DS = 3, 561) e per i sottoquesiti B (M = 1,209, DS = 2,739) sono anche queste statisticamente significative rispettivamente con t = 5,867 e t = 2,895 e, sempre per entrambe, p(2 code) < 0,05 (vedere i primi due grafici delle rispettive colonne di destra della Figura 3.26 e della Figura 3.27).

Invece, nel solo gruppo sperimentale, le differenze di medie tra Post-test 2 e Post-test 1 sia per i sottoquesiti A (M = 1,381, DS = 4, 066) che per i sottoquesiti B (M = 1,357, DS = 4, 119) sono statisticamente significative, rispettivamente con t = 2,201 e p(2code) = 0,033 e t = 2,135, con p(2 code) = 0,039 (vedere il secondo e terzo grafico delle rispettive colonne di sinistra della Figura 3.26 e della Figura 3.27).

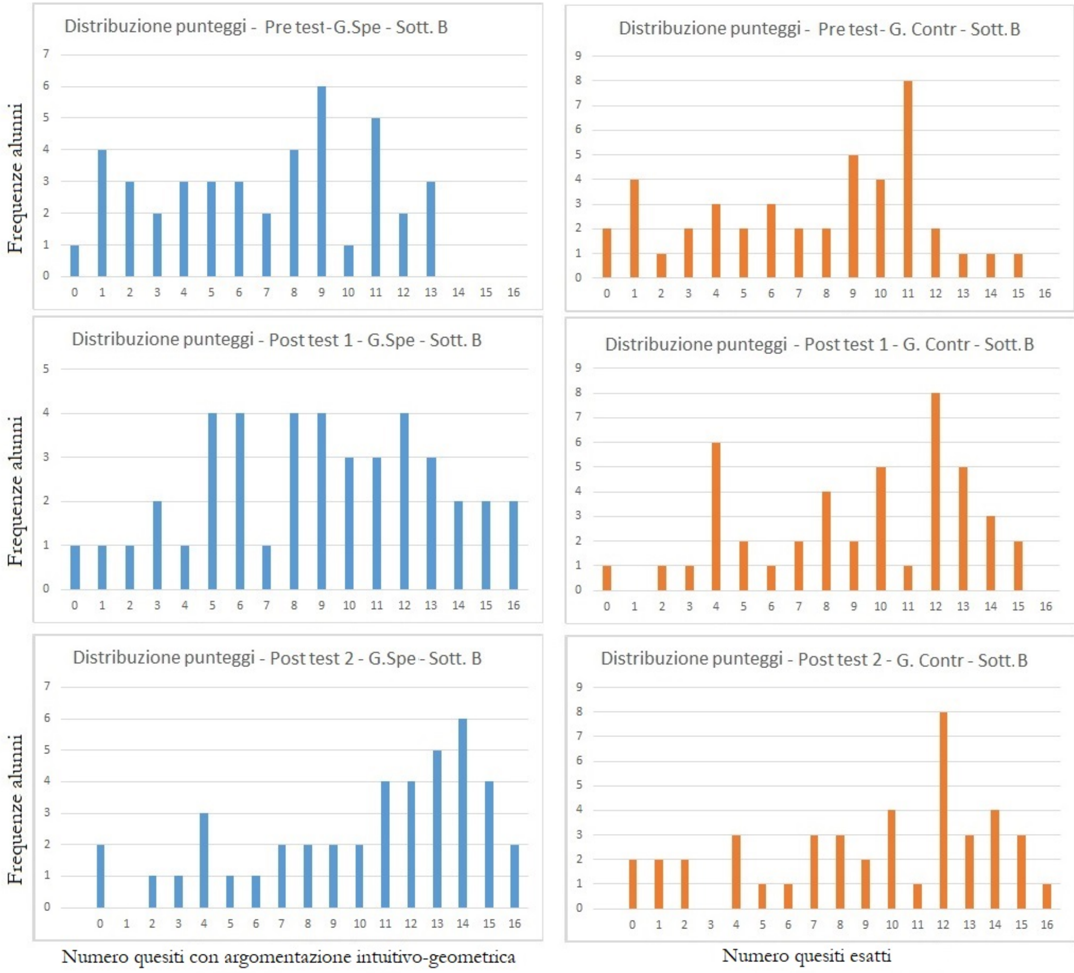


Figura 3.27: Distribuzione frequenze alunni ai Sottoquesiti B

Nel gruppo di controllo, invece, le stesse differenze di media non sono state altrettanto significative: osservando, infatti, i grafici corrispondenti (secondo e terzo delle rispettive colonne di destra della Figura 3.26 e della Figura 3.27) si evince che non sussitono tra i due test sostanziali differenze (con i risultati del Post-test 2 leggermente peggiori di quelli del Post-test 1).

Il t-test indipendente, invece, confronta gli studenti del gruppo sperimentale con quelli del gruppo di controllo: dai risultati di questo studio viene effettivamente confermato che la differenza di media per i sottoquesiti A (M = 2,518, DS = 0,853) nel Post-test 2 tra gruppo sperimentale e di controllo è significativamente maggiore di zero con t = 2,951 e p(2 code) = 0,004.

Gli istogrammi riportati in Figura 3.28 testimoniano proprio queste affermazioni: è possibile confrontare l'andamento complessivo dei ragazzi del gruppo di controllo che hanno un grafico sostanzialmente simmetrico (fatta eccezione per gli studenti che hanno conseguito il valore 1 in 12 quesiti su 16) rispetto a quello dei ragazzi del gruppo sperimentale il cui grafico è completamente sbilanciato verso destra. In altre

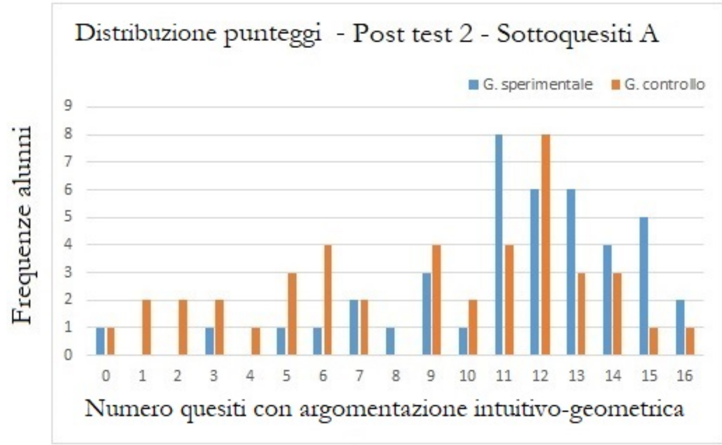


Figura 3.28: Distribuzione frequenze ai sottoquesiti A nel Post-test 2

parole, il 76% degli studenti di questo gruppo ha conseguito una votazione compresa tra 10 e 16 nei sottoquesiti A.

Le precedenti analisi ci permettono di concludere che:

1. attraverso i risultati del Post test 1, somministrato subito dopo i trattamenti, si rileva che entrambi gruppi, sperimentale e controllo, propendono per un approccio risolutivo intuitivo-geometrico migliorando, nel contempo, il numero delle risposte esatte. La somiglianza dei risultati ottenuti tra i due gruppi non stupisce tenendo conto anche quanto anticipato nel Paragrafo 3.5.3. L'esperimento è stato effettuato nelle scuole in orario curriculare. Con l'idea di non voler sottrarre tempo prezioso ai docenti, come detto, si sono scelti argomenti che sicuramente sarebbero stati affrontati durante l'anno; inoltre, per non portare benefici solamente ad un gruppo di studenti (e cioè quelli appartenenti al gruppo sperimentale) si sono ideati trattamenti che risultassero in ogni modo formativi e utili ai fini scolastici per tutti. Infatti, anche le attività svolte nelle classi di controllo, descritte nei Paragrafi 3.6.4 e 3.6.6, hanno avuto gli stessi obiettivi disciplinari di quelle rivolte alle classi sperimentali;

2. nel Post-test 2, ossia a 6 mesi di distanza dalla fine dei trattamenti, i ragazzi del gruppo sperimentale mantengono un approccio risolutivo intuitivo-geometrico;

3. gli studenti del gruppo di controllo, invece, a distanza di 6 mesi, risolvono i quesiti non manifestando una particolare preferenza per uno dei due approcci;

4. sempre a distanza di 6 mesi dalla fine delle attività sperimentali, in merito alla correttezza delle risposte, si sono rilevate differenze di medie significative solo per i ragazzi del gruppo sperimentale che dimostrano di rispondere esattamente a più della metà dei quesiti.

3.8 Approccio risolutivo predominante: confronto tra test

I trattamenti effettuati nel gruppo sperimentale avevano l'obiettivo di far propendere gli studenti, attraverso lo sviluppo delle capacità sensoriali-percettive, verso un approccio intuitivo-geometrico. Per verificare ulteriormente il raggiungimento di questo obiettivo si è stabilito il seguente criterio di analisi: essendo i quesiti in tutto 16, si ritiene che uno studente adotti preferibilmente un approccio di tipo intuitivo-geometrico se questi abbia ottenuto un punteggio compreso tra 10 e 16 nelle risposte ai sottoquesiti A. Altrimenti, con una votazione inferiore o uguale a 9, si considera il suo approccio per lo più aritmetico.

Nella tabella riportata nella Figura 3.29 c'è un quadro sintetico utile a confrontare più velocemente l'andamento delle risposte ai sottoquesiti A da un test all'altro.

Si può osservare che nel Pre-test la preferenza di approccio è sostanzialmente identica per i ragazzi del gruppo sperimentale (29%) e per quelli del controllo (23%). Ancora una volta, si evidenzia che i quesiti posti sono di natura strettamente geometrica ma la maggior parte degli alunni preferisce comunque pervenire alla risposta eseguendo calcoli. Ad esempio, nei quesiti si richiede di verificare solo l'equivalenza tra superfici (quesiti 4, 9, 12, 14, 15, 16, 17, 18), gli studenti hanno comunque preferito calcolare esplicitamente l'area delle due figure per verificare essere uguali.

	Gruppo Sperimentale				Gruppo di Controllo			
	Risposta A		Risposta B		Risposta A		Risposta B	
Pre test	≤ 9	≥ 10	≤ 9	≥ 10	≤ 9	≥ 10	≤ 9	≥ 10
N	30	12	31	11	33	10	26	17
%	71	28,57	74	26,19	77	23,26	60	39,53
Post test 1								
N	15	27	23	19	21	23	20	24
%	36	64,29	55	45,24	48	52,27	45	54,55
Post test 2								
N	10	32	15	27	21	22	19	24
%	24	76,19	36	64,29	49	51,16	44	55,81
Δ(PT1 - PrT)								
N		15		8		13		7
%		35,71		19,05		29,02		15,01
Δ(PT2 - PT1)								
N		5		8		-1		0
%		11,90		19,05		-1,11		1,27
Δ(PT2 - PrT)								
N		20		16		12		7
%		47,62		38,10		27,91		16,28

Figura 3.29: Sintesi variazione delle risposte ai quesiti

Per valutare quanto i dati misurati si adattino bene alla funzione teorica ipotizzata viene usato il test del *chi quadrato*: per tal fine, determinate le frequenze osservate e quelle attese, si calcolano i valori del f (tipicamente indicato con χ^2) per i due gruppi distinguendo, al solito, i sottoquesiti A dai B.

Relativamente ai dati raccolti nel Pre-test, dal valore del χ^2 e della probabilità p, si è appreso che la differenza dei punteggi tra sperimentale e controllo non è statisticamente significativa (Figura 3.30); come dire che ci sono 58 probabilità su 100

Sottoquesiti A

	Pre test	Post test 1	Post test 2
χ^2	0,313	1,274	5,744
gradi di libertà	1	1	1
p	0,58	0,26	0,02

Figura 3.30: Risultati analisi tramite il test del chi quadrato

che la differenza tra i risultati sia dovuta al caso. Ciò è una ulteriore testimonianza che i dati ottenuti nelle due distribuzioni (sperimentale e controllo) sono sostanzialmente quelli attesi e cioè molto vicini tra di loro essendo stati gli studenti dei due gruppi scelti a caso. Anche i grafici della Figura 3.31 sono testimonianza dei risultati analoghi dei due gruppi.

Subito dopo i trattamenti nelle classi dei gruppi sperimentali e di controllo si è fatto eseguire il Post-test 1. Dalla sintesi dei dati raccolti (Figura 3.29) è evidente come l'approccio degli studenti si sia modificato sensibilmente: è aumentato di 36 punti percentuali per il gruppo sperimentale (essendo divenuti il 64% gli studenti che hanno risposto per via intuitiva-geometrica) e di 29 punti percentuali per il gruppo di controllo (essendo divenuti il 52%). Tale differenza, anche rispetto a questa analisi, non è ancora statisticamente significativa come si può sempre verificare nella tabella della Figura 3.30 e nei grafici della Figura 3.32 che ancora non evidenziano una sostanziale differenza nelle risposte dei due gruppi.

Sei mesi dopo il Post-test 1 è stato somministrato il Post-test 2. Per quanto riguarda sempre le risposte ai sottoquesiti A, il gruppo sperimentale ha evidenziato un ulteriore miglioramento di 12 punti percentuali (Figura 3.29): infatti, al momento del test, il 76% degli studenti ha manifestato un approccio intuitivo-geometrico. Invece, il gruppo di controllo, è rimasto sostanzialmente stabile perché ancora il 51% degli studenti ha risolto i quesiti mediante tale approccio. Il fatto importante è fornito dal test del chi quadrato: attraverso di esso si stabilisce che tale differenza, tra i risultati del gruppo sperimentale e di controllo è, a questo punto, statisticamente significativa (tabella della Figura 3.30).

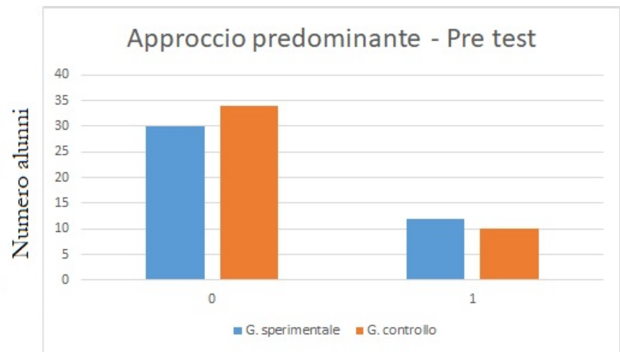


Figura 3.31: Approccio risolutivo predominante nel Pre-test

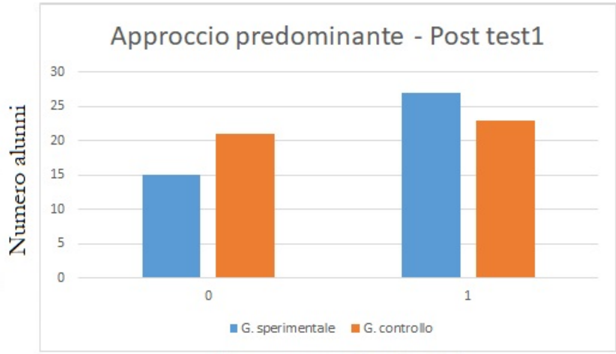


Figura 3.32: Approccio risolutivo predominante nel Post-test 1

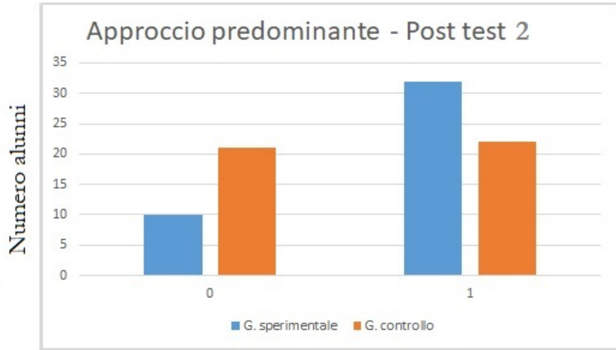


Figura 3.33: Approccio risolutivo predominante nel Post-test 2

Anche nel grafico riportato in Figura 3.33 la preferenza di approccio intuitivo-geometrico per il gruppo sperimentale è evidente.

3.8.1 Confronto tra quesiti omologhi nei 3 test

In questo paragrafo si effettua un'analisi, prettamente di natura matematica, sui quesiti e le relative risposte per evidenziare eventuali differenze sorte tra il Pre-test e i due Post-test. Tale analisi dovrebbe facilitare e, talvolta, completare la lettura e l'interpretazione degli istogrammi della Figura 3.34 e della Figura 3.35 ai quali s'invita sempre a fare riferimento ogni qualvolta c'è un richiamo ai dati ottenuti. Le osservazioni che qui si riportano sono tratte da appunti raccolti durante l'esecuzione delle singole attività per rilevare espressioni verbali utilizzate dagli studenti, disegni e rappresentazioni con i matariali utilizzati. Il tutto è documentabile non solo con materiale cartaceo ma anche mediante riproduzioni audio e moltissime fotografie. Tutto questo lavoro, tenendo in considerazione il fatto che è la prima volta che si è proposto un test di questo tipo, è estremamente importate per migliorare in futuro i quesiti, i trattamenti e ogni altro aspetto dell'esperimento realizzato.

Quesiti del Blocco 1 (Quesito 2 e 3). Dall'analisi delle risposte al Pre-test è evidente che ci sono studenti, sia nel gruppo sperimentale che di controllo, che non forniscono il fattore di molteplicità che rappresenta quante volte l'area del poligono più grande è maggiore di quella del più piccolo perchè la loro risposta è relativa alla

ΔA(PT1 - PrT)

	2A	3A	4A	6A	7A	8A	9A	11A	12A	14A	15A	16A	17A	18A	19A	20A
Spe	3	-3	8	-6	5	4	14	8	10	7	0	5	6	8	8	24
Cont	14	8	16	-6	9	2	15	3	11	12	9	19	8	14	3	23

ΔA(PT2 - PT1)

	2A	3A	4A	6A	7A	8A	9A	11A	12A	14A	15A	16A	17A	18A	19A	20A
Spe	13	11	2	18	4	1	-2	0	6	0	8	6	7	4	-8	-12
Cont	-3	2	0	16	-1	4	-4	-1	-2	-11	0	-5	0	-4	-1	-13

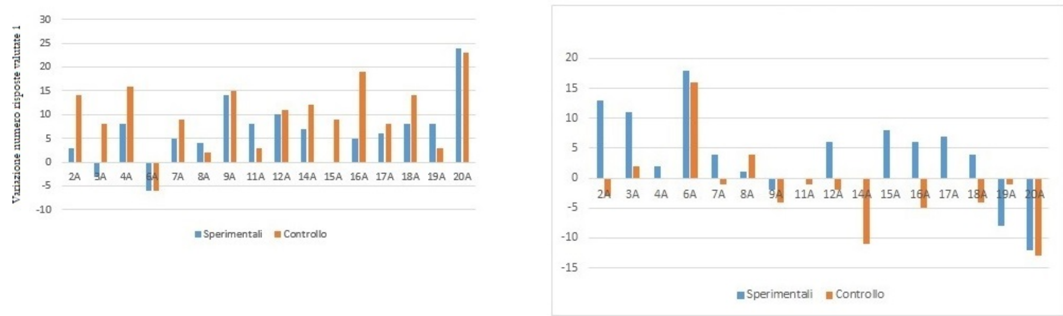


Figura 3.34: Variazione delle risposte ai singoli Sottoquesiti A

ΔB(PT1 - PrT)

	2B	3B	4B	6B	7B	8B	9B	11B	12B	14B	15B	16B	17B	18B	19B	20B
Spe	4	1	2	4	3	-11	5	6	9	2	1	2	3	9	3	24
Cont	3	8	5	1	1	-8	-5	8	7	1	-6	3	5	9	6	29

ΔB(PT2 - PT1)

	2B	3B	4B	6B	7B	8B	9B	11B	12B	14B	15B	16B	17B	18B	19B	20B
Spe	0	2	5	0	3	10	17	3	4	6	11	5	10	2	-4	-17
Cont	4	-3	2	1	4	7	9	-7	1	-4	4	-5	0	2	4	-19

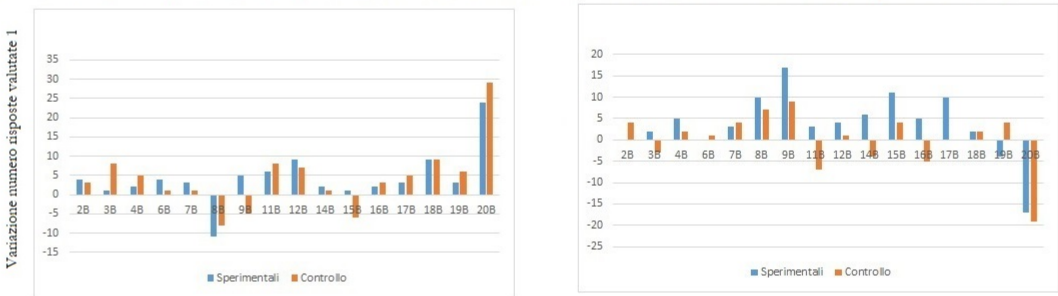


Figura 3.35: Variazione delle risposte ai singoli Sottoquesiti B

differenza delle aree delle due superfici piuttosto che al rapporto. Tale gruppetto di studenti che non risponde correttamente, benché si riduca nel tempo, non sparisce mai del tutto. Cambia invece, in generale, in entrambi i gruppi con leggera predominanza di quello sperimentale, l'approccio che tende all'intuitivo-geometrico.

Quesiti del Blocco 3 (Quesito 6 e 7). Si parte dal confronto del Quesito 6 dato nel Pre-test e nel Post-test 1 (i disegni relativi sono in Figura 3.36): era richiesto di determinare l'area del poligono di colore grigio essendo forniti direttamente i dati in figura. Dalle risposte si evince che i ragazzi di entrambi i gruppi si affidano ai calcoli per risolvere. Nel Post-test 2, il quesito è identico a quello analogo del Pre-test, eppure i ragazzi cambiano l'approccio in quello intuitivo-geometrico. Queste variazioni, presumibilmente, risentono dalla diversità delle figure fornite nei test. Infatti, benché sono la rappresentazione di due quesiti che hanno le medesime finalità, sono molto diverse tra loro: nella prima è facile riconoscere, da un'osservazione generale, un rettangolo al quale è stato sottratto e aggiunto lo stesso poligono anche questo facilmente riconoscibile in un quadrato. Nella seconda, invece, il riconoscimento di un rettangolo al quale è stato sottratto e aggiunto lo stesso poligono non è altrettanto facile. Ciò dipende, prima di tutto, dal fatto che la parte eccedente e mancante

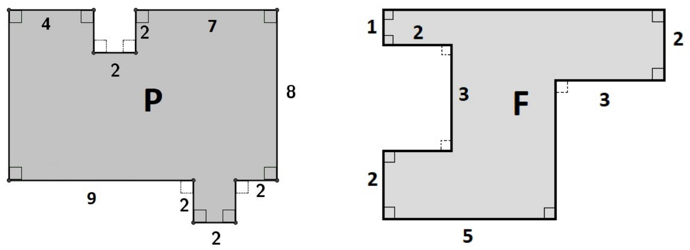


Figura 3.36: Confronto tra la figura del Quesito 6 del Pre-test con quella dello stesso quesito del Post-test 1

non hanno la forma di un quadrato bensì di un rettangolo; inoltre, tale forma rettangolare, quando rappresenta la lacuna non è orientata allo stesso modo di quando rappresenta l'eccedenza. Non percependo dunque il rettangolo grande alcuni studenti hanno tentato di risolvere il quesito spezzando la figura in tante parti di cui si è calcolata per ognuna l'area. Essendo, talvolta, tale suddivisione fatta mediante un numero eccessivo di parti se ne è perso il conto totale comettendo così errori. In altri casi, si è magari effettuata correttamente la suddivisoni in parti la cui somma restituisce la figura intera ma si sono commessi errori per determinare la lunghezza dei lati di tali figure: per esempio, osservando il poligono **F**, la lunghezza del suo lato «sinistro» è stata determinata, in alcuni casi, facendo $1 + 2 + 3 + 2$, inserendo dunque, in tale conteggio, anche i tratti perpendicolari al lato stesso.

Si vuole evidenziare un altro fatto: quei ragazzi che non sono riusciti a percepire correttamente la figura data come un rettangolo si sono aggrappati ad un tentativo estremo che per loro era costituito dall'applicazione di una qualche formula; ecco perchè, in alcuni casi, hanno sommato le lunghezze di tutti i lati della figura (confondendo il calcolo del perimetro con quello dell'area). In altri, è presumibile che si sia riconosciuto che la figura fosse un rettangolo ma si sono applicate formule improbabili per determinarne l'area (la più frequente è il prodotto di tutti i lati, una sorta di «generalizzazione» della formula dell'area del rettangolo).

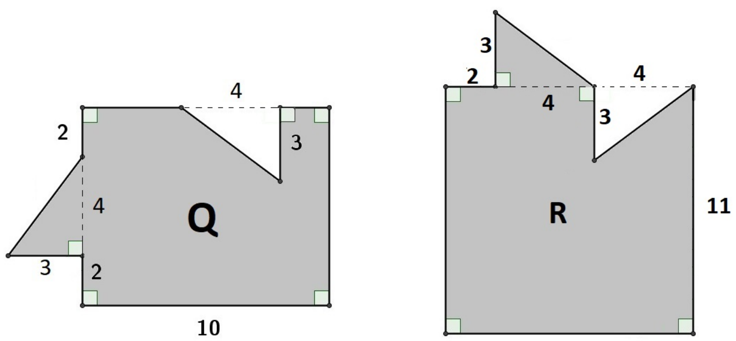


Figura 3.37: Confronto tra la figura del Quesito 7 del Pre-test con quella dello stesso quesito del Post-test 1

Si passa ora al confronto tra le risposte al Quesito 7 del Pre-test e nel Post-test 1 (i disegni relativi si possono confrontare in Figura 3.37). Le due figure presentano, diversamente da quelle del Quesito 6, medesime difficoltà. Infatti, sia nel Pre che nel Post-test 1, gli studenti commettono le stesse tipologie di errore. Tuttavia, nel Post-test 1, cala drasticamente il numero delle persone che risponde calcolando il perimetro invece che l'area. Inoltre, spariscono quasi del tutto le risposte nelle quali il poligono iniziale viene decomposto in poligoni più piccoli. Aumentano sensibilmente (quasi il doppio), invece, il numero delle persone che commettono errori nella determinazione dei lati del poligono: ciò potrebbe dipendere dal fatto che la figura fornita nel Post-test 1 presenta i dati del quesito fisicamente più vicini rispetto a quelli presenti nella figura nel Pre-test comportando, in questo modo, più difficoltà nella lettura.

Un'osservazione conclusiva: il quesito 7, nel Pre-test, quando proposto dopo il 6, ha avuto più risposte corrette: molti errori commessi nel 6 non vengono ripetuti nel 7. Come dire che il 6 ha svolto funzione correttrice.

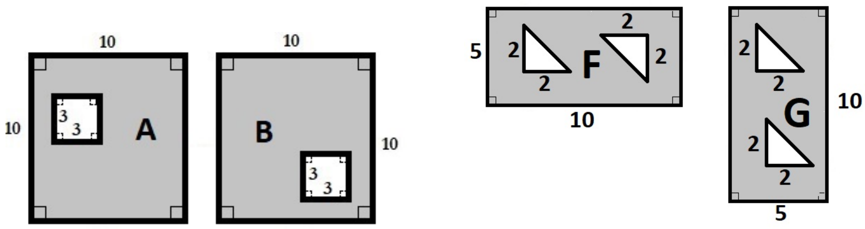


Figura 3.38: Confronto tra la figura del Quesito 8 del Pre-test con quella dello stesso quesito del Post-test 1

Quesiti del Blocco 4 (Quesito 8 e 9). I disegni della Figura 3.38 sono relativi al Quesito 8 dato nel Pre-test e nel Post-test 1: l'approccio evidenziato nelle risposte rimane per lo più intuitivo-geometrico per il gruppo sperimentale e per lo più aritmetico per quello di controllo. Quindi da questo punto di vista non ci sono cambiamenti tra i due test. Tuttavia in quest'ultimo peggiorano sensibilmente le risposte corrette in entrambi i gruppi. Una possibile causa può essere che nella prima figura il «buco» ha una forma quadrata mentre nella seconda ci sono due «buchi», costringendo gli studenti a fare più calcoli (non si riconosce che, evidentemente, i due «buchi» uniti formano il medesimo «buco» quadrato della prima figura).

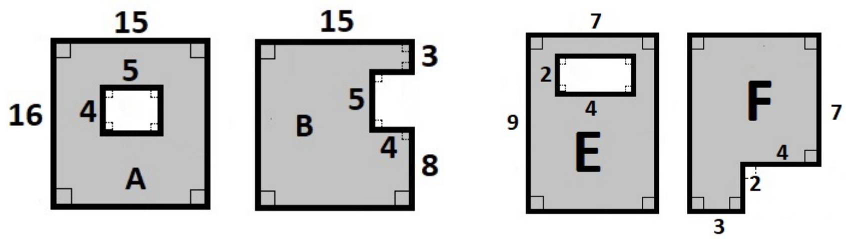


Figura 3.39: Confronto tra la figura del Quesito 9 del Pre-test con quella dello stesso quesito del Post-test 1

Nella Figura 3.39 sono riportati i disegni del Quesito 9 del Pre-test e del Post-test 1: questi sono abbastanza simili pur tuttavia con qualche differenza che sarebbe stato meglio evitare. Nel primo ci sono due rettangoli che, per il fatto di avere i lati consecutivi quasi uguali, possono essere stati confusi con due quadrati. Le lacune sono una centrale e l'altra dul bordo. Il secondo disegno non presenta più l'ambiguità con il quadrato ma la lacuna di una delle due figure è in un angolo. Ciò, sappiamo, rischia di alterare la corretta percezione della figura perché si è eliminato un tratto che caratterizza il rettangolo (ricordare il Paragrafo 1.11 nel Capitolo 1).

Ad ogni modo, dalle risposte fornite al Quesito 9, si può dedurre un netto passaggio da un approccio prettamente aritmetico ad uno geometrico in entrambi i gruppi. Non migliorano, tuttavia, i risultati che rimangono stabili e non positivi. Miglioreranno, invece, nel Post-test 2.

Relazioni tra il Quesito 4 del Blocco 2, il Quesito 17 e il Quesito 18 del Blocco 6. Come già accennato quando si è descritto il Blocco 2 e il Blocco 6 (per la precisione, quesiti denominati di tipo 2) nel Paragrafo 3.6.1, si vogliono evidenziare possibili relazioni tra le risposte fornite ai quesiti dei due blocchi. Il tema generale trattato è il riconoscimento di figure equicomposte. Si ricorda che, nel Quesito 4, i poligoni componenti sono traslati l'uno rispetto all'altro mentre, nel quesiti 17 e 18, le parti componenti sono invece ruotate o simmetriche. Si osserva innanzi tutto che, nel Pre-test, la parola «equicomposizione» non viene mai utilizzata da nessun studente di entrambi i gruppi. Comincia, invece, a comparire nel Post-test 1. In alternativa a tale termine viene frequentemente utilizzata l'espressione: «le due figure sono costituite dagli stessi parallelogrammi (o dagli stessi triangoli)», senza specificare che debbono anche essere in ugual numero.

In generale, tra le risposte date ai sottoquesiti A, si evidenzia che il maggior numero di calcoli si concentra sugli esercizi dei due blocchi che vengono affrontati per primi. In un certo senso, questi, vengono risolti con la metodologia più familiare, poi successivamente, anche a causa del tempo che a mano a mano si riduce e alla somiglianza dei quesiti successivi, si propende per una risoluzione priva di calcoli.

Un'altra caratteristica, più evidente in questi quesiti che negli altri, è che nel Pretest si possono riconoscere molte tipologie di risposte date. Nel Post-test 1, invece, è evidente come gli studenti riescano a riconoscere i 3 quesiti all'interno della stessa famiglia tanto che le strategie risolutive utilizzate, così come anche la terminologia, sono praticamente le stesse.

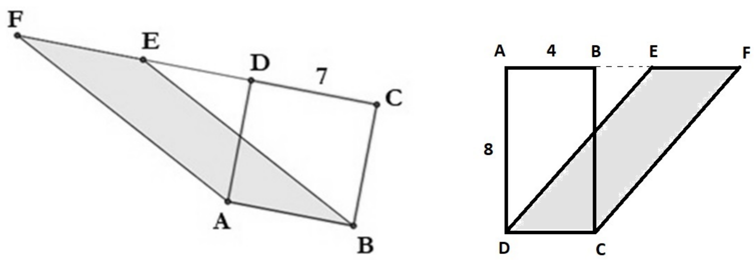


Figura 3.40: Confronto tra la figura del Quesito 20 del Pre-test con quella dello stesso quesito del Post-test 1

Quesito 20 del blocco 7. Le considerazioni che verrano qui di seguito riportate provengono, sostanzialmente, sia dalle risposte fornite dagli studenti del gruppo sperimentale sia da quelle del gruppo di controllo. Il disegno del Quesito 20 nel Pre-test presenta delle differenze con quello relativo nel Post-test 1. Le risposte degli studenti ne sono testimonianza. Nel Pre-test, quando gli studenti hanno a che fare con il primo dei due disegni riportato in Figura 3.40, la maggior parte di loro non si accorge dell'equivalenza delle due figure; viceversa, ciò accade nel Post-test 1. Le risposte esatte, invece, sono sempre la maggioranza, il che fa pensare che nel Pre-test molti si siano buttati a indovinare. Nel Post-test 2, quando gli studenti si ritrovano di nuovo la prima delle due figure, questi manifestano le medesime difficoltà del Pre-test.

E' presumibile che gli studenti facciano fatica a percepire il quadrato come un particolare parallelogramma; del resto, nell'Attività 5 precedentemente descritta, si sono fatti utilizzare strumenti che renderessero esplicita l'equivalenza tra parallelogrammi aventi la stessa base e fossero racchiusi tra le medesime parallele. Pertanto, anche grazie a tale attività (così come a quella equivalente fatta fare agli studenti del gruppo di controllo), gli studenti hanno imparato a riconoscere più facilmente l'equivalenza tra i parallelogrammi del secondo disegno della Figura 3.40 ma non sono riusciti a generalizzare anche al quadrato. Una piccola nota positiva sta nel fatto comunque, nel Post-test 2, c'è un aumento delle risposte corrette.

3.9 Conclusioni al capitolo

A conclusione dello studio effettuato in questo paragrafo sull'andamento nel tempo dei singoli studenti, emerge dalla lettura della sintesi dei dati che, subito dopo i trattamenti, i ragazzi appartenenti ai due gruppi, sia sperimentale che di controllo, dimostrano di aver modificato il loro approccio risolutivo da artimetico a intuitivo-geometrico e di aver migliorarato il numero delle risposte esatte. Dopo un periodo di tempo di circa 6 mesi, i ragazzi del gruppo di controllo non mantengono sempre i medesimi risultati ottenunti nel precedente test. Viceversa, aumentano i ragazzi del gruppo sperimentale che modificano il loro approccio risolutivo e che risolvono correttamente un maggior numero di quesiti.

Conclusioni

Si è potuto constatare che lo svolgimeno di esperimenti comportamentali all'interno di scuole presenta diversi tipi di criticità non facilmente risolubili. Le seguenti sono quelle ritenute più importanti:

- interruzione del piano di lavoro stabilito dai docenti curriculari;
- difficoltà a costituire gruppi eterogenei mescolando gli studenti delle varie classi;
- disponibilità di ambienti idonei per poter realizzare in maniera adeguata le attività laboratoriali;
- isolamento degli studenti dalle numerose dinamiche scolastiche quotidiane (introduzione in aula di docenti, collaboratori, studenti, ecc) per favorire la concentrazione;
- disponibilità di più esperti, adeguatamente formati, per la conduzione dei trattamenti, la correzione dei test ecc.;

Oltre a queste problematiche di natura logistica-organizzativa, si aggiungono problematiche etiche: non si ritiene opportuno, all'interno della stessa scuola, effettuare interventi mirati solo ad un determinato gruppo di studenti, quello sperimentale, così come i disegni di ricerca usuali prevederebbero. Si creerebbero delle disparità non accettabili.

Alla fine si è deciso di effettuare tutte le attività in orario curriculare lasciando gli studenti all'interno delle proprie classi di appartenenza. Inoltre, gli argomenti affrontati nei trattamenti, come visto, hanno riguardato tematiche disciplinari inserite nel piano di lavoro di qualsiasi insegnante. Il disegno di ricerca utilizzato ha previsto dunque attività mirate, (sempre condotte dal sottoscritto), sia per il gruppo sperimentale che per quello di controllo che fossero formative e utili per tutti ai fini scolastici e che avessero i medesimi obiettivi, ossia lo sviluppo delle capacità intuitivo-geometriche.

Qui di seguito viene riportata una sintesi dei risultati osservati.

Il t-test ci dice che i trattamenti effettuati producono delle differenze significative tra le medie misurate nel Post-test 1 e nel Pre-test sia per il gruppo sperimentale che di controllo: ciò ha riguardato sia la modalità di approccio che la correttezza delle risposte fornite ai quesiti. Tale risultato era atteso perchè su entrambi i gruppi sono stati effettuati trattamenti pensati per incidere in maniera diretta su aspetti legati al tipo di quesiti somministrati.

Diversamente, si è rilevata l'esistenza di una differenza significativa tra i risultati del Post-test 2 e quelli del Post-test 1 ma, in questo caso, solo nel gruppo sperimentale. In sostanza, dalla semplice analisi delle medie, si riscontra che la preferenza per l'approccio intuitivo-geometrico resiste solo in tale gruppo al passare del tempo e ciò influisce anche sulla correttezza delle risposte fornite ai quesiti.

Un secondo tipo di analisi è stata condotta per valutare in maniera più specifica l'approccio predominante degli studenti utilizzato per risolvere i quesiti: a tal fine, mediante il test del chi quadrato si è voluto constatare se la differenza dei punteggi tra gli studenti del gruppo sperimentale e quelli del gruppo di controllo fosse significativa da un punto di vista statistico. Ciò è risultato negativo dal Pre-test al Post-test 1; invece, è risultato positivo tra il Post-test 1 e il Post-test 2. Infatti, i ragazzi del gruppo sperimentale hanno continuato a preferire un approccio intuitivo-geometrico; anzi, per la precisione, il numero di coloro che ha manifestato tale preferenza è addirittura aumentato. Invece, il numero degli studenti del gruppo di controllo che preferiva risolvere con approccio intuitivo-geometrico, è rimasto sostanzialmente stabile.

Si può dunque affermare che le congetture avanzate sono state tutte confermate. Queste possono essere così sintetizzate:

1. prima degli interventi mirati l'approccio predominante di tutti gli studenti nel risolvere quesiti di natura geometrica era per lo più aritmetico;

2. gli interventi volti a far estrapolare le proprietà strettamente geometriche delle figure ha fatto immediatamente cambiare la modalità prevalente risolutrice di tali problemi a tutti gli studenti di entrambi i gruppi;

3. la modalità di approccio intuitivo-geometrica, a distanza di 6 mesi dall'inizio dell'esperimento, ha resistito per lo più nel gruppo sperimentale. Questa preferenza, sebbene non macroscopicamente evidente tra gruppo sperimentale e di controllo, è tuttavia significativa da un punto di vista statistico;

4. il mantenimento dell'approccio intuitivo-geometrico nel gruppo sperimentale è da attribuirsi al miglioramento delle capacità percettive degli studenti. Evidentemente, l'uso dei materiali didattici che concretizzano enti matematici astratti, è riuscito a costituire modelli mentali adeguati; ciò ha generato una maggiore fiducia nell'approccio intuitivo-geometrico tale da essere utilizzato in maniera sistematica nella risoluzione dei quesiti;

5. inoltre, l'utilizzo di materiali, per quanto detto nel Capitolo 1, è in grado di attivare e far comunicare tra loro più neuroni di aree distinte della nostra corteccia cerebrale: è l'esistenza di queste connessioni che permette il recupero più spontaneo di tali modelli.

Passi futuri. Fin dall'inizio, si era consapevoli che il tipo d'indagine da svolgere fosse abbastanza insolita e, per questo, poco supportata da studi analoghi. Gli errori commessi sono anche derivati dalla poca possibilità di fare confronti. Tali errori, a nostro avviso, non hanno consentito di ottenere risultati molto evidenti tra i due gruppi testati, seppur significativi dal punto di vista statistico; per questo i risultati raggiunti incoraggiano a indagare ulteriormente nella direzione intrapresa. In conclusione, si vogliono accennare i passi che in futuro si vogliono intraprendere che possano permettere di non commettere più i medesimi errori:

1. esperimenti di tal genere debbono essere sicuramente condotti nelle scuole in orario curriculare; va avviato un protocollo d'intesa scuole-università che permetta di organizzare degli incontri esplicativi del progetto per coinvolgere attivamente anche gli insegnanti delle classi coinvolte. Il loro apporto è determinante per sensibilizzare gli studenti e le famiglie al massimo impegno durante le fasi sperimentali;

2. nei giorni dei test e dei trattamenti, occorre interrompere la didattica quotidiana al fine di mescolare gli studenti delle classi;

3. considerando di impegnare gli studenti su tematiche disciplinari curriculari si può considerare di dedicare più ore ai trattamenti ideati;

4. i medesimi quesiti non vanno modificati in alcun modo tra un test e l'altro se non nei dati numerici iniziali: in particolar maniera, le figure relative devono essere identiche. Ciò deve essere soprattutto rispettato tra il test iniziale e quello somministrato subito dopo i trattamenti. Tutt'al più, per verificare l'eventuale sviluppo di capacità di generalizzazione, si potrebbe effettuare un test apposito costituito da quesiti simili ma non uguali a quelli dei precedenti. Inoltre, per monitorare l'acquisizione di tale competenza se ne portà somministrare un'altro identico molto tempo dopo.

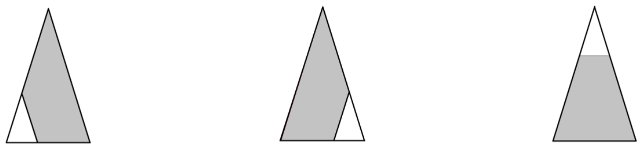
5. i trattamenti debbono essere condotti da docenti debitamente formati e che non siano appartenenti alle scuole interessate all'esperimento;

6. tali docenti debbono anche provvedere alla correzione dei quesiti; è opportuno, inoltre, che ciascun quesito sia corretto da più docenti.

Appendices

Esercizi - Attività 1

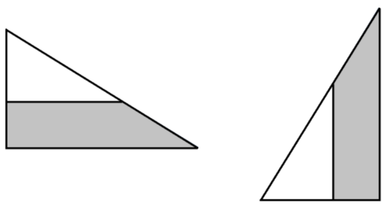
1. I triangoli in figura sono tutti isosceli; stabilisci quali tra le figure di color grigio sono:
a) uguali; b) equivalenti; c) isoperimetriche.



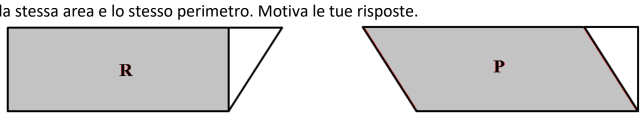
Domanda: Come si dovrebbe scegliere il triangolo maggiore affinché tutte le aree di color grigio siano uguali?

2) I triangoli in figura sono tutti equilateri; stabilisci se le due figure di color grigio sono equivalenti ed isoperimetriche. Motiva le tue risposte.

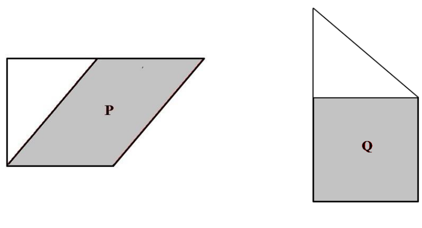
3. Tutti i triangoli in figura sono rettangoli; stabilisci se le due figure di color grigio sono equivalenti, uguali ed isoperimetriche. Motiva le tue risposte.



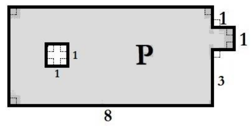
4. Nelle due figure ci sono 2 trapezi rettangoli; stabilisci se R e P di color grigio contenuti in ciascuno di esso, hanno la stessa area e lo stesso perimetro. Motiva le tue risposte.



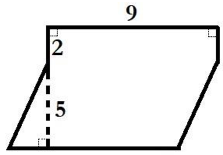
5. Nelle due figure ci sono 2 trapezi rettangoli; stabilisci se P e Q di color grigio in esso contenuti hanno la stessa area e lo stesso perimetro. Motiva le tue risposte.



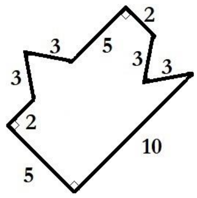
6. Determina l'area della superficie **P.**
Motiva la tua risposta.



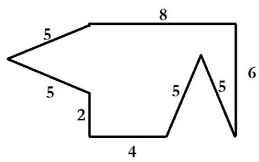
7. Determina l'area del poligono in figura.
Motiva la tua risposta.



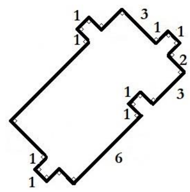
8. Determina l'area del poligono in figura.
Motiva la tua risposta.



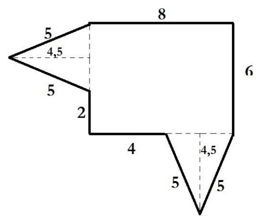
9. Determina l'area del poligono in figura.
Motiva la tua risposta.



10. Determina l'area del poligono in figura.
Motiva la tua risposta.

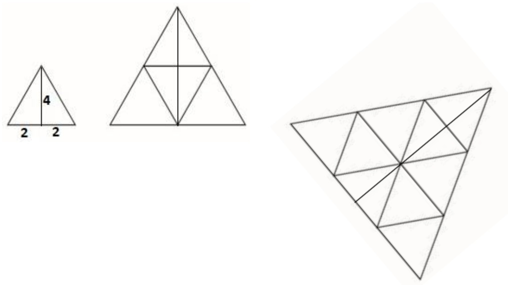


11. Determina l'area del poligono in figura.
Motiva la tua risposta.

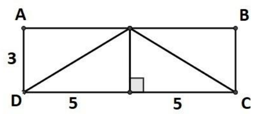


Esercizi Attività 2

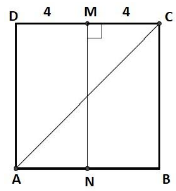
12) Determina l'area dei tre triangoli in figura, conoscendo i dati forniti.



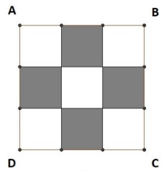
13)Trova l'area di ciascun dei 4 triangoli in figura.



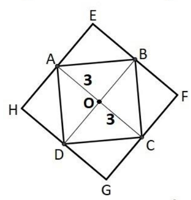
14) ABCD è un quadrato; il triangolo ACD è equivalente al rettangolo NBCM? Motiva, come meglio credi, la tua risposta.



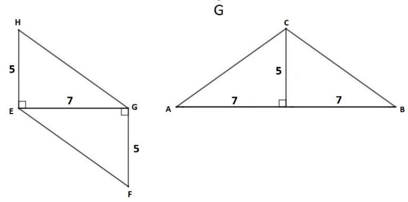
15) Il quadratino bianco ha lato 2. Quante volte l'area del quadrato ABCD è maggiore dell'area di questo quadratino bianco?



16) Quante volte il triangolo AOB è più piccolo del quadrato EFGH? E del rettangolo AEFC? Motiva, come meglio credi, la tua risposta.

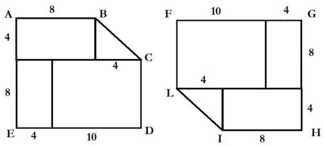


17) Chi tra ABC e EFGH ha la superficie maggiore? Motiva, come meglio credi, la tua risposta.

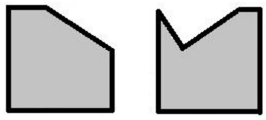


Attività 3_ Esercizi

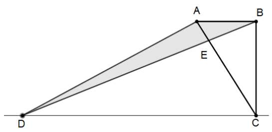
18) Verificare che i poligoni qui a lato abbiano la stessa area.



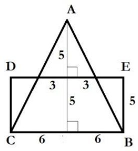
19) Sai dire se i due poligoni qui di fianco sono equivalenti? Motiva la tua risposta.



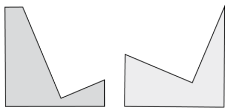
20) Il triangolo ABC della figura a lato misura 20. L'area del triangolo ABD è maggiore, uguale o minore di 20? Motiva la tua risposta.



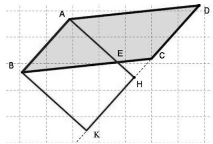
21) Verificare che il triangolo ABC ha la stessa area del rettangolo BCDE.



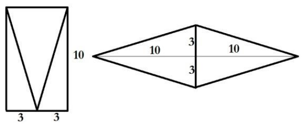
22) Sai dire se i due poligoni qui di fianco sono equivalenti? Motiva la tua risposta.



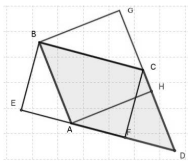
23) AB = 9 e AH = 18. L'area del rettangolo ABCD è maggiore, minore o uguale a quella di ABKH?



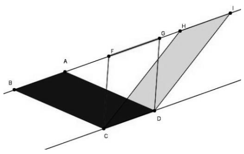
24) Stabilisci se i due poligoni in figura sono equivalenti possibilmente senza fare calcoli. Motiva la tua risposta.



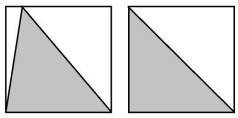
25) Il lato del quadrato AB misura 5. Determina l'area del rettangolo BCFE.



26) Si può affermare che i tre seguenti parallelogrammi abbiano la stessa area? Motiva la tua risposta.



27) QUalcuno sostiene che I due triangoli di color grigio non abbiano la stessa area. Sei d'accordo? Motiva la tua risposta.



Indice

Bibliografia

[1] Michael Andres et al. «Time course of number magnitude interference during grasping». In: *Cortex* 44.4 (2008), pp. 414–419.

[2] Michael A Arbib e VB Brooks. «Handbook of physiology–the nervous system II. Motor control». In: (1981).

[3] Irving Biederman. «Recognition-by-components: a theory of human image understanding.» In: *Psychological review* 94.2 (1987), p. 115.

[4] Emma Castelnuovo. «Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria intuitiva». In: *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* 6.1 (2013), pp. 137–148.

[5] Emma Castelnuovo, Ferdinando Arzarello e Maria Giuseppina Bartolini. *Didattica della matematica.* La Nuova Italia Firenze, 1963.

[6] Laura Catastini. «Concretamente astratto, anzi... simulabile». In: *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* 2.1 (2009), pp. 31–69.

[7] Laura Catastini. *Il pensiero allo specchio.* La Nuova Italia, 1990.

[8] Laura Catastini. *Noi e la matematica.* il Mulino, 2017.

[9] Laura Catastini e Franco Ghione. «Immagini analogie e sassolini nei pitagorici». In: *Punti Critici* II.3 (2000), p. ....

[10] Mark Changizi. *The vision revolution: How the latest research overturns everything we thought we knew about human vision.* BenBella Books, 2010.

[11] Laila Craighero et al. «Action for perception: a motor-visual attentional effect.» In: *Journal of experimental psychology: Human perception and performance* 25.6 (1999), p. 1673.

[12] Laila Craighero et al. «Evidence for visuomotor priming effect». In: *Neuroreport* 8.1 (1996), pp. 347–349.

[13] Stanislas Dehaene. *I neuroni della lettura.* Milano, Raffaello Cortina, 2009.

[14] Stanislas Dehaene, Serge Bossini e Pascal Giraux. «The mental representation of parity and number magnitude.» In: *Journal of Experimental Psychology: General* 122.3 (1993), p. 371.

[15] Stanislas Dehaene et al. «The neural code for written words: a proposal». In: *Trends in cognitive sciences* 9.7 (2005), pp. 335–341.

[16] Jean-René Duhamel, Carol L Colby e Michael E Goldberg. «Ventral intraparietal area of the macaque: congruent visual and somatic response properties». In: *Journal of neurophysiology* 79.1 (1998), pp. 126–136.

[17] Karl Duncker, Fernando Dogana e Guido Petter. *La psicologia del pensiero produttivo*. Giunti, 1973.

[18] Federigo Enriques, Franco Ghione e Mauro Moretti. *Insegnamento dinamico*. Agorà, 2003.

[19] Nicola Falocci et al. «La validazione statistica di test standardizzati di profitto: principali aspetti di metodo e due casi di studio sulla valutazione degli apprendimenti nella scuola primaria». In: (2010).

[20] Martin H Fischer et al. «Perceiving numbers causes spatial shifts of attention». In: *Nature neuroscience* 6.6 (2003), pp. 555–556.

[21] Leonardo Fogassi et al. «Coding of peripersonal space in inferior premotor cortex (area F4)». In: *Journal of neurophysiology* 76.1 (1996), pp. 141–157.

[22] Francis Galton. «Visualised numerals.» In: *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland* 10 (1881), pp. 85–102.

[23] Giamblico. *Il numero e il divino*. Rusconi Libri, 1995.

[24] JJ Gibson. *The ecological approach to visual perception. Boston, MA, US*. 1979.

[25] Michael SA Graziano, Lina AJ Reiss e Charles G Gross. «A neuronal representation of the location of nearby sounds». In: *Nature* 397.6718 (1999), pp. 428–430.

[26] Maria Dolores de Hevia et al. «At birth, humans associate "few" with left and "many" with right». In: *Current Biology* 27.24 (2017), pp. 3879–3884.

[27] Edward M Hubbard et al. «Interactions between number and space in parietal cortex». In: *Nature Reviews Neuroscience* 6.6 (2005), p. 435.

[28] Véronique Izard et al. «Newborn infants perceive abstract numbers». In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 106.25 (2009), pp. 10382–10385.

[29] Pierre Jacob e Marc Jeannerod. «Ways of seeing: The scope and limits of visual cognition». In: (2003).

[30] Marc Jeannerod. «Intersegmental coodination during reaching at natural visual objects». In: *Attention and performance* (1981), pp. 153–169.

[31] M Jeannerod et al. «Grasping objects: the cortical mechanisms». In: *Trends Neurosci* 18 (1995), pp. 314–32.

[32] Gunnar Johansson. «Visual perception of biological motion and a model for its analysis». In: *Perception & psychophysics* 14.2 (1973), pp. 201–211.

[33] Philip Nicholas Johnson-Laird e Alberto Mazzocco. *Modelli mentali: verso una scienza cognitiva del linguaggio, dell'inferenza e della coscienza*. Il mulino, 1988.

[34] Kerry E Jordan e Elizabeth M Brannon. «The multisensory representation of number in infancy». In: *Proceedings of the National academy of Sciences* 103.9 (2006), pp. 3486–3489.

[35] Kerry E Jordan et al. «Monkeys match the number of voices they hear to the number of faces they see». In: *Current Biology* 15.11 (2005), pp. 1034–1038.

[36] André Knops et al. «Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic». In: *Science* 324.5934 (2009), pp. 1583–1585.

[37] Frank J Lee e Niels A Taatgen. «Multitasking as skill acquisition». In: *Proceedings of the annual meeting of the cognitive science society*. Vol. 24. 24. 2002.

[38] Augusto Marinoni. *Il Codice Atlantico di Leonardo da Vinci*. Giunti, 2000.

[39] Romain Mathieu et al. «Running the number line: Rapid shifts of attention in single-digit arithmetic». In: *Cognition* 146 (2016), pp. 229–239.

[40] James L McClelland e David E Rumelhart. «An interactive activation model of context effects in letter perception: I. An account of basic findings.» In: *Psychological review* 88.5 (1981), p. 375.

[41] Koleen McCrink e Karen Wynn. «Large-number addition and subtraction by 9-month-old infants». In: *Psychological Science* 15.11 (2004), pp. 776–781.

[42] George Herbert Mead. «The Philosophy of the Act, ed». In: *Morris, W. Charles with John M. Brewster, Albert M. Dunham, and David Miller. Chicago: University of Chicago* (1938).

[43] Yasushi Miyashita. «Neuronal correlate of visual associative long-term memory in the primate temporal cortex». In: *Nature* 335.6193 (1988), pp. 817–820.

[44] Maria Montessori. *Psicogeometria: dattiloscritto inedito*. Opera nazionale Montessori, 2011.

[45] Akira Murata et al. «Object representation in the ventral premotor cortex (area F5) of the monkey». In: *Journal of neurophysiology* 78.4 (1997), pp. 2226–2230.

[46] Andreas Nieder, David J Freedman e Earl K Miller. «Representation of the quantity of visual items in the primate prefrontal cortex». In: *Science* 297.5587 (2002), pp. 1708–1711.

[47] Andreas Nieder e Katharina Merten. «A labeled-line code for small and large numerosities in the monkey prefrontal cortex». In: *Journal of Neuroscience* 27.22 (2007), pp. 5986–5993.

[48] Hans-Christoph Nuerk, Guilherme Wood e Klaus Willmes. «The universal SNARC effect: The association between number magnitude and space is amodal». In: *Experimental psychology* 52.3 (2005), pp. 187–194.

[49] Daniele Pasquazi. «Geometria e percezione nella risoluzione di problemi aritmetici». In: *Alice* (2019), pp. 82–93.

[50] Daniele Pasquazi. «I radicali quadratici: un approccio geometrico senso percettivo orientato alla formazione delle basi del pensiero razionale». In: *Progetto Alice* XIX.56, II (2018), pp. 310–334.

[51] Daniele Pasquazi. «La quadratura in moto». In: *Progetto Alice* XVII.49 (2016), p. 137.

[52] Daniela Perani et al. «Different neural systems for the recognition of animals and man-made tools.» In: *NeuroReport: An International Journal for the Rapid Communication of Research in Neuroscience* (1995).

[53] Jean-Luc Petit. «Constitution by movement: Husserl in light of recent neurobiological findings». In: (1999).

[54] Michael Petrides e Deepak N Pandya. «Projections to the frontal cortex from the posterior parietal region in the rhesus monkey». In: *Journal of Comparative neurology* 228.1 (1984), pp. 105–116.

[55] Manuela Piazza et al. «Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia». In: *Cognition* 116.1 (2010), pp. 33–41.

[56] Manuela Piazza et al. «Education enhances the acuity of the nonverbal approximate number system». In: *Psychological science* 24.6 (2013), pp. 1037–1043.

[57] Manuela Piazza et al. «Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus». In: *Neuron* 44.3 (2004), pp. 547–555.

[58] Geetha B Ramani e Robert S Siegler. «Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games». In: *Child development* 79.2 (2008), pp. 375–394.

[59] Raniero Regni e Leonardo Fogassi. *Maria Montessori e le neuroscienze.* Fefé editore, 2019.

[60] Susannah K Revkin et al. «Does subitizing reflect numerical estimation?» In: *Psychological science* 19.6 (2008), pp. 607–614.

[61] Giacomo Rizzolatti, Giuseppe Luppino e Massimo Matelli. «The organization of the cortical motor system: new concepts». In: *Electroencephalography and clinical neurophysiology* 106.4 (1998), pp. 283–296.

[62] Giacomo Rizzolatti e Corrado Sinigaglia. *So quel che fai: il cervello che agisce ei neuroni specchio.* R. Cortina ed., 2006.

[63] Giacomo Rizzolatti et al. «Functional organization of inferior area 6 in the macaque monkey». In: *Experimental brain research* 71.3 (1988), pp. 491–507.

[64] Jamie D Roitman, Elizabeth M Brannon e Michael L Platt. «Monotonic coding of numerosity in macaque lateral intraparietal area». In: *PLoS biology* 5.8 (2007).

[65] Rosa Rugani et al. «Arithmetic in newborn chicks». In: *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* 276.1666 (2009), pp. 2451–2460.

[66] Rosa Rugani et al. «Number-space mapping in the newborn chick resembles humans' mental number line». In: *Science* 347.6221 (2015), pp. 534–536.

[67] Lucio Russo. *La rivoluzione dimenticata: il pensiero scientifico greco e la scienza moderna.* Feltrinelli Editore, 2001.

[68] Lucio Russo, Giuseppina Pirro e Emanuela Salciccia. *Euclide: il I libro degli Elementi: una nuova lettura.* Carocci editore, 2017.

[69] Hideo Sakata et al. «Neural mechanisms of visual guidance of hand action in the parietal cortex of the monkey». In: *Cerebral Cortex* 5.5 (1995), pp. 429–438.

[70] Gyula Sáry, Rufin Vogels e Guy A Orban. «Cue-invariant shape selectivity of macaque inferior temporal neurons». In: *Science* 260.5110 (1993), pp. 995–997.

[71] Wolf Schwarz e Inge M Keus. «Moving the eyes along the mental number line: Comparing SNARC effects with saccadic and manual responses». In: *Perception & Psychophysics* 66.4 (2004), pp. 651–664.

[72] Samuel Shaki, Martin H Fischer e William M Petrusic. «Reading habits for both words and numbers contribute to the SNARC effect». In: *Psychonomic bulletin & review* 16.2 (2009), pp. 328–331.

[73] Robert S Siegler e Julie L Booth. «Development of numerical estimation in young children». In: *Child development* 75.2 (2004), pp. 428–444.

[74] Robert S Siegler e John E Opfer. «The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity». In: *Psychological science* 14.3 (2003), pp. 237–250.

[75] Hiroshi Tamura e Keiji Tanaka. «Visual response properties of cells in the ventral and dorsal parts of the macaque inferotemporal cortex». In: *Cerebral Cortex* 11.5 (2001), pp. 384–399.

[76] Keiji Tanaka. «Columns for complex visual object features in the inferotemporal cortex: clustering of cells with similar but slightly different stimulus selectivities». In: *Cerebral cortex* 13.1 (2003), pp. 90–99.

[77] MA Umiltà et al. «When pliers become fingers in the monkey motor system». In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 105.6 (2008), pp. 2209–2213.

[78] Fabien Vinckier et al. «Hierarchical coding of letter strings in the ventral stream: dissecting the inner organization of the visual word-form system». In: *Neuron* 55.1 (2007), pp. 143–156.

[79] Max Wertheimer. *Il pensiero produttivo.* Giunti, 1997.

[80] Max Wertheimer. «Laws of organization in perceptual forms». In: *A source book of Gestalt Psychology* (1923).

[81] Köhler Wolfgang. *Principi dinamici in psicologia.* G. Barbera, 1966.