GARA a SQUADRE di MATEMATICA

12/10/2022

A ogni squadra, viene assegnato il seguente quiz, consistente di trenta quesiti di matematica. Come vi accorgerete, si tratta di domande piuttosto variegate: spaziano dall'aritmetica alla geometria, dalla probabilità all'algebra, dalla cinematica alla combinatoria. Alcuni di questi quesiti sono molto semplici, altri invece richiedono ragionamenti più profondi. Ma non disperate, ragazzi: nessun quesito richiede conoscenze avanzate, o comunque superiori a quelle da voi acquisite per il conseguimento della maturità! Ogni squadra avrà a disposizione due settimane di tempo per risolvere il questionario: giovedì 27 ottobre, durante la pausa pranzo tra le 13.00 e le 14.00, nel piazzale davanti all'area Planck, un portavoce per squadra potrà consegnare le soluzioni ai rappresentanti. Le soluzioni verranno valutate non solo dalla risposta finale ma anche dal procedimento, quindi vi consigliamo caldamente di scrivere per bene i passaggi che vi hanno condotto alla vostra risposta. Verranno assegnati 3 punti ad ogni risposta esatta, 0 punti ad ogni risposta non data e -1 punto ad ogni risposta errata o incompleta. Al termine delle nostre correzioni, passeremo per le aule a comunicarvi la classifica finale e le tre squadre che si aggiudicheranno i premi messi in palio. La premiazione avverrà in data ancora da definire, ma sicuramente prima della pausa natalizia. Buona fortuna, e ...usate la testa!

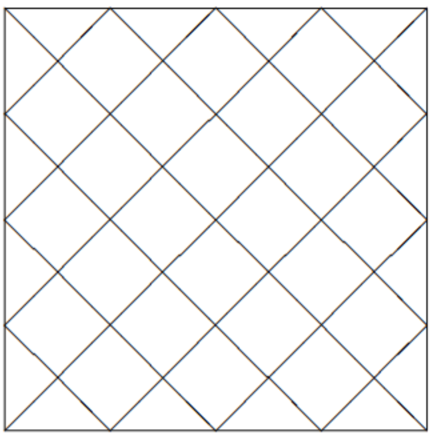
1. In otto anni, Terenzio avrà tre volte l'età che Svetlana aveva l'anno scorso. Venticinque anni fa, la somma delle loro età era 83. Quanti anni ha oggi Terenzio?

2. Qual è il più grande numero intero tale che la somma dei suoi fattori primi è 14?

3. Siano a, b, c numeri reali non nulli tali che $a + \frac{1}{b} = 5$, $b + \frac{1}{c} = 12$ e $c + \frac{1}{a} = 13$. Trovare $abc + \frac{1}{abc}$.

4. Sia f una funzione a valori reali e a variabile reale positiva soddisfacente la seguente identità
$$f(x) + 3xf\left(\frac{1}{x}\right) = 2(x+1)$$
per ogni $x > 0$. Trovare $f(2022)$.

5. Quanti triangoli ci sono nel seguente disegno?

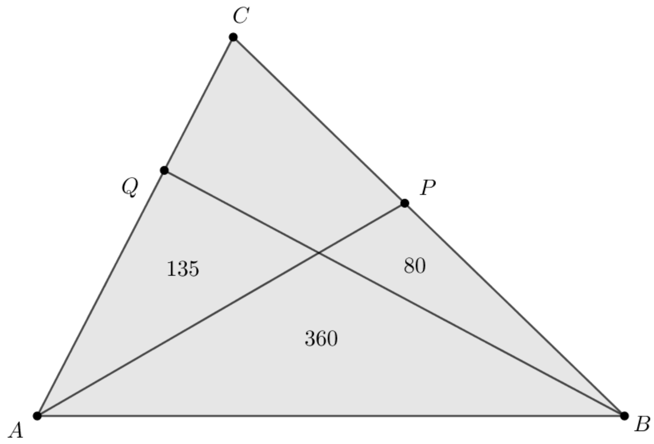


6. Trovare il più grande numero reale x tale che
$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{325}{144}$$

7. Dati 12 giocatori, in quanti modi diversi potete formare tre squadre da quattro giocatori?

8. In un triangolo ABC, $\max\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{C} + 30°$ e $\dfrac{R}{r} = \sqrt{3} + 1$ dove R e r sono i raggi, rispettivamente, della circonferenza circoscritta e della circonferenza inscritta. Trovare $\hat{C}$ (in gradi sessagesimali °).

9. Il triangolo ABC è diviso in quattro parti dai due segmenti AP e BQ. Tre delle quattro aree sono note (vedi figura). Qual è l'area di ABC?



10. Trovare il minimo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che ogni permutazione di 16 elementi applicata n volte dia come risultato l'identità.

11. La base di una piramide è un triangolo equilatero avente lato lungo 300 cm. Il vertice della piramide è 100 cm sopra il centro della base (il segmento che congiunge il vertice al centro della base cade ortogonalmente alla base stessa). Un topo parte da un angolo della base e cammina sullo spigolo fino al vertice in cima. Quando il topo ha percorso una distanza di 134 cm, a quanti centimetri di altezza (rispetto alla base) si trova?

12. In quanti riordinamenti distinti delle lettere ABCCDEEF la lettera A precede entrambe le C, la lettera F compare tra le due C e la lettera D compare dopo la F?

13. Siano d, d' due divisori di n con $d' > d$. Provare che

$$d' > d + \frac{d^2}{n}$$

14. Trovare il resto della divisione di $3^3 \cdot 33^{33} \cdot 333^{333} \cdot 3333^{3333}$ per 100.

15. Su un tavolo, c'erano caramelle rosse e caramelle blu: il numero di caramelle rosse era inizialmente pari a 3 volte il numero di quelle blu. Dopo che Desdemona ha preso uno stesso numero di caramelle rosse e blu, il numero di caramelle rosse è diventato 4 volte quello delle caramelle blu. Poi, il suo ragazzo Edibaldo ha raccolto dodici caramelle rosse e dodici caramelle blu e le caramelle rosse rimaste sul tavolo sono diventate 5 volte quelle blu rimaste sul tavolo. Trovare il numero totale di caramelle raccolte da Desdemona.

16. Tra 100 costanti $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$, ce ne sono 39 uguali a -1 e 61 uguali a 1. Trovare la somma di tutti i prodotti $a_i a_j$ con $1 \leq i < j \leq 100$.

17. La serie numerica

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k^4 - 5k^2 + 4)^2}$$

è pari a $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$, con m, n interi positivi coprimi. Trovare $m + n$.

18. Chiamiamo un numero *produttivo* se i prodotti di tutte le coppie di cifre consecutive di tale numero possono essere individuati nella sua forma scritta: per esempio, 2013 è un numero produttivo perché $2 \cdot 0 = \mathbf{0}$, $0 \cdot 1 = \mathbf{0}$ e $1 \cdot 3 = \mathbf{3}$ compaiono nella forma scritta di 2013, cosiccome 1261 è un numero produttivo perché $1 \cdot 2 = \mathbf{2}$, $2 \cdot 6 = \mathbf{12}$ e $6 \cdot 1 = \mathbf{6}$ si trovano nella forma scritta di 1261. Qual è il più piccolo numero produttivo che si può ottenere usando tutte le cifre da 0 a 9?

19. Ogni asterisco nella seguente moltiplicazione può essere rimpiazzato solo dalle cifre 2,3,5,7. Completare la moltiplicazione.

$$\begin{array}{ccccc} & & * & * & * \\ & \times & & * & * \\ \hline & * & * & * & * \\ * & * & * & * & \\ \hline * & * & * & * & * \end{array}$$

20. Due poligoni convessi hanno un totale di 33 lati e 243 diagonali. Trovare il numero di diagonali del poligono con il maggior numero di lati.

21. Una circonferenza nel primo quadrante del piano cartesiano con centro sulla curva $y = 2x^2 - 27$ è tangente all'asse delle ordinate e alla retta $4x = 3y$. Il raggio della circonferenza è $\frac{m}{n}$ dove m, n sono interi positivi coprimi. Trovare $m + n$.

22. Avete delle piastrelle 1×1 bianche e delle piastrelle 2×1 bianche e nere, un esemplare per ciascuna delle quali è mostrato qui sotto. Ci sono quattro *pattern* diversi con cui coprire un rettangolo 3×1 con queste piastrelle: BBB, NBB, BNB e BBN. Quanti *pattern* diversi ci sono con cui coprire un rettangolo 10×1 con queste piastrelle?

23. Trovare il numero di coppie ordinate di interi (x, y) tali che

$$\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = 3\left(2 + \frac{1}{xy}\right)$$

24. Klausjürgen ha una moneta equa. Scrive $+1$ su una lavagna, poi lancia la moneta: se esce testa (T) scrive $+\frac{1}{2}$, altrimenti se esce croce (C) scrive $-\frac{1}{2}$. A questo punto, lancia la moneta una seconda volta: se esce testa scrive $+\frac{1}{4}$, mentre se esce croce scrive $-\frac{1}{4}$. All'n-esimo lancio, Klausjürgen scrive $+\frac{1}{2^n}$ sulla lavagna se esce testa, altrimenti $-\frac{1}{2^n}$. La probabilità che Klausjürgen generi, in questo modo, una serie la cui somma è maggiore di $\frac{1}{7}$ è $\frac{p}{q}$, con p, q interi positivi primi fra loro. Trovare $p + 10q$.

25. Una *dismutazione* delle lettere ABCDEF è una permutazione di queste lettere in modo che nessuna lettera finisca nella stessa posizione in cui si trovava all'inizio. Un esempio è BDECFA. Un'*inversione* in una permutazione è una coppia di lettere xy dove x compare prima di y nell'ordine originario ma y compare prima di x dopo la permutazione. Per esempio, la dismutazione BDECFA ha ben sette inversioni: AB, AC, AD, AE, AF, CD, CE. Trovare il numero totale di inversioni che compaiono in tutte le dismutazioni di ABCDEF.

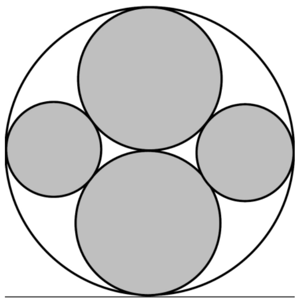
26. Rodrigo sta andando a 108 km/h in autostrada per recarsi a una competizione di matematica. Supera un treno che sta viaggiando nella sua stessa direzione lungo un binario parallelo all'autostrada. Occorrono esattamente 77 secondi per superare il treno dall'estremità finale all'estremità iniziale. Appena arrivato, si accorge di essersi dimenticato la calcolatrice e decide di tornare a casa a recuperarla. Nel ritorno, trova ancora lo stesso treno, che ora viaggia in senso contrario: ora occorrono 7 secondi per superare il treno dall'estremità iniziale all'estremità finale. Quanto è lungo il treno?

27. A un incrocio, il semaforo è rosso per 30 secondi e verde per 30 secondi (ignorate la luce gialla). Quanto si deve attendere, in media, all'incrocio?

28. Quanti interi da 0 a 999 (inclusi) non contengono la cifra 7? Qual è la somma di tutti questi numeri?

29. I cubi $173^3 = 5\,177\,717$, $192^3 = 7\,077\,888$ e $1309^3 = 2\,242\,946\,629$ sono esempi di numeri interi N che contengono tante cifre quante le cifre del loro cubo N^3. Se il cubo N^3 contiene meno cifre di quelle contenute in N, diciamo che N è *difettivo*. 13798 è difettivo perché contiene cinque cifre distinte, mentre il suo cubo $2\,626\,929\,525\,592$ solo 4. Mostrare che ci sono infiniti numeri difettivi.

30. Il diagramma seguente mostra un bersaglio per freccette con 4 cerchi colorati più piccoli, ognuno tangente internamente alla circonferenza più grande. Due dei cerchi interni hanno raggio la metà di quello del cerchio più grande, e sono quindi tangenti l'uno all'altro. I cerchi interni più piccoli sono tangenti ai due cerchi interni più grandi. Se una freccetta viene lanciata in modo casuale contro il bersaglio, allora la probabilità che essa finisca sull'area colorata è $\frac{m}{n}$, con m, n interi positivi coprimi. Trovare $m + n$.



Potete trovare il file PDF di questo quiz al link **https://bit.ly/3CoFocT** o inquadrando il seguente QR code: