

Lezione 1

Il concetto di *figura*.

Una figura per essere definita ha bisogno di uno sfondo.

Lo ***sfondo*** può essere una retta (o un segmento), un piano (o una regione piana chiusa e limitata) o la superficie di una sfera, o una porzione di spazio tridimensionale o altro ancora. Lo sfondo è formato da un insieme infinito di punti che chiamiamo S e che coloriamo di bianco.

Una ***figura*** (in bianco e nero) è un sottoinsieme di F i cui punti vengono evidenziati colorandoli in nero.

Per indicare che ogni punto di F è anche un punto di S si scrive

$$F \subseteq S \text{ o anche } S \supseteq F$$

Una ***figura colorata*** sarà data da un insieme F di punti ognuno dei quali ha un suo colore (i colori possono essere definiti a partire da certi parametri). Questa descrizione di una figura si applica bene al caso in cui lo sfondo è lo schermo di un computer. In questo caso, a seconda della risoluzione grafica del calcolatore, lo sfondo è formato da una rete di punti detti pixel (generalmente 1024 in orizzontale e 768 in verticale) e la figura è un sottoinsieme di pixel illuminati in vario modo.

In questo laboratorio consideriamo, per semplicità, solo figure in bianco e nero.

Le figure più semplici sono le ***figure rettilinee*** quelle il cui sfondo è la retta euclidea o una sua parte.

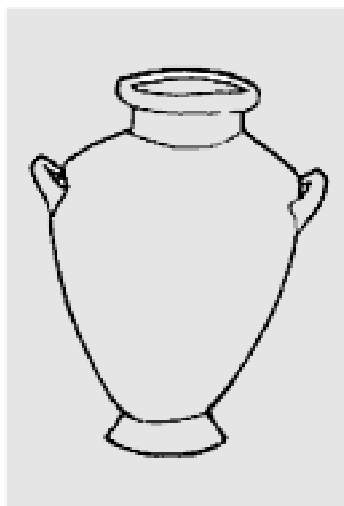
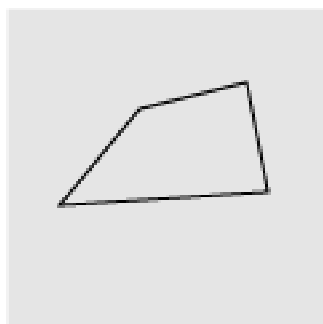
Le figure più interessanti sono, forse, le ***figure piane*** quelle cioè il cui sfondo è il piano euclideo o una sua parte chiusa e limitata. Anche le figure il cui sfondo è una superficie curva come la sfera hanno molto interesse sia artistico come, ad esempio, nel caso delle decorazioni vascolari, che scientifico in relazione alla mappatura della terra o del cielo o dei pianeti.

In questo laboratorio studieremo solo i casi più semplici di figure rettilinee e piane.

La figura seguente è una figura rettilinea: è formata da due gruppi di 3 punti ciascuno disposti in modo simmetrico



Le figure seguenti sono figure piane

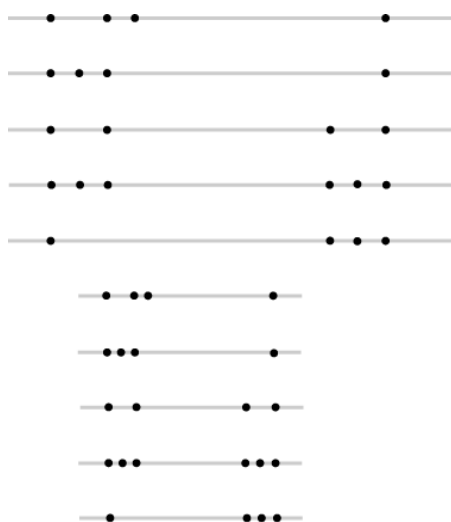


La prima rappresenta un quadrilatero, la seconda un vaso antico e la terza una foglia di felce. Lo sfondo di queste figure, evidenziato in grigio, è una parte di piano. Gli sfondi sono disegnati in grigio

La descrizione con delle parole o dei simboli di una figura anche semplice non è a priori evidente. Ecco una **attività laboratoriale** da proporre agli allievi per evidenziare questa difficoltà.

Dividiamo gli studenti in coppie. Ogni coppia è formata da uno studente comunicatore e uno studente ricevente. Si consegna allo studente comunicatore una figura rettilinea e un foglio bianco dove gli si chiede di descrivere la figura per iscritto in modo che lo studente ricevente possa ricostruirla sulla base dei dati forniti: lo studente ricevente, riceve solo il foglio con la descrizione della figura e, su quel foglio, disegna la figura sulla base dei dati che gli sono stati comunicati. Alla fine si confrontano i due disegni. Assoluta libertà per il comunicatore che dispone solo dello strumento scrittura ma non di righelli o altri strumenti geometrici.

Diamo 10 possibili figure per 10 possibili coppie: la figura è formata da un insieme finito di punti disegnati con dei dischetti neri.



Le ultime 5 figure sono simili alle prime cinque (i rapporti sono stati dimezzati). Le figure sono scelte per confrontare le descrizioni che vengono date dai comunicatori e le realizzazioni dei riceventi. Le simmetrie hanno un ruolo? Le ultime 5 figure sono simili alle prime 5, come cambia, se cambia, la loro descrizione verbale? Ci sono descrizioni più accurate.

Nella **Tavola 1** c'è il testo dell'esercizio con alcuni commenti degli studenti.

Questa attività viene sviluppata per due motivi: il primo è quello di introdurre l'idea di *ascissa* come strumento per descrivere precisamente la figura, il secondo è per discutere sul concetto di *forma*.

Cosa vuol dire che due figure rettilinee diverse, cioè non sovrapponibili, hanno la stessa forma?

L'ascissa.

Le più semplici figure rettilinee sono quelle formate da un insieme finito di punti. Queste figure possono essere descritte completamente introducendo una **ascissa** sulla retta che fa da sfondo alla figura. Per definire una ascissa occorre fare due scelte: si deve fissare una **origine**, cioè un punto di partenza per contare le distanze e un secondo punto, detto **punto unità** diverso dall'origine per definire l'unità di misura. Il termine ascissa viene dal verbo latino abscindere "tagliar via" e indica i

“tagli”, le “tacche” che vengono disposti equidistanti sulla retta per valutare la distanza di un punto dall’origine. Indichiamo con O l’origine e con U il punto unità



Questa scelta definisce una **orientazione** sulla retta cioè un verso di percorrenza positivo: quello da O a U. Per indicare questo verso di percorrenza si usa mettere una freccia dalla parte dove si trova U. L’ascissa di un punto P della retta sarà un numero reale, positivo se P si trova nella semiretta dove si trova U, negativo nel caso contrario. Tale numero si ottiene calcolando il rapporto tra la lunghezza del segmento OP e la lunghezza del segmento OU. Il punto O ha ascissa zero perché la distanza di O da O è nulla mentre il punto U ha ascissa 1 perché il rapporto OU:OU=1. Il simmetrico di U rispetto ad O, ha ascissa -1.



Nel caso rappresentato dalla figura il punto P ha ascissa -4. Per indicare che un punto P ha x come ascissa si scrive $P = (x)$. L’ascissa di un punto P verrà anche indicata col simbolo x_P . Questo stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e i numeri reali: ad ogni punto P possiamo associare la sua ascissa x_P e, viceversa, ogni numero reale possiamo associare un punto della retta. In questo consiste il fondamentale **postulato di continuità**.

Abbiamo preferito richiamare il concetto di ascissa sia per svincolare le coordinate da un loro uso acritico che prevede che le coordinate siano assegnate

.....

Questo permette di descrivere senza ambiguità una figura rettilinea attraverso dei numeri. Ad esempio la figura seguente



può essere descritta introducendo come ascissa quella che ha A come origine e B come punto unità: in questa situazione la figura è formata dai sei punti di ascissa 0,1, 2,10,11,12. Si poteva anche scegliere come ascissa quella che ha l’origine nel punto medio tra C e D e U a una distanza da O di una tacca: in questo caso risulterebbe che la figura è formata dai punti di ascissa 4,5,6 e -4,-5,-6. Questa seconda soluzione evidenzia meglio la simmetria della figura. L’origine è il centro di simmetria e questo si interpreta algebricamente dicendo che, se la figura contiene un punto di ascissa a contiene anche il punto di ascissa -a. Ogni figura con un centro di simmetria ha un numero pari di punti e può essere descritta, prendendo come origine il centro di simmetria, con coppie di numeri uno opposto dell’altro. La regola dei segni si interpreta geometricamente dicendo che la simmetria è *involutoria*, cioè il simmetrico del simmetrico di un punto P è il punto P stesso: *meno per meno uguale a più*.

Abbiamo ritenuto utile richiamare il concetto di ascissa per svincolare l’uso delle coordinate da una consuetudine schematica nella quale il riferimento cartesiano è assegnato a priori, consuetudine che rischia di soffocare il significato.

La **Tavola 2** chiede agli studenti di *introdurre* una ascissa per descrivere accuratamente una figura.

Equazione di una figura rettilinea finita

L'introduzione di una ascissa permette di descrivere la figura rettilinea con una equazione. Il nuovo linguaggio utilizzato, quello algebrico, permette di comunicare direttamente a un computer la figura senza il bisogno di parole o aspetti legati al vedere la figura. Una equazione algebrica in una variabile x si ottiene uguagliando a zero un polinomio in una variabile

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

x è l'incognita e $a_1, a_2, \dots, a_n$, sono i coefficienti dell'equazione che si suppongono numeri noti. Una soluzione dell'equazione è un numero che sostituito nella equazione la soddisfi.

L'equazione di una figura sarà allora una equazione le cui soluzioni sono le ascisse dei punti della figura. Naturalmente per avere tali equazioni si deve fissare l'ascissa e poiché vi sono infiniti modi di scegliere O e U , per una stessa figura vi sono infinite equazioni che la rappresentano. Ad esempio l'equazione della figura 5 sarà:

$$x(x-1)(x-2)(x-10)(x-12)(x-13)=0$$

se scegliamo l'ascissa prendendo A come origine e B come punto unità. Se invece scegliamo come origine il punto medio tra C e D e U a una distanza da O di una tacca, l'equazione della figura sarà

$$(x^2-4)(x^2-5)(x^2-6)=0$$

Notiamo che se la figura F è data da n punti

$$F = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

e se $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le ascisse di quei punti allora l'equazione della figura si ottiene moltiplicando fattori di primo grado

$$(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n) = 0$$

infatti il prodotto di due o più quantità è zero se e solo se almeno una delle quantità è zero. Le soluzioni dell'equazione precedente sono quindi i numeri che annullano almeno uno dei fattori e cioè i numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$.

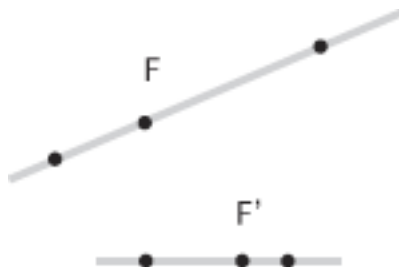
Similitudine di figure rettilinee

Siano F e F' due figure rettilinee formate da tre punti ciascuna. Diciamo che F è *simile* a F' o che le due figure hanno la *stessa forma* se possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti di F e quelli di F' in modo che, se A corrisponde a A' , B a B' e C a C' risulti

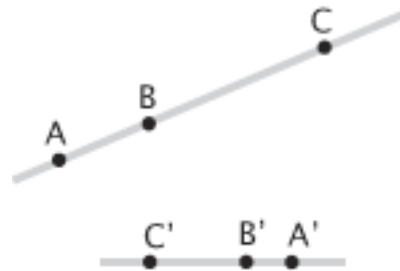
$$AC : AB = A'C' : A'B'$$

Ciò significa che le due figure hanno lo stesso numero di punti e che le tre parti della figura F , cioè i suoi segmenti, hanno un rapporto tra loro uguale a quello dei segmenti corrispondenti della seconda figura. Due figure simili, non sono uguali perché una può essere più grande o più piccola dell'altra, sono analoghe, hanno la stessa forma. L'etimologia greca della parola analogia (ana logos = stesso rapporto) sta a significare che le proporzioni tra le parti di una figura sono le stesse tra le parti corrispondenti dell'altra.

Consideriamo, ad esempio, le figure rappresentate nel disegno seguente



esse sono simili perché, se facciamo corrispondere i punti di F con quelli di F' nel modo indicato dalla figura seguente abbiamo



Nel caso di questo esempio AC è tre volte AB nella figura in alto e lo stesso vale per i corrispondenti segmenti della figura il basso: A'C' è tre volte A'B'.

$$AC = 3AB \text{ e anche } A'C' = 3A'B'$$

Per dimostrare, ad esempio con un computer, che due figure F e F' *non* sono simili occorrerebbe dimostrare che *comunque* si facciano corrispondere i tre punti A, B, C della prima figura ai tre punti della seconda (ci sono 6 possibili corrispondenze diverse tra i punti di F e quelli di F' perché ad A possiamo far corrispondere un qualunque punto di F' (tre possibilità) e per ognuna di queste scelte abbiamo due possibilità per i punti B e C) risulta $AC : AB$ diverso da $A'C' : A'B'$. Il computer dovrebbe quindi fare 6 verifiche prima di poter concludere che le figure non sono simili. L'occhio umano, guardando la figura vede subito quali corrispondenze sono da scartare e quali invece potrebbero dare l'uguaglianza dei rapporti.

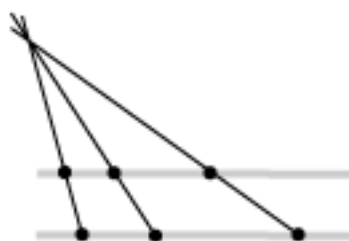
Da un punto di vista geometrico è facile stabilire quando due terne di punti allineati (due "triangoli" unidimensionali) sono simili. Disponiamo le due rette che formano lo sfondo alle due figure in un piano in modo che risultino parallele tra loro.



Abbiamo allora il seguente teorema

Teorema del dardo (Leon Battista Alberti)

Le figure F ed F' formate da tre punti ciascuna, sono simili se e solo se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'una e i punti dell'altra in modo che congiungendo punti corrispondenti si ottengono rette convergenti in un punto.



La dimostrazione di questo teorema è utile perché fa intervenire il così detto *fattore di scala*.

L'enunciato del teorema contiene in realtà due enunciati diversi: l'ipotesi e la tesi si scambiano tra loro.

Il primo enunciato:

- Ipotesi: le rette AA' , BB' , CC' convergono a un unico punto S
- Tesi: le figure sono simili

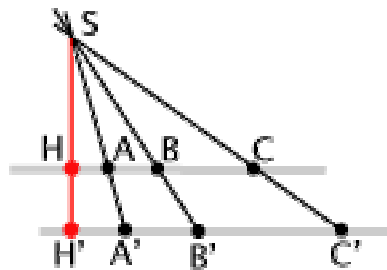
Secondo enunciato

- Ipotesi: le figure sono simili
- Tesi: le rette AA' , BB' , CC' convergono a un unico punto S .

Dimostriamo il primo enunciato.

Consideriamo la perpendicolare SHH' alle due rette parallele. I punti H , H' non dipendono dalla figura F o F' ma solo dalla posizione del centro di proiezione S e delle rette che fanno da sfondo alle due figure. Chiamiamo fattore di scala il rapporto

$$k = SH' : SH$$



I triangoli SAC e $SA'C'$ sono simili (hanno gli angoli uguali) e quindi le basi stanno tra loro come le altezze:

$$A'C' : AC = SH' : SH = k \text{ cioè } A'C' = k AC$$

Anche i triangoli SAB e $SA'B'$ sono simili e quindi

$$A'B' : AB = SH' : SH = k \text{ cioè } A'B' = k AB$$

Facendo i rapporti membro a membro troviamo

$$A'C' : A'B' = AC : AB.$$

Il secondo enunciato si dimostra per assurdo supponendo che la retta CC' non passi per il punto d'intersezione delle rette AA' e BB' .

Definizione di similitudine di figure rettilinee finite

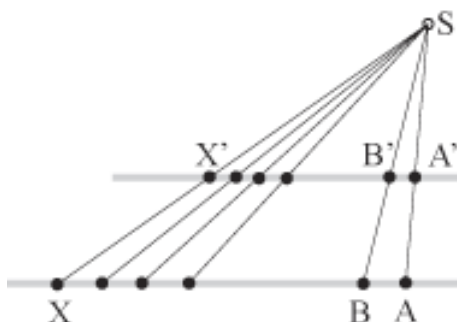
Date due figure rettilinee finite F e F' diciamo che queste due figure sono simili (o hanno la stessa forma) se

1. *hanno lo stesso numero di punti*
2. *esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di F e quelli di G tale che, comunque si prendano tre punti A, B, C di F , il rapporto $AC : AB$ sia lo stesso del rapporto $A'C' : A'B'$ dei corrispondenti punti di G .*

Anche in questo caso due figure sono simili se e solo se, disponendo le rette che le contengono parallelamente in un piano, e congiungendo i punti corrispondenti, otteniamo rette convergenti in un unico punto. Supponiamo che le figure F e F' siano simili. Scegliamo due punti A e B di F e siano A' e B' i corrispondenti punti di F' . Consideriamo il punto d'intersezione S della retta AA' con la retta BB' (esiste sempre S ?). Scegliamo un *qualunque* punto X della figura F e sia X' il suo corrispondente in F' . Applicando il teorema del dardo ai tre punti A, B, X abbiamo che le tre rette

AA' , BB' , XX' passano per uno stesso punto che è per forza S essendo S il solo punto comune a AA' e BB' . se e solo se

$$AX : AB = A'X' : A'B'$$



Il teorema del dardo e questa sua generalizzazione ci da due modi per vedere se due figure rettilinee sono simili: il primo consiste nello studiare i rapporti tra le parti dell'una e vedere se sono uguali quelli delle corrispondenti parti dell'altra, il secondo invece utilizza una dimensione in più: si deve immergere le due rette come rette parallele in un piano e poi vedere se le rette che congiungono punti corrispondenti convergono a un unico punto.

Con la **Tavola 3** chiede di restaurare figure dei quali si conosce la forma ma mancano alcuni pezzi.
Con la **Tavola 4** si chiede di trovare la proiezione conoscendo il fattore di scala