

1°

## **L'iterazione di funzioni e l'evoluzione dinamica dei sistemi**

### **I sistemi dinamici**

Per teoria dei sistemi dinamici si intende l'insieme di modelli matematici in grado di rappresentare sistemi che evolvono nel tempo. La teoria si rivela molto diversificata a seconda dei sistemi oggetto di studio. Ad esempio, per conoscere l'evoluzione meccanica di un fenomeno occorre conoscere le sue posizioni e le sue velocità e, per descriverlo matematicamente, dovranno essere note anche le condizioni iniziali altrimenti non si perviene ad una descrizione univoca. In ogni caso, quando si tratta di sistemi dinamici è sempre presente la variabile tempo, la quale può essere pensata come un numero reale, quindi con carattere continuo, oppure come un numero naturale e quindi con carattere discreto.

Prevedere l'evoluzione di un sistema è l'obiettivo perseguito dallo studio della dinamica dei sistemi, un obiettivo il cui conseguimento si complica a seconda della natura dei sistemi, che possono essere semplici e deterministici, oppure aleatori o anche complessi.

Anche nel caso meccanico avere avuto da Newton una formulazione generale di alcune leggi valide esteticamente e fondate su principi generali non vuol dire aver definito e risolto il problema del moto. I matematici e i fisici hanno sviluppato nel corso degli anni metodi molto avanzati di "meccanica razionale", metodi cioè che permettono di scrivere le equazioni generali del moto e di risolverle, se non analiticamente, almeno attraverso dei procedimenti numerici. Tuttavia alcuni problemi, anche semplici nella loro formulazione, rimangono insoluti, ne è un esempio il problema dei tre corpi, caso particolare del problema generale che riguarda le interazioni tra  $n$  corpi. Non solo, lo studio di fenomeni complessi, come ad esempio le turbolenze, ha dato l'avvio a un nuovo campo di ricerca, aprendosi ad altre possibilità soprattutto grazie allo strepitoso potenziamento degli strumenti di calcolo avvenuta negli ultimi decenni. In questa nuova prospettiva, si è sviluppata una

teoria “qualitativa” dei sistemi dinamici, nella quale, pur dovendo rinunciare ad alcuni aspetti quantitativi si riesce a cogliere alcune caratteristiche essenziali del fenomeno studiato, come ad esempio l’andamento asintotico.

## **L’evoluzione dinamica di un sistema e l’iterazione di funzioni**

Graficamente o anche con l’uso di una calcolatrice tascabile, si può studiare il comportamento di alcune funzioni molto semplici quando vengono iterate molte volte.

Sofferamoci sul legame esistente tra l’evoluzione dinamica di un sistema e l’andamento delle iterate di una funzione. Si consideri un sistema dinamico discreto ossia un sistema per il quale il tempo è rappresentato da numeri naturali, un’equazione alle differenze finite è un’equazione del tipo:

$$x(t + 1) = f(x(t))$$

assegnato un valore iniziale

$$x(0) = x_1$$

Tutti gli stati  $x_n$  si ottengono iterando la funzione  $f$  a partire dallo stato iniziale.

Conoscere l’evoluzione di un sistema al tempo  $t$  significa conoscere l’andamento delle iterate della funzione  $f$ .

## **Lo spazio delle fasi**

Se vogliamo descrivere matematicamente un fenomeno dobbiamo introdurre delle variabili che lo rappresentano e che per tale motivo prendono il nome di *variabili di stato*. Fatta la scelta delle variabili, esse vengono graficate in un sistema di riferimento chiamato *spazio delle fasi*.

Ad esempio, l’evoluzione dinamica di un pendolo semplice che oscilla con attrito, può essere descritta su un piano con un sistema di coordinate polari  $(\omega, \vartheta)$ , dove  $\vartheta$  rappresenta l’ampiezza dell’oscillazione e  $\omega$  la velocità angolare. Il grafico che esprime la variazione di  $\omega$  in funzione di  $\vartheta$

per un pendolo ad oscillazioni smorzate sarà una spirale che si avvolge intorno al polo O che rappresenta la posizione di equilibrio. Il punto O è pertanto chiamato stato *attrattore*.

Il pendolo che oscilla senza attrito invece ha un'evoluzione dinamica rappresentata da una circonferenza. Come è noto, l'oscillatore armonico è un sistema conservativo, ma sistemi del genere sono soltanto un'idealizzazione; quelli reali sono sistemi dissipativi, nei quali l'energia, a causa dell'attrito, viene dispersa in calore. Il pendolo che oscilla con attrito è un classico esempio di sistema dissipativo. Per sistemi dissipativi, per  $t \rightarrow \infty$  il fenomeno evolve sempre verso il medesimo stato finale che si chiama stato attrattore. Nel caso del pendolo lo stato finale è estremamente semplice trattandosi di un solo punto.

Per molti sistemi dinamici non è possibile prevederne compiutamente l'evoluzione. Tuttavia, possono essere elaborati modelli matematici che rendono possibile un diverso tipo di predicibilità, detta "asintotica". In questo tipo di predicibilità a lungo termine entrano in ballo gli "stati attrattori". La considerazione degli "attrattori" implica una descrizione non più quantitativa bensì qualitativa: anche se non si può prevedere lo stato futuro, la conoscenza di questi fornisce informazioni utili su come potrà evolvere il sistema.