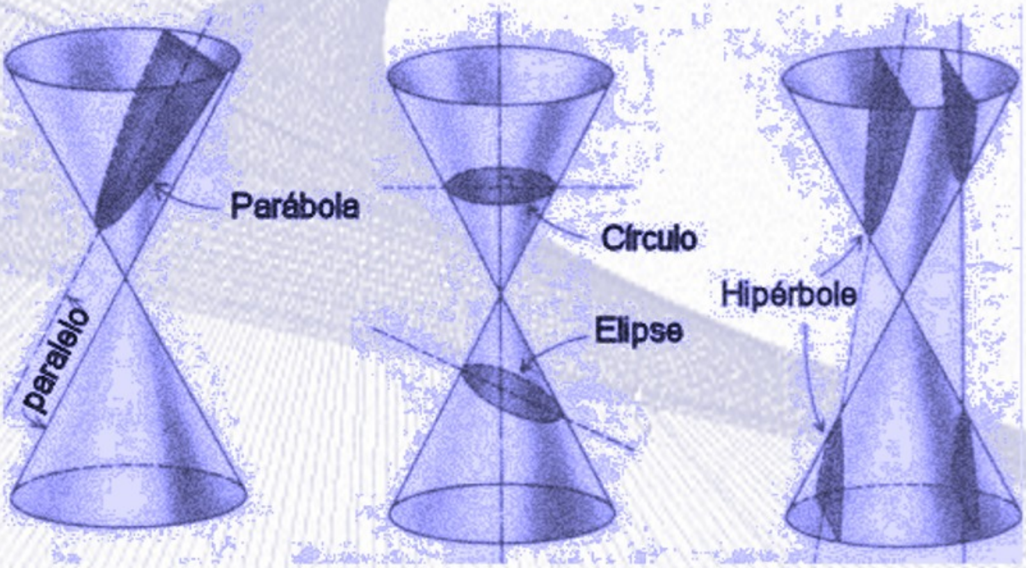
Corso di perfezionamento

"Nuove tendenze della didattica della Matematica e della fisica"

Laboratorio: le coniche e le loro applicazioni



Tirocinanti:

Luisa Aragosa
Silvia Ruzzante

Annalaura Antonelli
Emilia Pascale

Referente:

dott.ssa Francesca Tovena

INDICE DEGLI ARGOMENTI

SCHEMA INFORMATIVO del LABORATORIO

"Le coniche e le loro applicazioni"

Lo studio della Matematica, a livello scolastico e universitario, ha patito negli ultimi decenni una importante disaffezione a livello europeo, malgrado le dichiarazioni a livello politico e imprenditoriale che hanno sottolineato la rilevanza di tale materia.
La risposta a questo problema potrebbe risolversi nel mettere in evidenza l'aspetto applicativo-ludico della materia, spesso affrontata con una metodologia "vecchia" e quindi inefficace.
A tal fine il nostro contributo mira alla progettazione di un laboratorio per i licei classici e scientifici il cui tema riguarda uno degli argomenti maggiormente insegnati nelle scuole: le coniche e le loro applicazioni.

Il presente progetto di laboratorio si ripromette di sviluppare e realizzare materiale didattico, anche a carattere interattivo-multimediale, che possa essere utilizzato dagli insegnanti, o singolarmente dagli studenti. Il materiale sarà strutturato fornendo progressivamente agli allievi gli strumenti cognitivi per comprendere l'argomento, come se fossero loro stessi a ricostruire il percorso scientifico compiuto dai matematici nel corso della storia: questa struttura di tipo laboratoriale viene raramente applicata nell'insegnamento curriculare, anche per mancanza di tempo, ma si è rivelata efficace nello stimolare negli studenti un maggiore interesse nei confronti della matematica e di tutto ciò che viene generalmente affrontato in una trattazione scientifica.

Verranno selezionati e raccolti in una dispensa gli argomenti di ciascuna delle lezioni laboratoriali, supportati da osservazioni didattiche e da strumenti meccanici e interattivo-multimediali appositamente congegnati, nonché da tavole di lavoro per i ragazzi.
Si prevede l'utilizzo di un software di geometria dinamica quale il Cabri, e del linguaggio di programmazione Java: il primo al fine di semplificare la comprensione dell'oggetto geometrico in questione, anche mediante l'applicazione e la realizzazione diretta da parte degli allievi, e il secondo per la realizzazione pratica di materiale multimediale fruibile dai partecipanti.

Il contesto storico (Aristarco, Euclide, Archimede, Keplero) verrà sviluppato a partire dalle fonti originali leggendo e commentando i testi.

OBIETTIVI DISCIPLINARI E FORMATIVI

Le coniche verranno presentate sia da un punto di vista sintetico (come sezioni piane di un cono) che da un punto di vista analitico, tramite le equazioni e come luighi geometrici. Uno degli obiettivi prefissati è quello quindi di trattare parallelamente i tre aspetti, al fine di rendere più chiara la definizione del luogo geometrico e la sua rappresentazione cartesiana strettamente legata alla scelta del sistema di riferimento. Si auspica che la scelta dell'introduzione sintetica di una conica e dello spazio tridimensionale in cui vive porti lo studente ad una visione spaziale "gestaltica" dell'oggetto geometrico e quindi ad una maggiore comprensione di cosa si stia studiando.
Lo studio geometrico delle coniche, sviluppato in un ambiente tridimensionale, assume così un ruolo formativo fondamentale per mettere in luce le proprietà di rette, piani, coni, sfere e cilindri, che nei programmi scolastici tradizionali vengono normalmente esclusi.
La conoscenza approfondita di tale argomento porta quindi alla possibilità di legare ad esso lo studio di problemi non banali come le orbite planetarie e i fenomeni ottici, esaltando il ruolo della metodologia didattica applicabile ad altri contenuti.
La trattazione degli argomenti scelti annessi alle coniche offre una conoscenza migliore della teoria, e risalta negli allievi la capacità di collegare un argomento matematico, apparentemente a sé stante, con materie diverse, come la storia, la fisica, la geografia astronomica e l'arte. Gli studenti potrebbero utilizzare questo lavoro per sviluppare una tesina interdisciplinare ai fini della prova finale del loro iter scolastico.
Lo studio verrà inoltre accompagnato dal contesto storico nel quale la teoria è stata sviluppata, per mettere in luce la necessità di una sua formalizzazione teorica per la descrizione di fenomeni ottici e naturali.

Gli obiettivi prefissati dunque si riferiscono non solo all'aspetto rivolto ai ragazzi, cioè quello di strutturare per loro lezioni aggiuntive nelle quali possano affrontare la materia da un punto di vista laboratoriale e quindi non solo di puro apprendimento, ma si riferiscono anche all'aspetto personale, finalizzato ad imparare un nuovo modo di insegnare e di interagire con gli allievi, con la convinzione che "laboratorio" vuol dire sperimentare una nuova modalità per l'insegnamento.

STRATEGIE DIDATTICHE PER GLI OBIETTIVI DISCIPLINARI E FORMATIVI

L'idea fondamentale è quella di dare fin dall'inizio un'impostazione didattica che segua un "ordine di apprendimento" tipico dell'atteggiamento scientifico, per invitare gli studenti a "ripercorrere" insieme le tappe dello sviluppo della teoria considerata contestualizzandola storicamente.
Stimolare il loro interesse attraverso l'uso di strumenti a loro familiari come il computer e i vari software di geometria dinamica.
Gli incontri di laboratorio saranno inoltre caratterizzati dal coinvolgimento diretto di gruppi di allievi su particolari problemi, rivolti alla visione geometrica, alla pittura, all'astronomia, all'architettura, all'ottica, utilizzando e costruendo strumenti pratici di sperimentazione ed applicazione, coinvolgendoli personalmente chiedendo loro interventi.

STRUMENTI UTILIZZATI

Gli strumenti che utilizzeremo saranno fondamentalmente di due tipi.
Il primo consiste nell'insieme di strumenti che chiamiamo "antichi", quelli cioè ereditati dalla storia, fra cui:il compasso di Leonardo, compassi per specchi parabolici, tavole prospettiche,testi classici.
Il secondo tipo sono invece gli strumenti "moderni":computer collegato ad un proiettore, tavole di lavoro, oggetti di uso quotidiano, come torce e lampade, software di geometria dinamica (Cabri, Cinderella), animazioni Java, materiale fruibile in rete.

SVOLGIMENTO DEL LABORATORIO

Grazie all'argomento di cui si occupa tale laboratorio, il programma permette di progettare insieme agli insegnanti un percorso legato al contesto scolastico, fissando con loro incontri periodici finalizzati a suggerimenti e a spunti di lavoro più consoni ai partecipanti, in modo da garantire per essi una linea coerente con la loro formazione, nonché con le loro attitudini e capacità.
Il programma che verrà affrontato sarà strutturato in maniera da rendere ben visibili i seguenti aspetti:

1. La descrizione geometrica degli oggetti in questione, come la circonferenza e il cono, con particolare attenzione alla geometria della visione.
2. L'aspetto analitico: la descrizione dell'equazioni dei luoghi precedentemente dati dalla geometria partendo dalla introduzione di ascissa e ordinata e le proprietà focali.

3. L’aspetto storico/artistico: si presentano progressivamente e parallelamente all’introduzione degli argomenti i personaggi storici legati a tali teorie, citando fonti originali e presentando documenti relativi all’evento storico. Si mette in luce la rappresentazione pittorica di oggetti tondi su un piano (affresco) o su un vaso nella pittura antica.
4. L’aspetto fisico: agganci con le teorie astronomiche di Keplero sulle orbite ellittiche, la visione della Luna e la sua quadratura.
5. L’aspetto applicativo/pratico: applicazione di metodi empirici e realizzazione pratica di oggetti incontrati nello studio delle teorie, quali ad esempio il compasso di Leonardo Da Vinci per tracciare sezioni coniche.
6. L’aspetto multimediale: realizzazione pratica di applet Java, come ad esempio il disegno dei tre tipi di coniche seguendo l’impostazione di Apollonio. Messa in rete di materiale informativo e di tavole di lavoro, finalizzato ad una maggiore fruibilità da parte dei partecipanti.

Tutto questo sarà realizzato con l’utilizzo costante di materiale multimediale (PC, proiezioni, programmi quali Cabri, Java).

SUDDIVISIONE DELLE LEZIONI

LEZIONE I

Impostazione teorica di Apollonio: introduzione sintetica del concetto di conica vista come risultato della sezione di un cono con un piano.
Deduzione dell'espressione analitica nei casi generali e particolari attraverso semplici passaggi algebrici.
Tavole di lavoro.

LEZIONE II

Percorso storico sul concetto di cono: come viene visto e studiato nel corso dei tempi.
Introduzione pittorica del De PICTURA-ALBERTI: come nasce nella storia la necessità di rappresentare e descrivere una conica: rappresentazione prospettica di una circonferenza
Applicazioni suggerite dal trattato sulle coniche di Pascal: teorema dell’*esagono mistico* proiezione di circonferenza su un quadro.
Tavole di lavoro.

LEZIONE III

Parallelo tra gli strumenti antichi e moderni per la rappresentazione grafica di una conica.

1. Presentazione e utilizzo del compasso di Leonardo Da Vinci
2. Applicazioni mediante programmi di geometria dinamica nel piano e nello spazio (Cabri, Cinderella).

Esercitazioni al computer.

LEZIONE IV

Luoghi geometrici, equazione analitica delle coniche.
Conica e carta: come costrire una conica con mezzi di uso quotidiano.
Esercitazioni pratiche che esaltano l'aspetto ludico dell'argomento.

LEZIONE V

Descrizione analitica di fuochi e direttrici.
Proprietà focali di una conica: fuochi rispetto alle leggi di riflessione.
Applicazioni tecniche: specchi ustori e antenne paraboliche.
Tavole di lavoro.

LEZIONE VI

Le coniche viste come ombra di una sfera: descrizione sintetica di fuochi e direttrici di una conica *(sfere di Dandelin)*.
Tavole di lavoro.

LEZIONE VII

Applicazioni fisiche del concetto di conica: orbite kepleriane (studi sull'orbita di Marte) e costanza della velocità aereolare. Eccentricita'
Tavole di lavoro.

LEZIONE VIII

Risoluzione geometrica di equazioni algebriche di terzo e quarto grado secondo la tradizione araba intersecando cerchi, parabole o iperboli equilatere.

Secondo il piano iniziale di suddivisione degli argomenti nelle 8 sedute del laboratorio, si inizierà la stesura delle dispense e delle tavole relative a ciascuna di esse, e a progettare e realizzare il materiale meccanico e multimediale ad esse utile.
Il materiale verrà reso disponibile su un apposito sito e opportunamente pubblicizzato.

RISULTATI FINALI ATTESI

In riferimento a quanto specificato negli obiettivi prefissati, quello che ci si aspetta, a posteriori, è un riscontro positivo da parte degli studenti, che sarà sicuramente facilitato dalla struttura laboratoriale e dall'utilizzo di materiale multimediale, in genere molto apprezzato dai ragazzi.
La produzione di materiale cartaceo (dispense e tavole di lavoro), concreto (oggetti realizzati nei laboratori), e multimediale (materiale interattivo in rete) ha il fine di rendere facilmente accessibile un argomento matematico, che può essere approfondito in qualunque momento al di fuori del laboratorio stesso.
Il fine quindi di costruire materiale informatico/pratico consiste proprio nel lasciare agli allievi gli strumenti utili per una comprensione migliore e per un'eredità didattica innovativa applicabile in qualsiasi contesto.
Infine lasciare, perché no, una buona impressione della matematica.
A livello personale, ci si aspetta un importante affinamento delle proprie competenze come didatta e come comunicatore multimediale: questo laboratorio permetterà di applicare quanto appreso negli anni di laurea, e di imparare, concretamente, da insegnanti esperti

LEZIONE I

IMPOSTAZIONE TEORICA DI APOLLONIO: INTRODUZIONE SINTETICA DI UNA CONICA

Apollonio di Perga (III secolo a.C.) contemporaneo di Archimede, fu l'autore di un importante trattato sulle coniche suddiviso in 9 libri, di cui solo 8 sono arrivati fino a noi.

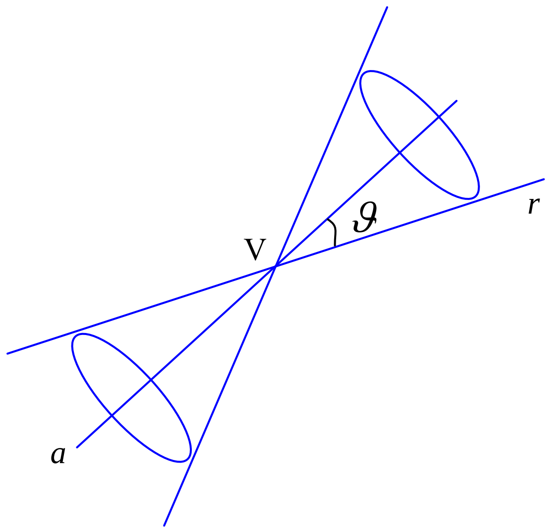
In esso troviamo la trattazione sintetica delle coniche, viste cioè come risultato dell'intersezione tra un cono retto ed un piano.

Data una retta a e una retta r che si intersecano in un punto detto V, chiamiamo ϑ l'angolo tra r ed a.

La superficie che si ottiene dalla rotazione completa di r attorno ad a, lasciando fisso l'angolo, e' detta *cono (a due falde).*

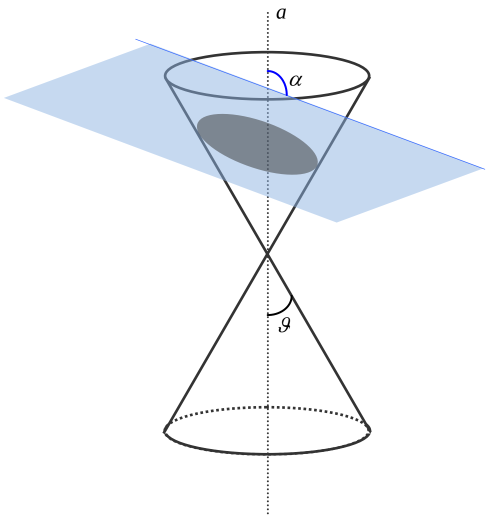
La retta a e' detta *asse del cono*, la retta r invece è detta *generatrice*.

L'angolo generato dall'asse del cono e la sua generatrice è detto *semiapertura del cono* (ϑ in figura), V è il vertice.



Chiameremo *sezione conica,* o semplicemente *conica*, la curva ottenuta dall'intersezione tra il cono e un piano.

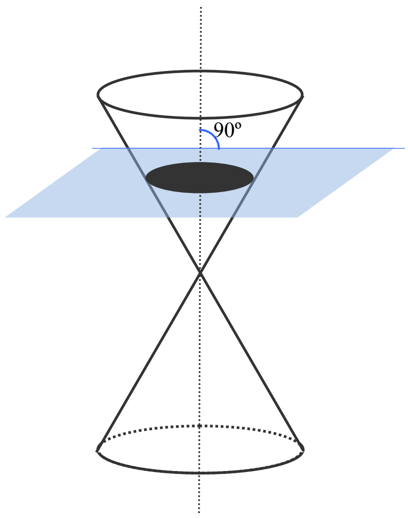
Nello specifico se intersechiamo il cono con un piano la cui inclinazione rispetto all'asse a è di un angolo α maggiore di ϑ la curva ottenuta si chiamerà *Ellisse*.



$\alpha > \vartheta$

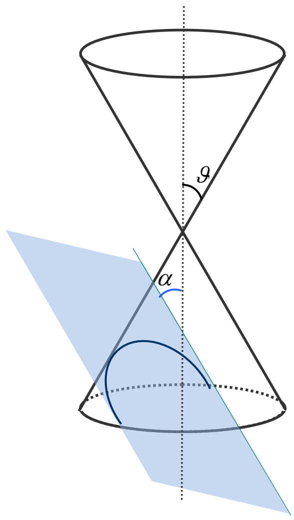
Il termine Ellisse deriva infatti dal verbo greco "*ekléipein*" che significa "lasciare mancare" e indica che l'angolo di apertura del cono è minore dell'angolo che il piano forma con l'asse ("manca" di qualcosa rispetto ad esso).

In particolare parleremo di *Circonferenza* quando il piano intersecante è perpendicolare all'asse del cono.



$\alpha = 90°$

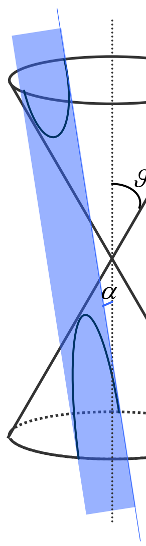
Se il piano secante ha la stessa inclinazione della semiapertura del cono allora avremo un *Parabola*.



$\alpha = \vartheta$

Il termine Parabola deriva dal greco "*parabállein*" che vuol dire "uguagliare". Esso si riferisce all'uguaglianza dell'ampiezza dell'angolo di apertura del cono e di quello formato dall'inclinazione del piano con l'asse.

In ultima analisi parleremo di *Iperbole* se il piano secante ha inclinazione minore dell'apertura del cono. In questo caso il piano interseca entrambe le parti del cono, che chiameremo falde. E la curva che si genera ha due componenti separate (non connesse).



$\alpha < \vartheta$

Il termine Iperbole deriva dal greco *"hyperbállein"* che significa "oltrepassare" e richiama il fatto che l'angolo di apertura del cono oltrepassa l'angolo formato tra il piano e l'asse.

Le due specie di coniche meglio visualizzabili sono la circonferenza e l'ellisse, entrambe sono curve chiuse. La circonferenza è un caso particolare di ellisse ottenuta quando il piano ha una particolare inclinazione (quando forma con l'asse un angolo retto).

Se consideriamo due piani paralleli π, π' che intersecano il cono perpendicolarmente all'asse, otteniamo,come abbiamo già visto, due circonferenze di raggi rispettivamente *R,R'*.

(Figura pag 50 libro geometria dello spazio)

Osserviamo che i due triangoli $V\overset{\Delta}{O'}R'$ e $V\overset{\Delta}{O}R$ sono simili avendo gli angoli congruenti.

Di conseguenza i raggi delle due circonferenze sono in proporzione.

Possiamo quindi concludere dicendo che:

Per proiezione (e quindi per similitudine), tutto ciò che avviene sull'intersezione di un piano, si trasforma su ogni altro piano parallelo ad esso mantenendo angoli e rapporti.

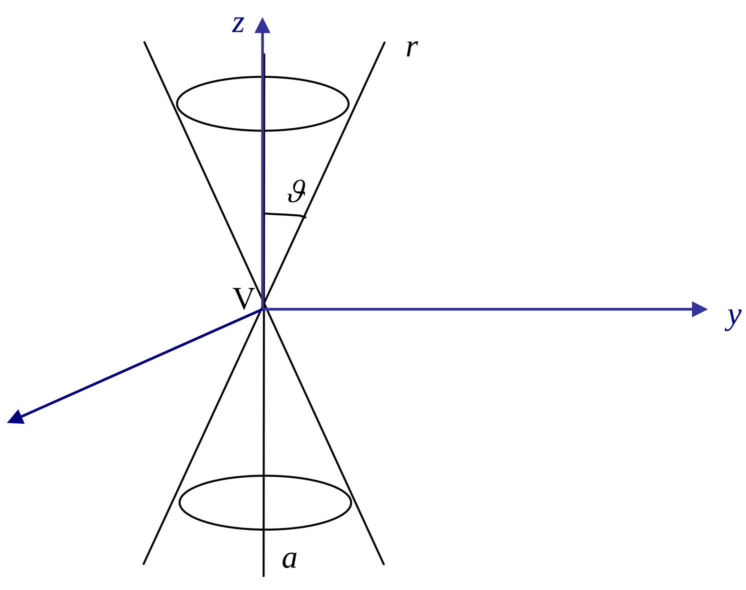
DEDUZIONE ANALITICA DEL CONCETTO DI CONICA

Abbiamo già visto nel paragrafo precedente che data una retta *r* nello spazio che intersechi in *V* la retta *a*, si chiama *superficie conica a due falde* la superficie generata in una rotazione completa di *r* attorno ad *a*.

Ci proponiamo ora di ricavare l'espressione analitica, ovvero l'equazione del cono così generato. Avremo bisogno quindi di "collocarlo nello spazio": in altre parole, dovremo fissare un sistema di riferimento nel quale "inserire" il cono.

La scelta di tale riferimento è *del tutto arbitraria* essendo le proprietà intrinseche di una superficie invarianti rispetto al sistema di assi scelto. Per questo motivo collochiamo il nostro cono in un sistema che vede l'asse del cono coincidente con l'asse *z* e il vertice nell'origine.

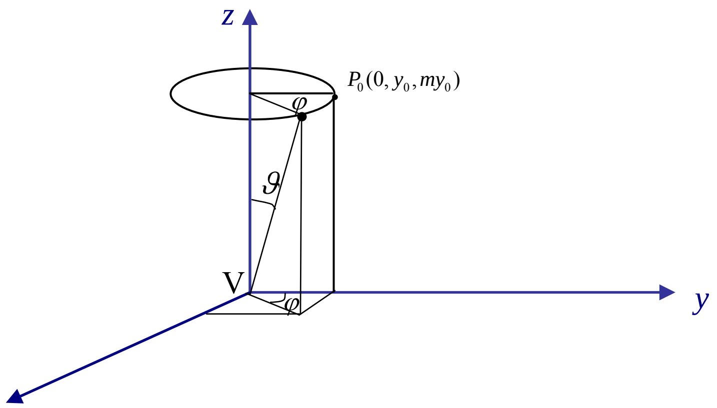
Ci aspettiamo che questa scelta renda più agevole il procedimento di calcolo per descrivere analiticamente l'oggetto.



Cerchiamo di ricavare l'equazione del cono con semplici osservazioni geometriche, utilizzando nozioni elementari di goniometria.

Abbiamo detto che il cono è generato dalla rotazione della retta *r* inclinata di un angolo ϑ; secondo il nostro sistema di riferimento, consideriamo la generatrice *r* giacente sul piano V*zy* e passante per l'origine *V*: essa avrà quindi equazione $\begin{cases} x = 0 \\ z = my \end{cases}$, con $m = \tan(90° - \vartheta), m > 0$.

I punti appartenenti ad essa saranno quindi descritti dalla coppia (y, my), al variare di *y*.



Fisso un punto $P_0 = (0, y_0, my_0)$ sulla generatrice *r*: si osserva che ruotanto attorno all'asse z di un angolo φ, il punto rimane sul piano $z = my_0$.

Sia φ l'angolo che descrive un generico punto P a distanza y dall'asse *a* ed appartenente ad *r* nella rotazione attorno all'asse *a;* esso avrà coordinate:

$$\begin{cases} x = y_0 \cos(\varphi) \\ y = y_0 \sin(\varphi) \quad \text{con } \varphi, y \text{ che variano} \\ z = my_0 \end{cases}$$

La precedente rappresenta *l'equazione parametrica* del cono, visto come superficie di rotazione nello spazio tridimensionale. Ogni punto appartenente al cono è quindi univocamente determinato al variare di y_0 e φ.

Questo significa che per descrivere la posizione (le coordinate *x*, *y*, *z*) di un qualunque punto P appartenente alla superficie conica abbiamo necessariamente bisogno di due parametri: y_0 che indica la sua quota, e φ che indica la "posizione di rotazione" di P.

Intuitivamente possiamo vedere il cono formato da infinite generatrici e φ identifica la generatrice su cui giace il punto P.

Ricordiamo che nella rotazione ϑ rimane fisso.

Supponiamo ora di fissare anche $y = k = \text{costante}$ reale, cosa accade?

In una tale condizione l'unico parametro che varia è φ, quindi le coordinate del generico punto P saranno:

$$\begin{cases} x = k\cos(\varphi) \\ y = k\sin(\varphi) \\ z = mk \end{cases}$$

La componente *z* è ora una costante, e per questo, al variare di φ il punto è vincolato a ruotare solo sul piano di equazione $z = mk$, descrivendo una circonferenza.

Riassumendo, mentre per descrivere una superficie avevamo bisogno di due parametri, per descrivere una curva piana ne basta uno.

Abbiamo inoltre trovato l'equazione parametrica di una circonferenza che riscriviamo:

$$\begin{cases} x = k\cos(\varphi) \\ y = k\sin(\varphi) \\ z = mk \end{cases}$$

Ritorniamo ora alla trattazione analitica di una sezione conica.

Partendo dall'equazione parametrica del cono con semplici passaggi algebrici l'espressione che otteniamo sarà:

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{m^2} = 0$$

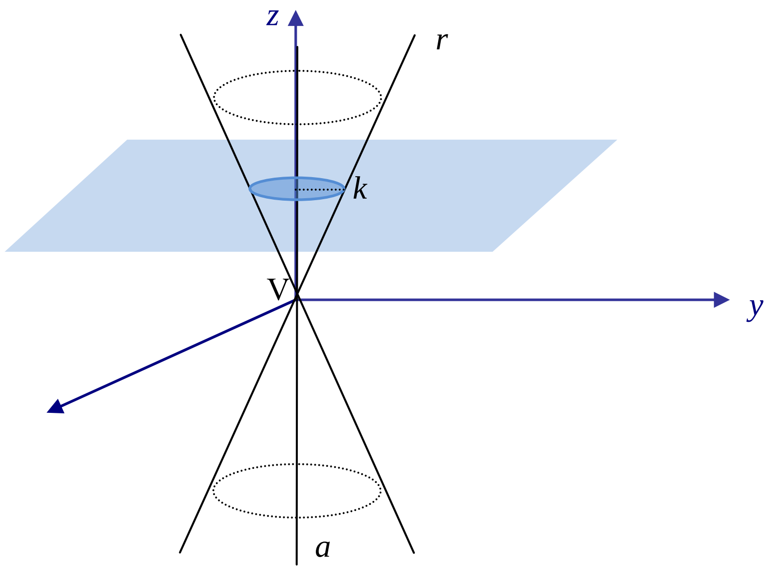
$$x^2 + y^2 - \tan^2(\theta)z^2 = 0$$

Questa rappresenta l'equazione cartesiana di un cono avente l'asse coincidente con l'asse *z*.

Per inciso il coefficiente angolare *m* rappresenta la cotangente dell'angolo ϑ che la generatrice forma con l'asse *a*.

Ci proponiamo ora di studiare analiticamente i risultati ottenuti intersecando il cono con un piano.

Consideriamo il caso più semplice in cui il piano π intersecante è parallelo al piano *Vxy*.



Esso avrà equazione $z = k$, intuitivamente esso è il luogo dei punti aventi quota k sull'asse z.
Otteniamo quindi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \tan^2(\theta) z^2 = 0 \\ z = k \end{cases}$$

da cui

$$x^2 + y^2 - k^2 \tan^2(\theta) = 0$$

Essendo il termine $k^2 \tan^2(\theta)$ una costante, che per convenzione chiamiamo R^2, l'equazione che si ottiene è una circonferenza avente raggio uguale a $k \tan(\theta)$.

Osserviamo che se $k = 0$, l'equazione diventa:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

che è soddisfatta dal solo punto di coordinate $(0,0)$, ossia l'origine: in tal caso la circonferenza si dice *degenere* e si riduce ad un punto.

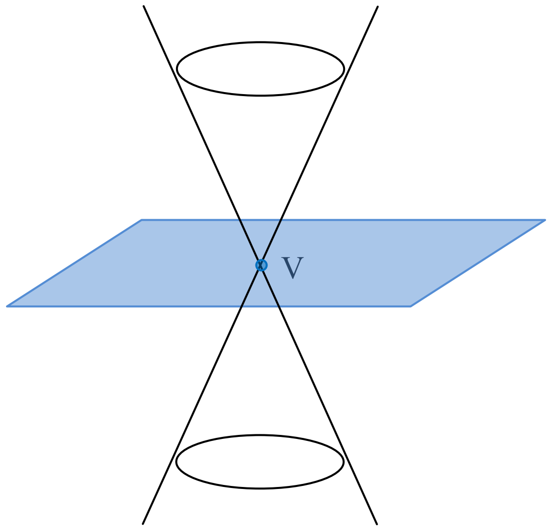
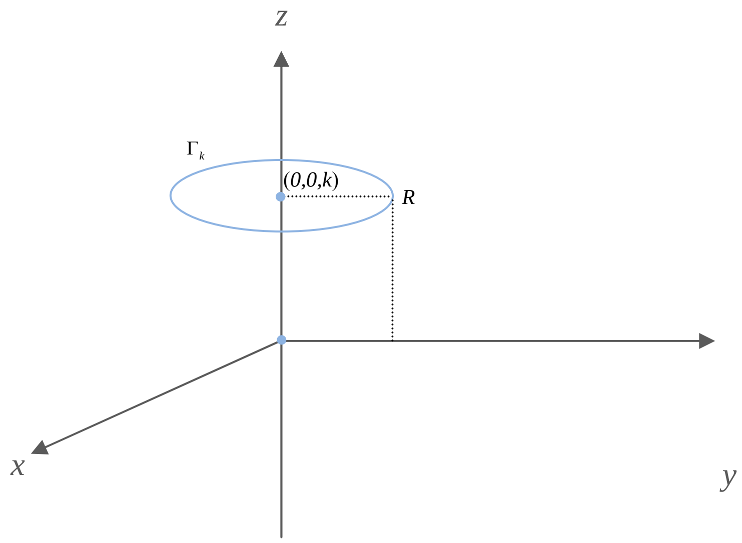


Tavola I.1

1. Sul piano $z = k$ considero la circonferenza Γ_k di centro (*0,0,k*) e raggio $R = mk$.

Che luogo forma l'unione delle circonferenze Γ_k al variare del parametro reale *k*?



2. Scrivere l'equazione parametrica di un cono aventi l'asse coincidente con l'asse *z* e generatrice di equazione $z = 5y$.

Fissata un'unità di misura sull'asse *z* trovare l'equazione della circonferenza di centro (0,0,1).

Ricavare poi da questa l'equazione cartesiana sul piano della circonferenza.

(**suggerimento**: ricordare che $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$)

Tavola I.2

1. Puntare una torcia verso il muro.

a) Con che “forma” esce la luce dalla torcia?

b) Che figura si forma sul muro nei casi in cui:

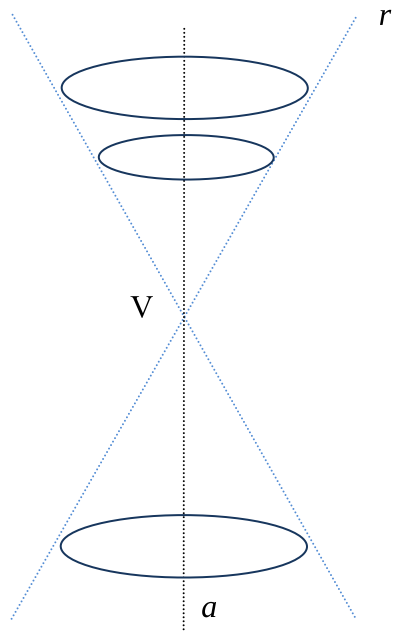
i) il braccio di colui che punta la torcia è perpendicolare al muro

ii) il braccio è inclinato rispetto al muro

iii) a cosa si possono associare tali fenomeni in termini di angoli e piani?

Soluzione Esercizio1 **Tavola I.1**

Al variare del parametro reale k si ottiene un insieme di circonferenze Γ_k aventi tutte centro sull'asse a la cui unione descrive il cono



Soluzione Esercizio2 Tavola I.1

Per l'equazione del cono basta sostituire al valore *m* il coefficiente angolare della retta $z = 5y$.

Per quanto riguarda la circonferenza essa avrà equazione

$$\begin{cases} x = \cos(\varphi) \\ y = \sin(\varphi) \\ z = 5 \end{cases}$$

L'equazione cartesiana sarà $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 5 \end{cases}$

Soluzione Esercizio1 **Tavola I.2**

Le soluzioni sono facilmente riscontrabili con una semplice applicazione.

La risposta alla prima domanda è CONO: è facilmente comprensibile se ad esempio si pensa alla forma conica che formano i fari di una macchina (oppure ad una torcia).
Vediamo nelle figure seguenti lo schema geometrico di tale fenomeno (Fig.a e Fig.b):

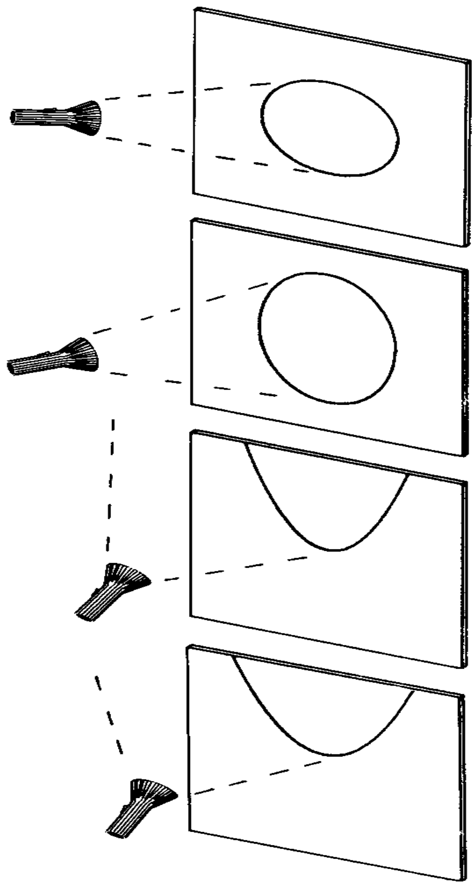


figura a

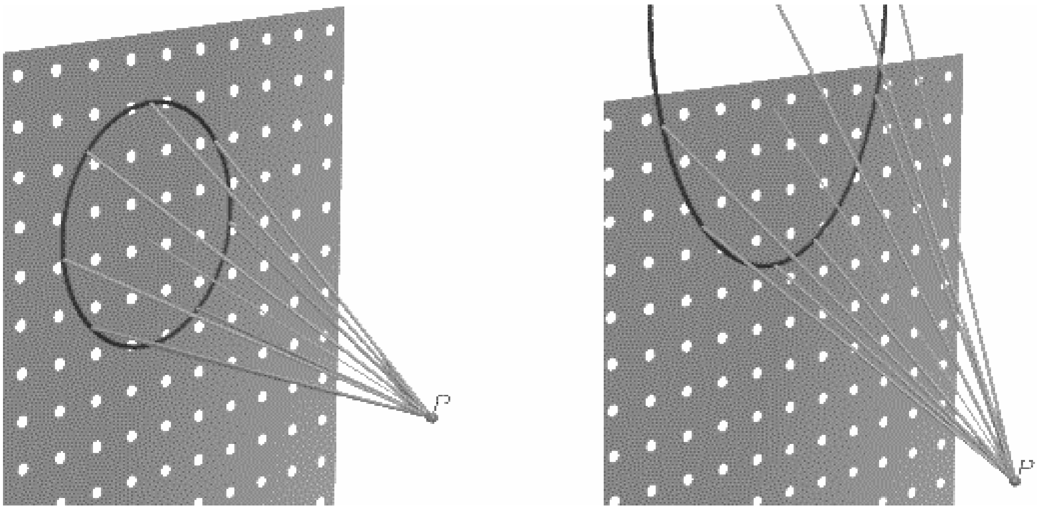


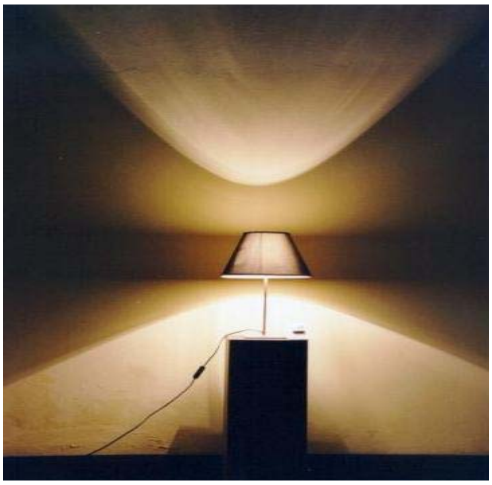
figura b

Per rispondere alla seconda domanda sperimentiamo i seguenti casi:

- Puntiamo la torcia in direzione perpendicolare al piano del muro, così facendo il cono geometrico è rappresentato dal cono di luce mentre il muro rappresenta il piano intersecante.
  La figura ottenuta è una circonferenza.

- Variamo ora la direzione di propagazione della luce, inclinando leggermente la torcia.
  Si ottiene in prima analisi un'ellisse, e man mano che l'angolo formato tra il fascio di luce ed il muro diminuisce, vediamo un'iperbole.

Un'interessante applicazione "casalinga" di conica è l'abat-jour: essa proietta un faccio di luce iperbolico.



Ci sono inoltre molte applicazioni pratiche nella realtà di fasci di luce conici, come i fari di un concerto, i fari di una macchina o il famoso occhio di bue.

APPENDICE: Angolo tra retta e piano

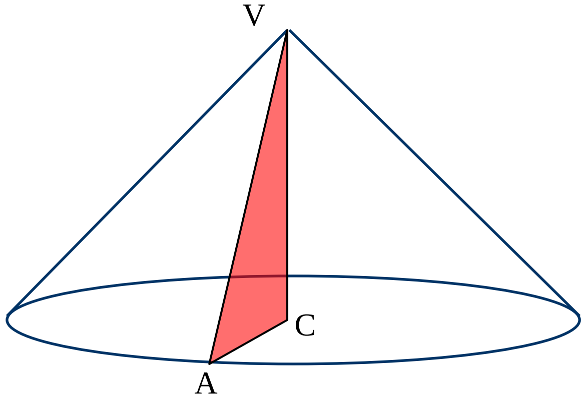
Sia *r* una retta e π un piano che si intersecano in un punto *Q*, si definisce angolo tra la retta *r* e il piano π l'angolo che si forma con una retta *s* per *Q* che sia contenuta in π.
Sia *t* la perpendicolare per Q al piano π e β un piano contenente *t* ed *r*: in generale esso e' unico.
L'angolo r e π e' per definizione l'angolo compreso tra r e una retta *s* ottenuta intersecando π con β

LEZIONE II

CONO E CONICHE NELLA STORIA

Ellisse, parabola e iperbole sono termini familiari per chi opera nell'ambito delle sezioni coniche, sono termini che giungono a noi da molto lontano nel tempo, dal primo secolo dell'età ellenistica, quando Apollonio adattò queste parole, già precedentemente utilizzate per indicare particolari soluzioni di equazioni di secondo grado, allo scopo di catalogare le tre sezioni di un cono.
Il "Grande Geometra", come fu notoriamente appellato per la fama che conseguì con il suo trattato, le "Coniche", non fu certo il solo ad occuparsi dell'argomento, poté senz'altro avvalersi di studi allora noti e precedentemente elaborati da altri matematici, tra i quali Menecmo ed Euclide.
Di quest'ultimo si sa che scrisse un'opera al riguardo (le "Coniche di Euclide") che purtroppo è andata perduta.
Per parlare delle coniche e comprendere con maggiore chiarezza il concetto che di esse avevano matematici del calibro di Menecmo ed Euclide, partiamo dal concetto di cono, così come viene definito da Euclide stesso nei suoi Elementi (Libro XI,Definizioni 18-19-20).

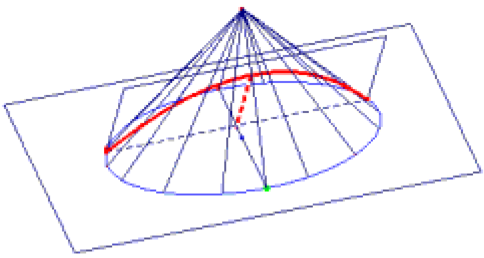
Quando un triangolo rettangolo ruota intorno ad un cateto fissato fino a ritornare alla posizione da cui era partito, la figura così racchiusa è un cono. Se il triangolo rettangolo è isoscele, il cono si dice rettangolo; se la rotazione avviene attorno al cateto minore, il cono si dice ottusangolo; se la rotazione avviene attorno al cateto maggiore il cono si dice acutangolo.



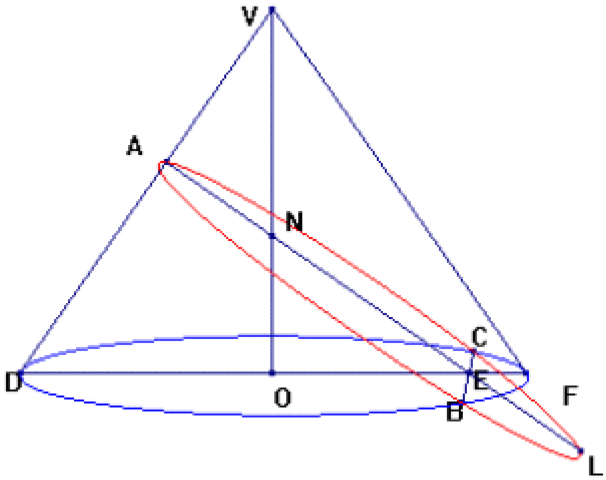
L'asse del cono è il cateto che rimane fisso e intorno al quale ruota il triangolo. La base è il cerchio descritto dall'altro cateto.

Nella teoria di Menecmo-Euclide, le coniche sono presentate come sezioni del cono con un piano, più precisamente come quelle figure che si intercettano sulla superficie del cono tagliandolo materialmente o idealmente con un piano perpendicolare ad una sua generatrice.
Variando il cono, si ottengono le tre diverse sezioni:

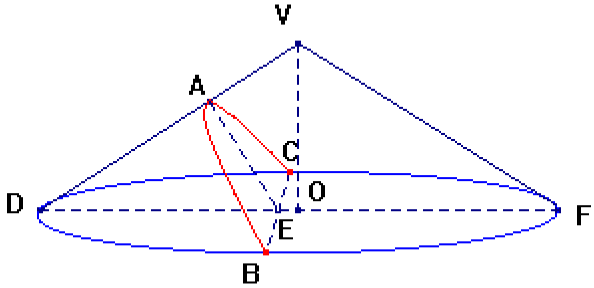
orthotome quando il cono è rettangolo;



oxytome quando il cono è acutangolo;



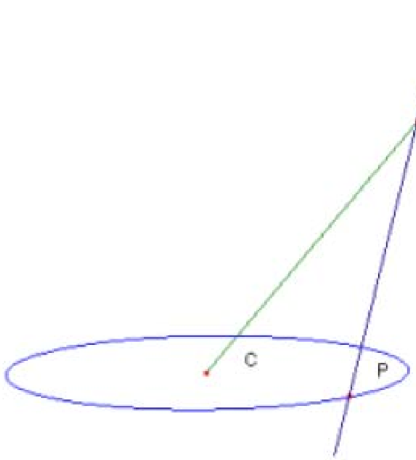
amblytome quando il cono è ottusangolo.

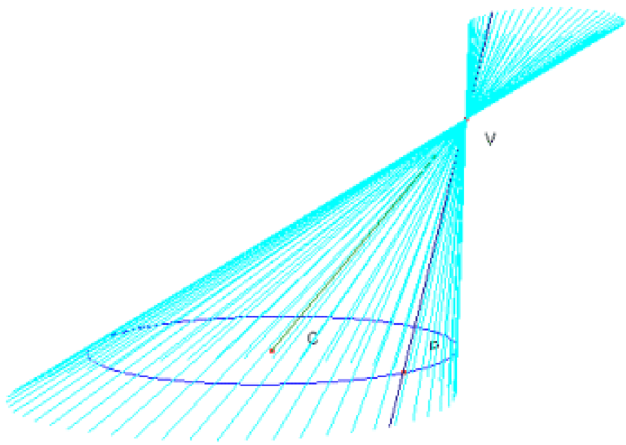


La costruzione delle tre diverse sezioni coniche prevede quindi una medesima tecnica, applicata a tre oggetti geometrici distinti; tecnica che si mantiene tale fino ad Apollonio che nel suo trattato per la prima volta dimostrò che non è necessario prendere sezioni perpendicolari ad un elemento del cono e che da un unico cono è possibile ottenere tutte e tre le varietà di sezioni, semplicemente variando l'inclinazione del piano di intersezione.

Altre due importanti generalizzazioni, introdotte nelle *Coniche* da Apollonio, sono la dimostrazione che il cono non debba essere necessariamente retto e l'introduzione del cono a doppia falda la cui definizione è la stessa che viene usata ancora oggi per il *cono circolare*.

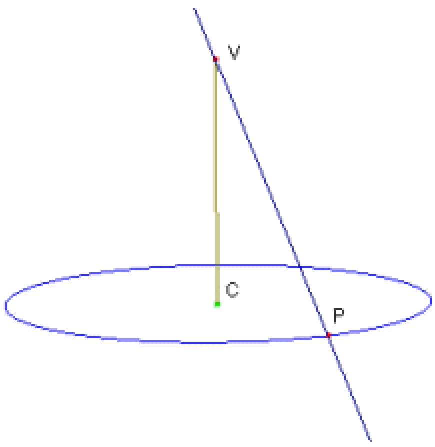
Se da un certo punto *V* si traccia alla circonferenza di un cerchio non situato nello stesso piano del punto, una retta prolungata da una parte e dall'altra, e se, restando fisso il punto, la retta ruotando lungo la circonferenza, riprende la posizione da cui ha iniziato a muoversi, io chiamo superficie conica quella che, descritta dalla retta, è composta di due superfici opposte al vertice, dove cresce verso l'infinito. Chiamo vertice di questa superficie il punto fisso *V* e asse la retta *VC* tracciata per il punto e il centro C del cerchio.

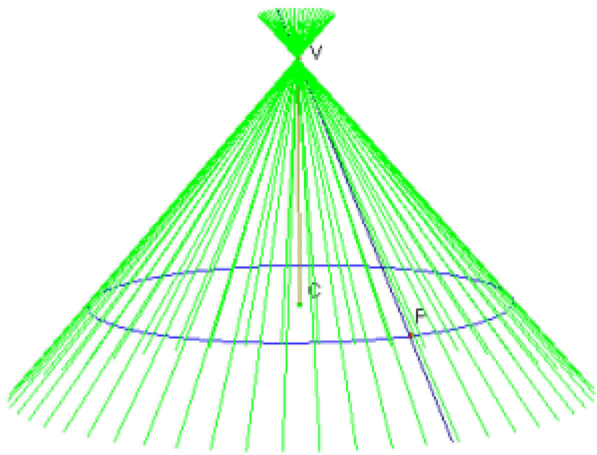




Chiamo *cono* la figura delimitata dal cerchio e dalla superficie conica situata tra il vertice e la circonferenza del cerchio; *vertice* del cono il punto *V* che è vertice stesso della sua superficie; *asse* del cono la retta tracciata dal vertice al centro del cerchio; e *base* il cerchio.

Tra i coni, chiamo *retti* quelli che hanno gli assi perpendicolari alla base e *obliqui* o *scaleni* quelli che non hanno gli assi perpendicolari alla base.

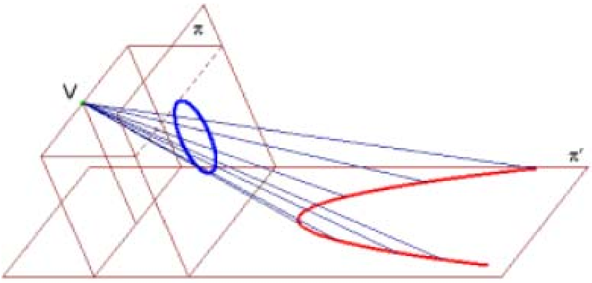


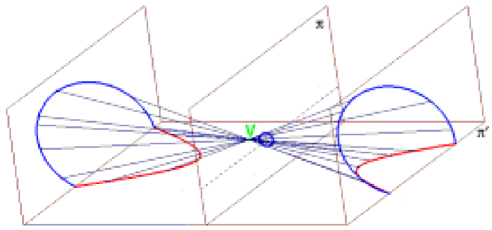


(Apollonio, Coniche, Libro I)

Con l’introduzione del cono a doppia falda Apollonio fece sì che l’iperbole assumesse la forma di quella curva a due rami che ci è oggi familiare e che non era affatto scontata per i matematici antichi che spesso parlavano di due “iperboli” piuttosto che di “due rami” di un’unica iperbole.

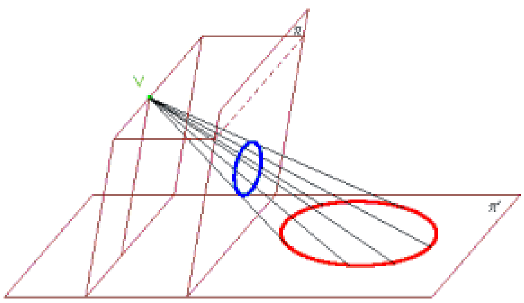
Restando sul “cono”, ma variandone il concetto, cioè passando dall’idea di solido ottenuto per *rotazione* di un triangolo (Menecmo-Euclide) o di una retta (Apollonio), all’idea di solido costituito da un insieme di *raggi* che proiettano i punti di una circonferenza da un centro (vertice) esterno al piano della circonferenza su un altro piano, si può ottenere un nuovo punto di vista, senz'altro sconosciuto ai matematici dell'antica Grecia, che interpreta le coniche come forme diverse di un unico ente matematico, la circonferenza, di cui esse sono le proiezioni.





Questa concezione si sviluppa nei secoli XV e XVI, quando per esigenza artistica, ci si rivolge alla matematica per formulare un supporto geometrico, basato su regole precise, che permetta la definizione di un metodo teorico della rappresentazione dello spazio in piano: la prospettiva

In particolare tale sistematico ordinamento delle leggi della prospettiva insieme all'impiego di strumenti per il disegno prospettico, suggerirono la formulazione del teorema di Stevin (1610) sulla proiezione di un fascio di rette.



Tornando ad Apollonio e al suo trattato, è interessante soffermarsi un attimo sulla prefazione del Libro V delle "Coniche", prefazione probabilmente motivata nell'autore dall'opinione di quanti criticavano il suo operato perché lo consideravano privo di sviluppi pratici.
Al riguardo Apollonio asserisce: *l'argomento è uno di quelli che sembrano degni di essere studiati per sé stessi.*

NECESSITA' ARTISTICHE DEL CONCETTO DI CONICA

RAPPRESENTAZIONI PROSPETTICHE DI UNA CIRCONFERENZA

Metodi empirici per trovare una curva piana che susciti la sensazione visiva di uno "scorcio" di una circonferenza.

ALBERTI-DE PICTURA

a) Approssimazione di un cerchio con piccoli quadrati che poi saranno "scorciati"

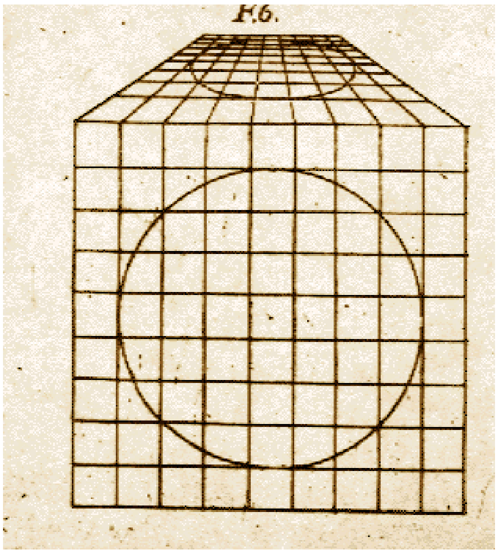
(metodo Piero della Francesca)

b) Ombra data dalla frapposizione di un disco fra una candela e una parete sulla quale viene proiettata.

Il problema non banale è quello di "rappresentare" una circonferenza su un piano, e quindi trovare una qualche proprietà geometrica che caratterizzi i punti del piano.

I dati a nostra disposizione sono:

- posizione circonferenza
- raggio circonferenza
- posizione occhio
- posizione quadro



Pascal, infatti, nel suo trattato sulle coniche (che oggi è stato in gran parte perduto e ne rimane solo una breve trattazione fatta da Leibniz), descrive le coniche proprio come proiezioni di una circonferenza su un quadro.

Cioè:

- OCCHIO-VERTICE CONO
- CIRCONFERENZA-BASE CONO
- QUADRO-INTERSEZIONE CON IL CONO che genera la conica

Egli dá la soluzione teorica di come tracciare geometricamente una conica conoscendo la posizione di 5 punti, metodo basato sul teorema dell'*ESAGONO MISTO.*

Il Teorema di Pascal**,** di Blaise Pascal (1623-1662), è uno dei teoremi-base della teoria delle coniche. Premesso che sei punti di una conica individuano un esagono inscritto in essa, il teorema fornisce una condizione grafica caratteristica affinché un dato esagono sia inscrittibile in una conica.

Teorema di Pascal**:** *condizione necessaria e sufficiente affinché un esagono sia inscrittibile in una conica è che siano allineati i punti di intersezione delle tre coppie di lati opposti.*

Dato che un risultato della teoria delle coniche afferma che per cinque punti generici passa una sola conica (dove per generici si intende che i cinque punti siano distinti e che non ve ne siano quattro tra di loro allineati mentre l'aggettivo generico suggerisce che cinque punti presi a caso soddisfano quasi certamente questa proprietà), il teorema fornisce una condizione affinché un sesto punto vi appartenga.

Siano **A1** ,**A2** ,**A3** ,**A4** ;**A5** ,**A6** sei punti nel piano e siano **B1**, **B2**, **B3** i punti comuni rispettivamente alle rette **A1-A2** e **A4-A5**, alle rette **A2-A3** e **A5-A6**, alle rette **A3-A4** e **A6-A1**.

I sei punti iniziali appartengono ad una conica se e soltanto se i tre punti **B1**, **B2**, **B3** appartengono ad una retta, chiamata retta di Pascal.

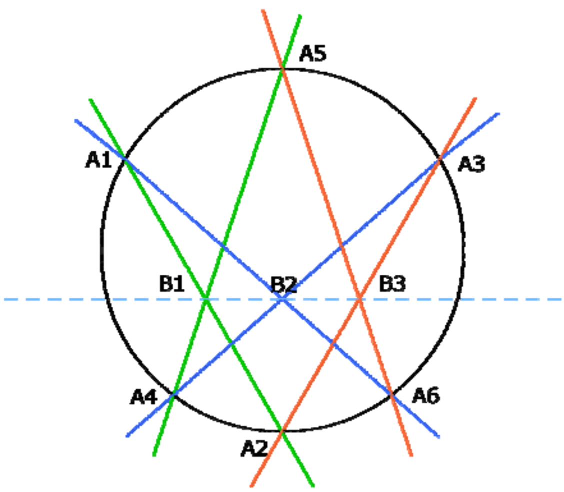


Tavola II.1

1. **Occorrente**: un cono di vetro trasparente parzialmente riempito d'acqua colorata; pennarelli indelebili.

Attività d'osservazione: variando l'inclinazione del cono, la superficie d'acqua produce sulla superficie del cono l'immagine di una sezione conica, che può anche essere ricalcata con il pennarello.

Tavola II.2

2. Utilizzando matita e riga, verifica che il seguente esagono inscritto in una conica verifica le condizioni enunciate nel teorema di Pascal.

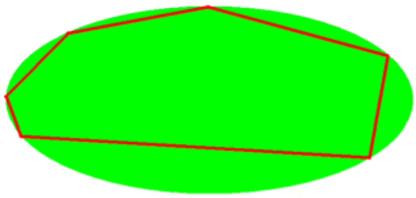
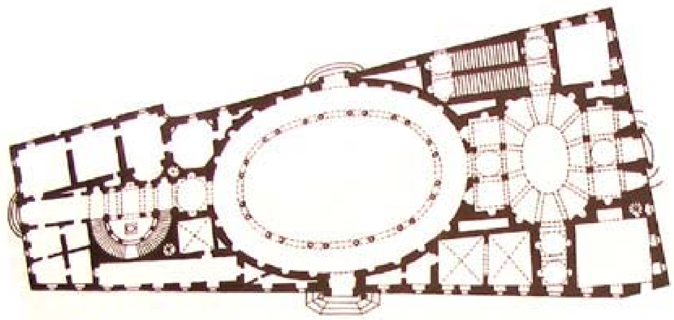


Tavola II.3

"Nel Rinascimento si ripresero spesso modelli e canoni architettonici tipici dell'antichità classica, rielaborandoli in modo nuovo e originale; così si progettarono spesso gli edifici a partire da forme regolari. Gli spazi vennero organizzati seguendo canoni geometrici rigorosi e le forme curve, proprio per la loro regolarità, tornarono a destare interesse per gli architetti del periodo.
Le opere di Filippo Brunelleschi (1377-1446) e di Leon Battista Alberti (1404-1472) a Firenze, di Donato Bramante (1444-1514) in Lombardia e a Roma, sono esempi canonici della regolarità architettonica rinascimentale.
E' tuttavia con il nuovo stile affermatosi in Italia e in Europa nel XVII secolo, il cosiddetto barocco, che le forme curve e in particolare l'ovale e l'ellisse- assumono una particolare centralità in architettura: in un primo periodo le curve più regolari, quali le coniche e successivamente, nel periodo più maturo, quelle costruite raccordando archi di conica o alternandoli e componendoli in vari modi."

Osserva come le seguenti strutture architettoniche sono caratterizzate da forme coniche o da archi di coniche.

F. Borromini, Sant'Ivo alla Sapienza, Roma, interno della cupola



F. Borromini, Progetto per il Palazzo Carpegna, Roma

F. Borromini, Scalone Palazzo Barberini, Roma

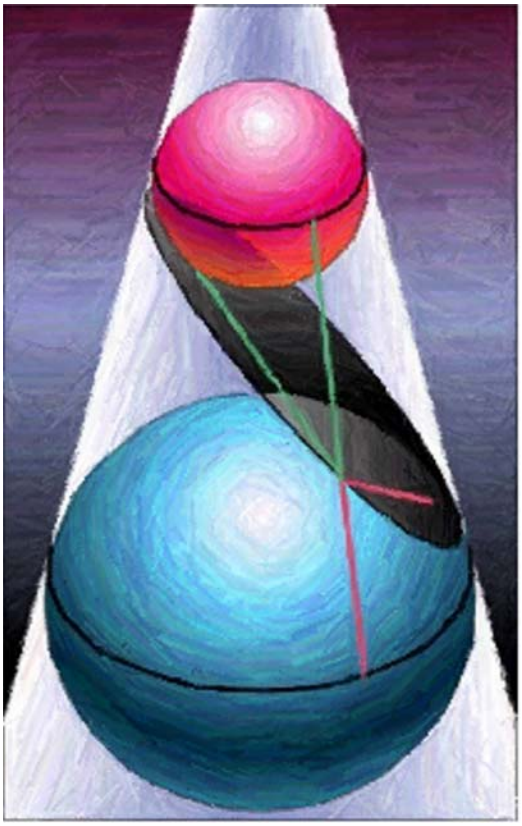
F. Borromini, S.Carlino alle Quattro Fontane, Roma

LEZIONE VI

CONICHE VISTE COME OMBRA DI UNA SFERA. SFERE DI DANDELIN

Nella geometria, le coniche (l'*ellisse*, la *parabola* e l'*iperbole*) definite come sezioni piane di un cono, furono studiate inizialmente nello spazio in quanto curve "solide".
Il legame semplice e suggestivo tra teoria piana e teoria "solida" viene stabilito nel 1822 dal matematico franco-belga Germinal Pierre Dandelin.
Diremo che una sezione conica possiede una o due *sfere di Dandelin* caratterizzate dalla proprietà:

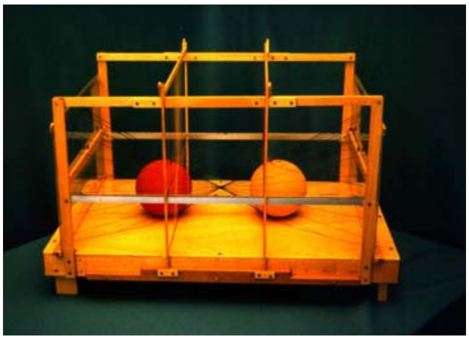
Una sfera di Dandelin e' una sfera interna al cono ed e' tangente sia al piano che al cono,cioe' interseca il piano in un unico punto e il cono in una circonferenza.



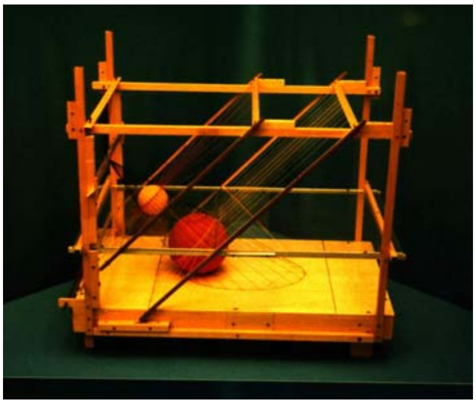
Sfere di Dandelin per l'ellisse

In particolare, ogni sezione conica ha associata una sfera di Dandelin a ciascuno dei suoi fuochi.

- Un'*ellisse* possiede due sfere di Dandelin, entrambe tangenti alla stessa falda del cono.
- Una *iperbole* ha due sfere di Dandelin che toccano le falde opposte del cono.
- Una *parabola* possiede una sola sfera di Dandelin.



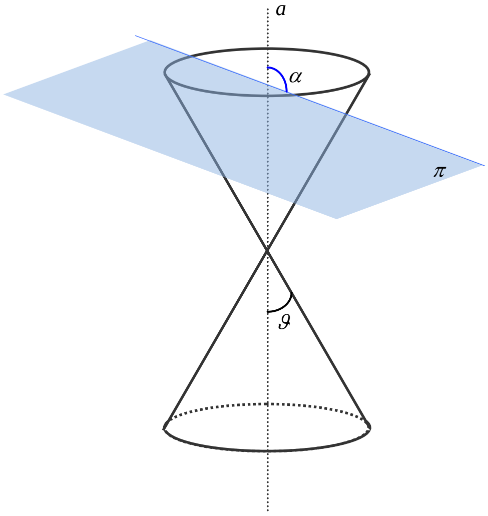
Costruzioni dei fuochi dell'iperbole



Costruzione dei fuochi dell'ellisse

Costruzione dei fuochi della parabola

Nello specifico, riprendendo la notazione della Lezione I rigurdo la semiapertura del cono e l'inclinazione del piano π,



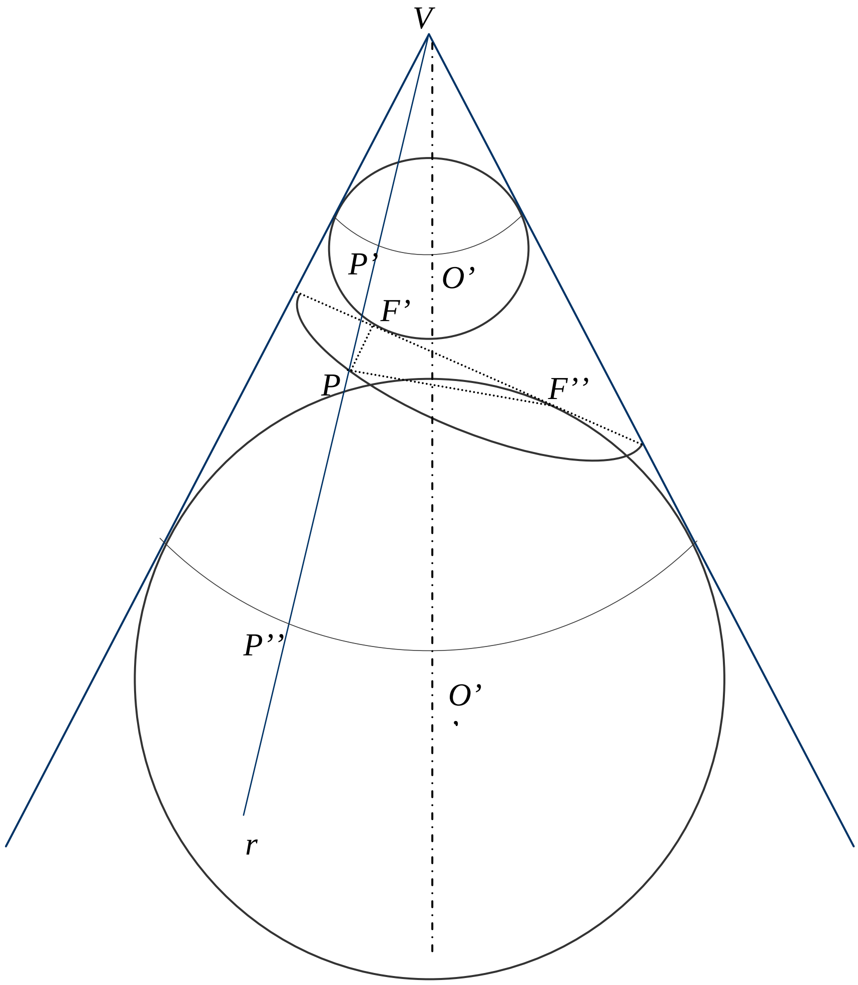
diremo che esistono due sfere iscritte in una superficie conica e tangenti ad un piano π (che la interseca e non passa per il vertice) se l'angolo θ non è uguale all'angolo α formato dall'asse della superficie col piano π; ne esiste una sola se $\theta = \alpha$.
Come abbiamo detto i punti di contatto delle sfere inscritte nella superficie conica e tangenti al piano π della sezione si dicono fuochi della conica. Si chiama invece direttrice corrispondente ad un fuoco la retta comune a π e al piano che passa per il circolo di contatto della superficie conica con la sfera iscritta corrispondente al fuoco stesso.
Ogni ellisse ed ogni iperbole ha due fuochi e due direttrici corrispondenti, ogni parabola ha un solo fuoco e una direttrice corrispondente.

L'interesse per le sfere di Dandelin deriva dal fatto che è nota un'elegante dimostrazione del matematico belga Dandelin dell'equivalenza tra la definizione di conica data da Apollonio e la definizione di conica come luogo geometrico soddisfacente proprietà di carattere metrico. Non può sfuggire l'importanza della dimostrazione di questo teorema in quanto è possibile parlare delle coniche e studiarle rimanendo nel piano.

La dimostrazione puo' essere rivista a partire dalla definizione del fuoco, arrivando ad una dimostrazione di esistenza per le sfere di Dandelin.
Procediamo quindi, alla costruzione geometrica dei fuochi per ciascuna conica.

Ellisse

I fuochi dell'ellisse ottenuta intersecando un cono con un piano sono i punti di contatto delle due sfere tangenti (internamente) alla superficie conica.



Sia r una qualunque generatrice del cono e siano P, P' e P'' rispettivamente i punti in cui *r* taglia l'ellisse, la circonferenza di contatto col cono della sfera di centro O' tangente in F' al piano e la circonferenza di contatto col cono della sfera di centro O'' tangente in F'' al piano. Dalla costruzione risulta evidente che il punto P è *esterno alle due sfere*.

I due segmenti $\overline{PF'}$ e $\overline{PP'}$ sono uguali perchè segmenti di tangenti condotte da un punto esterno ad una stessa sfera.

Analogamente sarà anche $\overline{PF''}$ uguale a $\overline{PP''}$. Sommando membro a membro le due uguaglianze trovate

$$\begin{cases} \overline{PF'} = \overline{PP'} \\ \overline{PF''} = \overline{PP''} \end{cases}$$

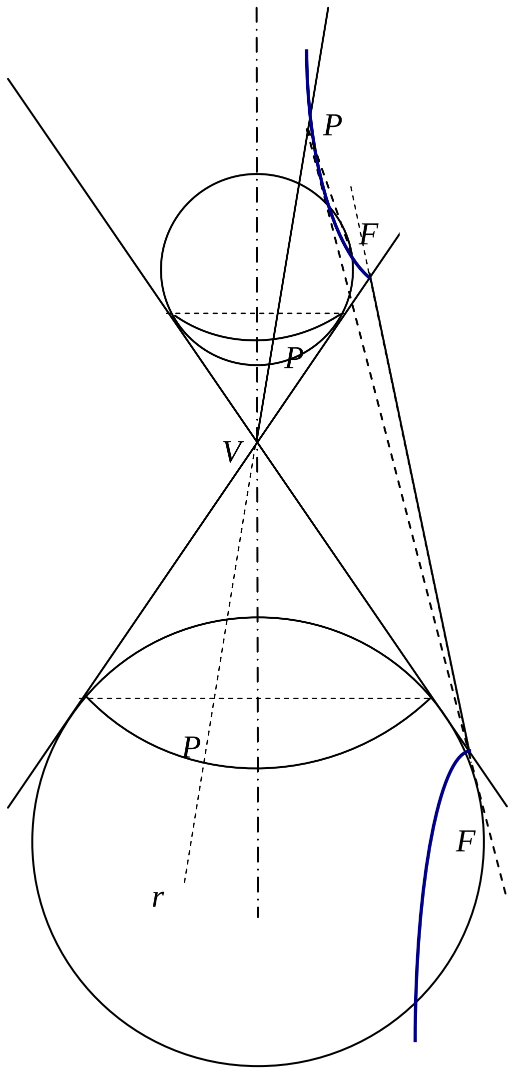
Abbiamo la relazione:

$$\overline{PF'} + \overline{PF''} = \overline{PP''} = \text{costante}$$

che costituisce, appunto,la definizione dell'ellissse considerata come *il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.*

Iperbole

I fuochi dell'iperbole ottenuta intersecando un cono con un piano sono i punti di contatto delle due sfere tangenti al piano e tangenti (internamente) alla superficie conica.



Rivedendo un ragionamento analogo a quello fatto per l'ellisse e osservando attentamente la figura potremo dire che sarà:

$$\begin{cases} \overline{PF''} = \overline{PP''} \\ \overline{PF'} = \overline{PP'} \end{cases}$$

e sottraendo membro a membro le due precedenti uguaglianze abbiamo le relazione

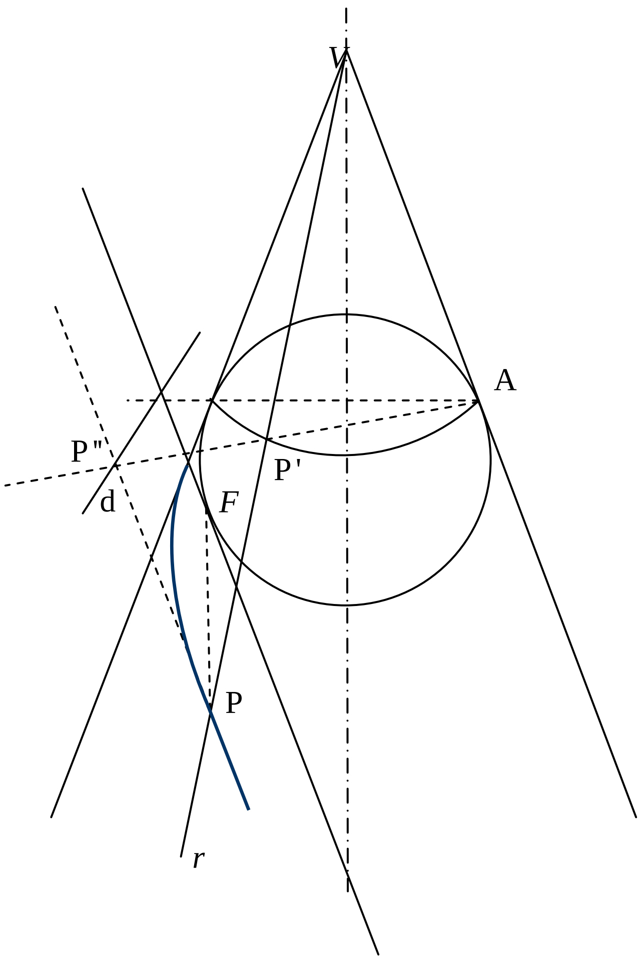
$$\overline{PF''} - \overline{PF'} = \overline{P'P''} = \text{costante}$$

relazione che costituisce, appunto, la definizione dell'iperbole considerata come *il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.*

Parabola

Il fuoco della parabola ottenuto intersecando un cono con un piano è il punto di contatto della sfera tangente (internamente) alla superficie conica.

La direttrice della parabola risulta l'intersezione del suddetto piano con quello in cui giace la circonferenza di contatto tra cono e sfera.



Siano P un punto generico della parabola; P' il punto in cui la generatrice r passante per P incontra la circonferenza di contatto tra il cono e la sfera; P'' la proiezione di P sulla direttrice.

Osservando la figura per la nota proprietà delle tangenti ad una sfera condotte ad un punto esterno sarà:

$$\overline{PP'} = \overline{PF}$$

Inoltre, i tre punti A, P', P'' sono allineati in quanto giacciono sull'intersezione del piano in cui giace la circonferenza di contatto tra cono e sfera con il piano determinato dalle due rette parallele $\overline{AV}$ e $\overline{PP'}$ (ambedue parallele all'asse della parabola).

I due triangoli $A\hat{V}P''$ e $P'\hat{P}P''$ sono simili e dato che il primo è isoscele anche il secondo lo sarà. Avremo pertanto:

$$\overline{PP'} = \overline{PP''}$$

La proprietà transitiva , applicata alle due uguaglianze stabilite, ci permette di concludere che sarà:

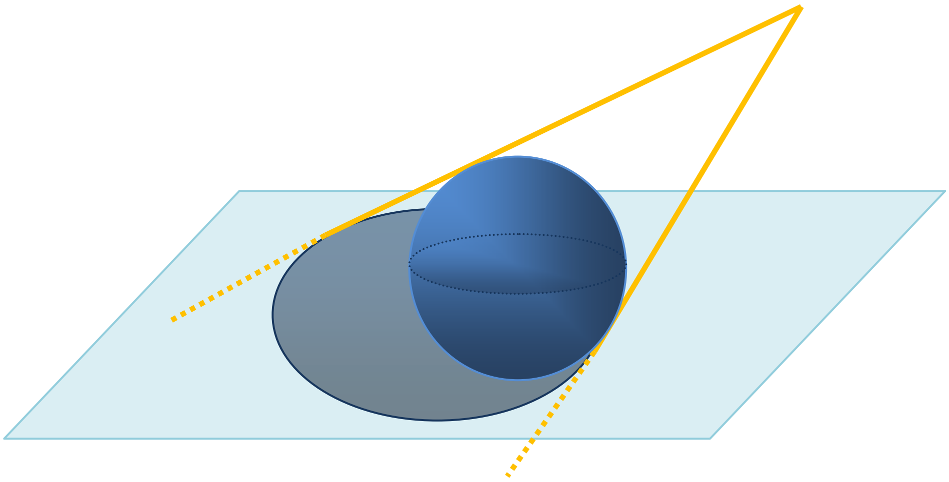
$$\overline{PF} = \overline{PP''}$$

Relazione che costituisce, appunto, la definizione della parabola come *luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice*.

In conclusione, dall'analisi delle dimostrazioni del teorema di Dandelin sull'iperbole e sulla parabola, si può osservare che:

- la dimostrazione dei fuochi dell'iperbole è analoga a quella dell'ellisse, solo che invece di sommare le uguaglianze trovate, bisogna andarle a sottrarre ottenendo così la definizione classica di *iperbole*;
- la dimostrazione del fuoco della parabola invece necessita di qualche osservazione in più sulla figura per ottenere la definizione classica di *parabola*.

Ritroviamo di nuovo nella realtà questo risultato ponendo su di un tavolo una sfera,e illuminiamo tale sfera con una torcia.



Il cono luminoso genererà un’ombra che la variare dell’inclinazione della luce assumerà la forma di una conica. Ad esempio se la sorgente di luce è in un piano parallelo al tavolo e passa al di sopra della sfera, avremo una parabola, e se abbassiamo la fonte luminosa si otterrà il ramo di un'iperbole. Il punto di contatto tra sfera e il tavolo è il fuoco delle conicha ottenuta. Possiamo immaginare la sorgente luminosa come il vertice di un cono che proietta di conseguenza il tavolo sarà considerato come il piano di taglio.

Tavola VI.1

1. Data una circonferenza ed un punto esterno ad essa, dimostrare che le tangenti condotte dal punto alla circonferenza sono uguali tra loro.

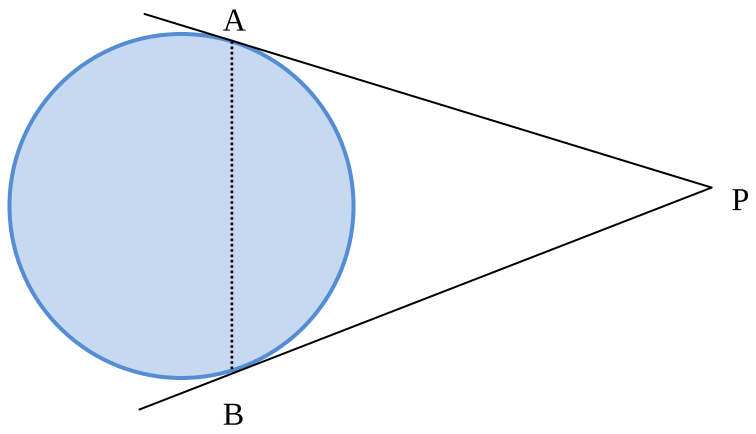
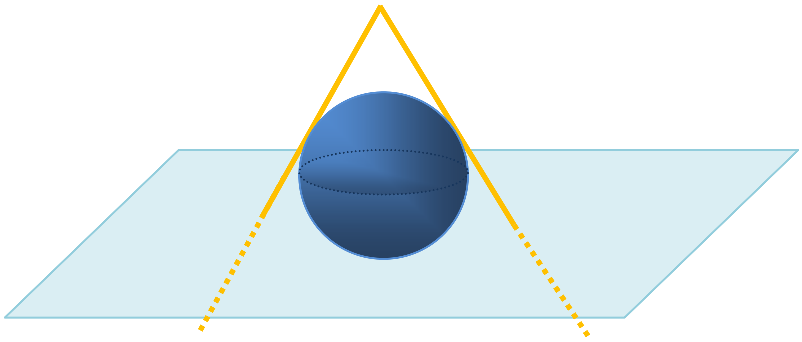


Tavola VI.2

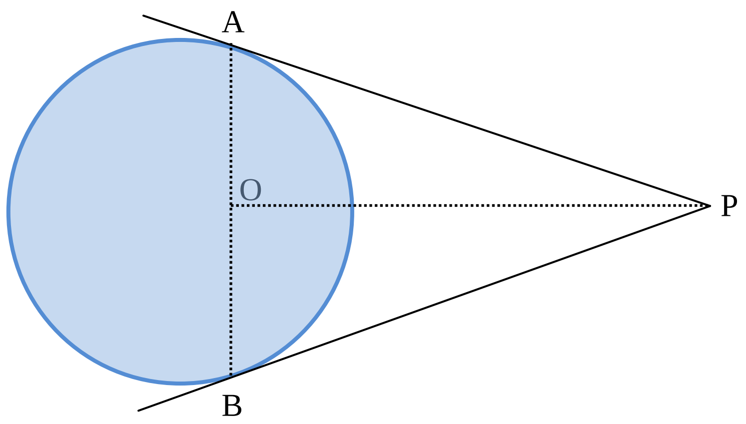
1 Disegnare l'ombra generata dal fascio di luce posizionato "perpendicolarmente" al tavolo (vedi figura).

2 Dopo aver verificato che l'ombra generata è una circonferenza, stabilire cosa rappresenta il centro della circonferenza così formata.



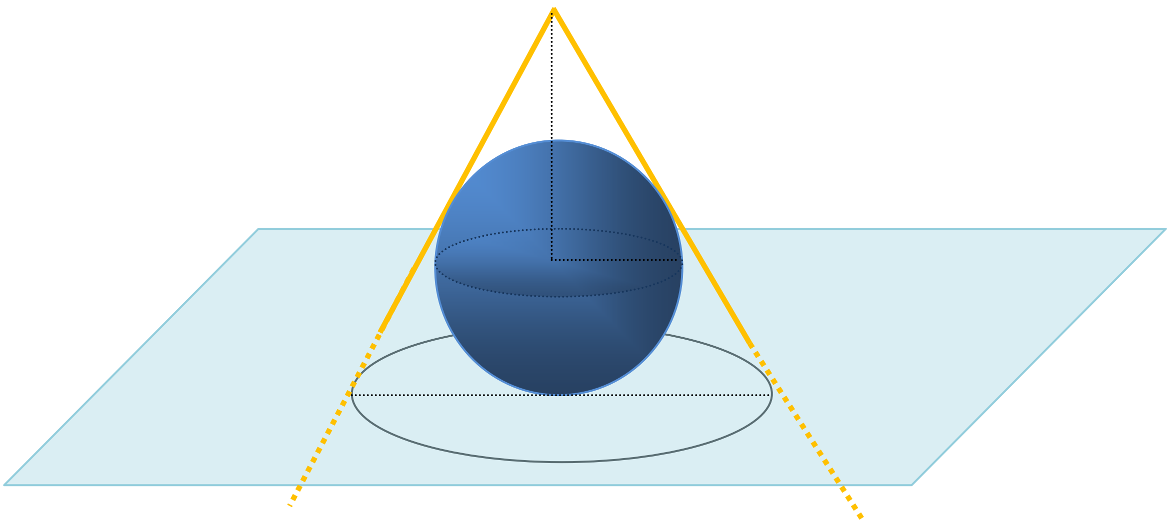
Soluzione Esercizio1 Tavola VI.1

La dimostrazione di questa proprietà consiste nell'applicazione di teoremi di similitudine sui triangoli $A\overset{\Delta}{O}P$ e $O\overset{\Delta}{P}B$.



Soluzione Esercizio1 **Tavola VI.2**

Si verifica facilmente che l'ombra generata è una circonferenza: in questo caso infatti il tavolo rappresenta il piano secante il cono di luce perpendicolare all'asse passante per il centro O della sfera, e la circonferenza la sezione conica risultante.



PROPRIETA' FOCALI DELLE CONICHE (Elementi lezione V)

[Inserire nelle varie coniche la descrizione analitica di fuochi e direttrici]

Le coniche godono di proprietà geometriche relative ai fuochi rilevanti per la riflessione di raggi luminosi.

Definiamo, a tal proposito, *raggio focale* ogni segmento che congiunge il fuoco di una conica con ogni suo punto.

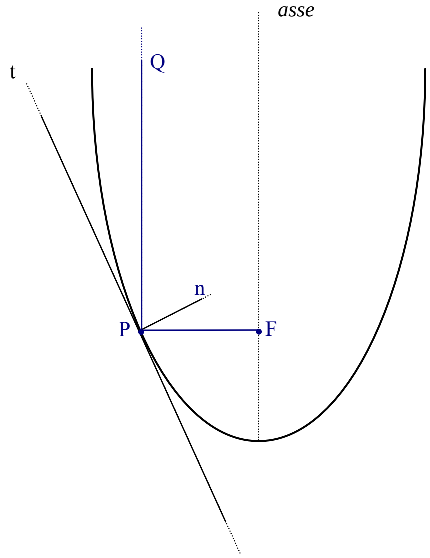
Nell'ellisse e nell'iperbole definiamo *asse focale* la retta che congiunge i fuochi mentre nella parabola definiamo *asse focale* la retta che congiunge il fuoco con il vertice.

Per costruire gli specchi ellittici, iperbolici e parabolici facciamo ruotare ciascuna curva attorno al proprio asse focale. Immaginiamo di aver costruito degli specchi aventi le forme di ellissoide, iperboloide e paraboloide; applicando ad essi le leggi della riflessione possiamo analizzare le proprietà sopra citate.

PARABOLA

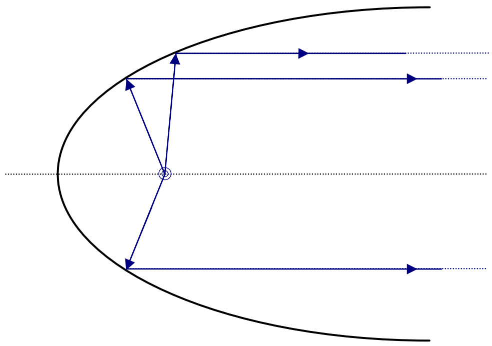
Il raggio focale *FP* e la semiretta *Q*, parallela all'asse, formano con la retta *t* tangente alla parabola in *P*, angoli congruenti. Anche gli angoli che *FP* e *PQ* formano con la retta *n* perpendicolare alla tangente sono congruenti, perché complementari di angoli congruenti.

In questo caso la retta tangente è esterna all'angolo $F\hat{P}Q$.



Specchio Parabolico

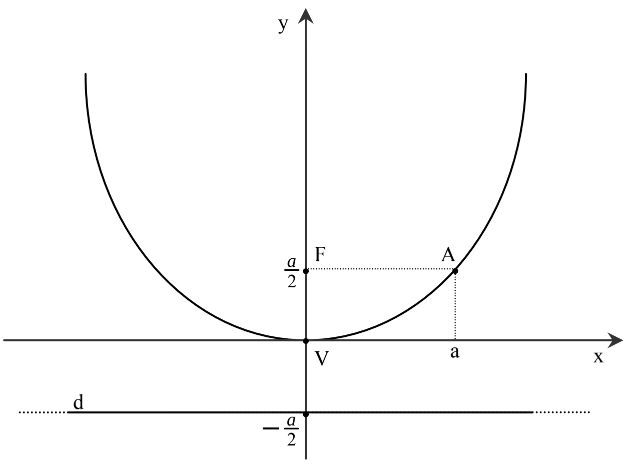
Se facciamo ruotare una parabola intorno al proprio asse otteniamo una superficie di rotazione che chiameremo *paraboloide*.
Se una sorgente puntiforme luminosa è collocata nel fuoco di un paraboloide, i raggi riflessi sono paralleli al proprio asse.



Sorgente luminosa di un fuoco in uno specchio parabolico

Viceversa se i raggi incidenti sullo specchio sono paralleli all'asse i raggi riflessi convergono nel fuoco.

Vogliamo dimostrare che uno specchio parabolico concentra nel proprio fuoco tutti i raggi che giungono su di esso parallelamente all'asse.
Rappresentiamo la sezione parabolica dello specchio in un diagramma cartesiano



Poniamo il vertice V nell'origine degli assi cartesiani e l'asse x parallelo alla direttrice d; supponiamo, inoltre, che la distanza fuoco-direttrice valga a e che il fuoco F abbia ordinata positiva.
Quindi l'equazione della parabola sarà :

$$y = \frac{x^2}{2a}$$

Infatti l'equazione della parabola deve essere del tipo:

$$y = kx^2$$

Inoltre tracciando dal fuoco la parallela all'asse x, si intercetta il punto A di coordinate $(a, \frac{a}{2})$, in quanto la distanza di A dal fuoco è uguale alla distanza di A dalla direttrice.

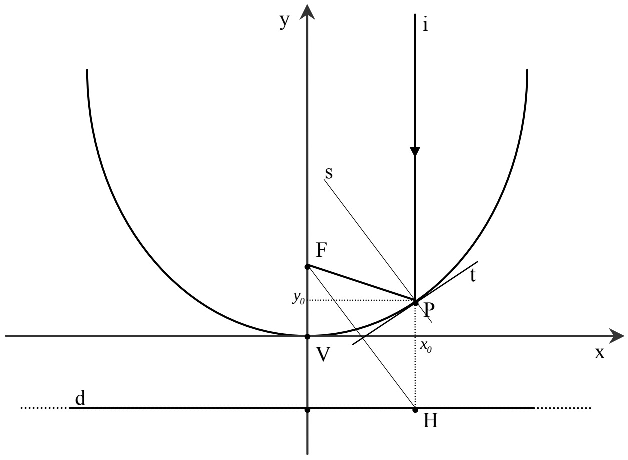
Sostituendo ricaviamo

$$\frac{a}{2} = ka^2$$

da cui

$$k = \frac{1}{2a}$$

Consideriamo un qualunque raggio i parallelo all'asse y, che incida in un punto P dello specchio.
Disegniamo la congiungente del punto P con il fuoco F e tracciamo la bisettrice s dell'angolo formato tra il raggio incidente e PF



Prolunghiamo il raggio incidente fino a intersecare in *H* la direttrice della parabola e tracciamo la congiungente $\overline{FH}$.

Il triangolo $F\hat{P}H$ è isoscele, perché il punto *P*, appartenente alla parabola, è equidistante dal fuoco e dalla direttrice.

Perciò sono uguali anche tra loro gli angoli in *F* e in *H* che risultano anche uguali a ciascuno dei due angoli formati da i con s e da $\overline{PF}$ con s (la loro somma è uguale all'angolo esterno al triangolo,formato appunto dai raggi i e $\overline{PF}$)

Poiché gli angoli alterni interni formati con la trasversale $\overline{PF}$ sono uguali, la retta *s* è parallela ad $\overline{FH}$.

Se il raggio riflesso è effettivamente $\overline{PF}$, la retta *t* passante per *P* e perpendicolare ad *s* (cioè $\overline{FH}$) deve essere tangente alla parabola: solo in questo caso i due angoli formati dai raggi con *s* sono gli angoli (uguali) di incidenza e riflessione nel punto *P* .

Non ci resta che dimostrare questo.

Si ricava facilmente dalla figura che la retta contenente $\overline{FH}$ ha coefficiente angolare:

$$m = -\frac{a}{x_0}$$

se si indica con x_0 l'ascissa di *P*.

Dunque la retta *t*, ad essa perpendicolare, ha coefficiente angolare:

$$m' = \frac{x_0}{a}$$

Dimostriamo ora che il coefficiente angolare della tangente in *P* e m' .

Una retta generica passante per *P* ha equazione:

$$y - \frac{x_0^{\ 2}}{2a} = m''(x - x_0)$$

Imponendo la condizione di tangenza , cioè mettendo a sistema la parabola con la retta e imponendo il Δ = 0, si ottiene

$$2x_0 - 2am'' = 0$$

da cui

$$m'' = \frac{x_0}{a}$$

che quindi coincide con m'.

Abbiamo così dimostrato che, come il generico raggio i, così *tutti i raggi che giungono sullo specchio parabolico parallelamente all'asse sono riflessi nel fuoco*.

Questa proprietà è applicata nella fabbricazione dei fari e dei proiettori per ottenere un intenso fascio di luce anche a grande distanza dalla sorgente.

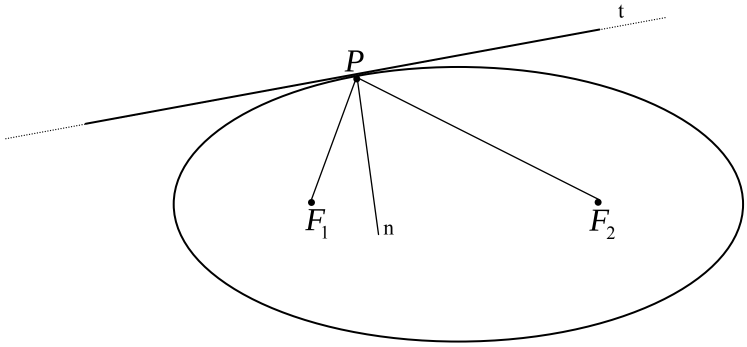
Ricordiamo che per costruire gli specchi ellittici, iperbolici e parabolici facciamo ruotare ciascuna curva attorno al proprio asse focale. Immaginiamo di aver costruito degli specchi aventi le forme di ellissoide, iperboloide e paraboloide; applicando ad essi le leggi della riflessione possiamo verificare le affermazioni enunciate.

Passiamo a considerare le proprietà ottiche delle altre coniche.

ELLISSE

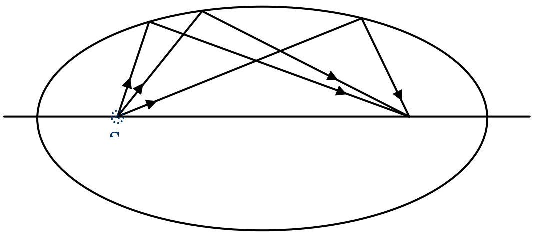
I raggi focali $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ formano con la retta *t* tangente all'ellisse in *P* angoli congruenti. Anche gli angoli che essi formano con la retta *n* perpendicolare alla tangente sono congruenti, perché complementari di angoli congruenti.

In questo caso la retta tangente è esterna all'angolo $F_1\hat{P}F_2$.



Specchio Ellittico

Se una sorgente luminosa puntiforme è collocata in un fuoco, i suoi raggi vengono riflessi sull'altro fuoco.

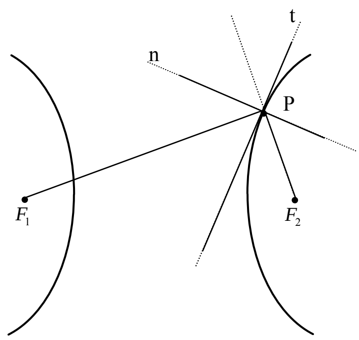


IPERBOLE

I raggi focali $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ formano, con la retta *t* tangente all'iperbole in *P* angoli congruenti.

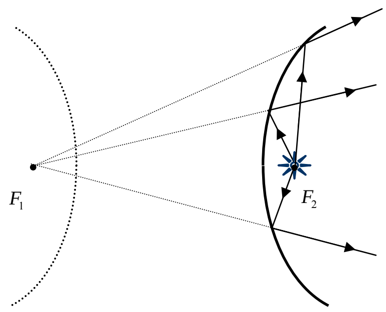
Anche gli angoli che il raggio focale $\overline{F_1P}$ e il prolungamento del raggio $\overline{F_2P}$ formano con la retta *n* perpendicolare alla tangente sono congruenti perché complementari di angoli congruenti.

In questo caso la retta tangente è la bisettrice dell'angolo $F_1\hat{P}F_2$.



Specchio iperbolico

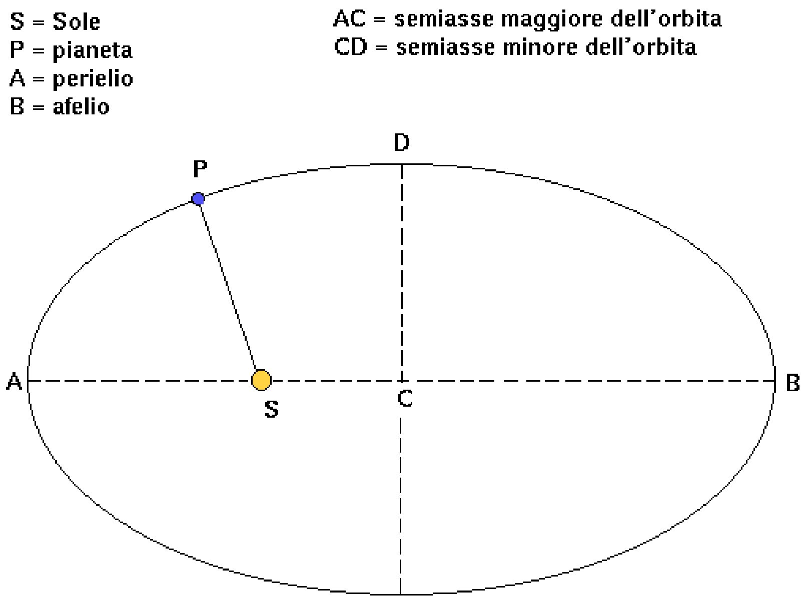
Se una sorgente luminosa puntiforme è collocata in un fuoco,i raggi riflessi si propagano come se fossero emessi da una sorgente collocata nell'altro fuoco



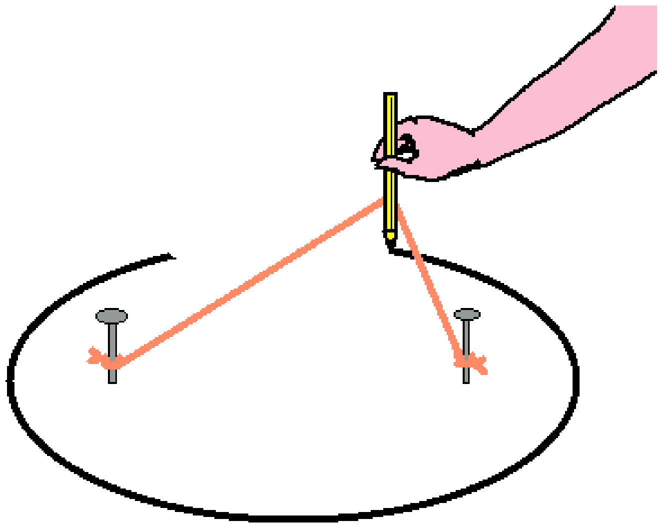
COME DISEGNARE UN'ELLISSE

(Tavola lezione VII)

Oggi sappiamo che quanto scritto da Apollonio sulle proprietà delle coniche non è rimasta solamente una bella teoria, ma che al contrario ha trovato vasti campi di applicazione nell'ambito scientifico. Basti pensare allo studio delle traiettorie dei pianeti che non sarebbe possibile sviluppare senza far riferimento alle tangenti a un ellisse.



Occorrente: tavoletta di compensato, spago; matita e chiodi.



Attività di costruzione di un’orbita planetaria: pianta i due chiodi in una tavola di legno; prendi un pezzo di spago più lungo della distanza tra i chiodi e legalo a loro. Poi prendi una matita e usala per tendere lo spago. Ora muovi la matita tenendo sempre ben teso lo spago. Quando la matita sarà di nuovo nel punto di partenza avrai completato un’ellisse.

Interpreta l’immagine prodotta confrontandola con la seguente immagine rappresentante la prima legge di Keplero.

CONICA E CARTA

(Tavola lezione IV)

Occorrente: Cartoncino spesso, compasso, taglierino o forbici, matita.

Attività di costruzione di un'ellisse: sul cartoncino disegna con il compasso un cerchio C_1 di raggio R_1 e con il taglierino ritaglialo; all'interno della sagoma di C_1 sempre con il compasso disegna un secondo cerchio C_2 avente il raggio R_2 tale che $R_2 = \frac{1}{2} R_1$ e ritaglialo. Inserisci la matita nel centro di C_2, e ponendo il cerchio all'interno della sagoma di C_1, formatasi sul foglio del cartoncino con il primo ritaglio, ruota in senso antiorario la matita scorrendo C_2 sul bordo del cerchio C_1. Una volta che la matita sia tornata nella posizione iniziale, si otterrà un'ellisse come illustrato nelle figure seguenti.