UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA
FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Tesina per il Corso di perfezionamento in :
"Nuove tendenze nella didattica
della matematica e della fisica"

"Presentazione di un laboratorio di Catottrica da inserire nel Progetto Lauree Scientifiche"

Corsista: Laura Fratto

Tutor: Prof. Lucio Russo

ANNO ACCADEMICO 2006-2007

INDICE

1 Scheda informativa del laboratorio di “Catottrica”

1.1 Presentazione

L’insegnamento della Matematica e della Fisica nelle scuole secondarie di secondo grado presenta vari ordini di difficoltà: entrambe le materie vengono spesso male accolte dagli studenti, che raramente hanno la possibilità di coglierne i legami e di intravederne il lato sperimentale e di ricerca.
Il laboratorio che si vuole presentare e sviluppare in parte in questa tesina tratterà il tema della Catottrica, ovvero della scienza degli specchi, per poi sfociare nell’ottica geometrica. Il tema verrà trattato da un punto di vista storico, cercando di recuperare antiche dimostrazioni che nella didattica attuale sono andate perdute, e applicativo. Ad esempio la dimostrazione delle leggi di riflessione e rifrazione viene spesso omessa nei libri di testo, considerando le leggi semplicemente come risultati sperimentali. Questo laboratorio ha il duplice scopo di recuperare queste dimostrazioni e di farlo utilizzando strumenti matematici noti agli studenti attribuendo a questi strumenti un’applicazione pratica.
Verrà inoltre dato molto risalto al metodo assiomatico-deduttivo, base del pensiero scientifico.
Il laboratorio in questione sarà composto da lezioni cartacee che dovranno essere svolte in modo interattivo con gli studenti, Letture storiche, Tavole (fogli formato A4 che contengono degli esercizi da risolvere durante la lezione), animazioni realizzate con il software Cabri utilizzate per le spiegazioni ed esercizi da svolgere tramite il Cabri.
Il laboratorio è indirizzato a studenti che abbiano conoscenze di geometria euclidea e trigonometria (IV liceo scientifico o V liceo classico). Non è invece necessario che gli studenti abbiano già nozioni di ottica poiché tutte le nozioni necessarie verranno reintrodotte e approfondite. Nel caso di studenti del V liceo scientifico con nozioni di analisi si potranno utilizzare dimostrazioni che coinvolgano concetti di analisi, come il concetto di minimo.

1.2 Obiettivi prefissati

- **Applicazione alla realtà**
  In generale uno dei maggiori ostacoli che gli studenti hanno nei confronti della matematica e della geometria è la loro apparente inutilità. Gli studenti utilizzano le formule di geometria per risolvere problemi geometrici del libro per la maggior parte astratti. In questo laboratorio si cercherà di utilizzare la geometria e la matematica per risolvere problemi pratici trovando applicazioni reali alla matematica e alla fisica che si studia a scuola.

- **Recupero della geometria sintetica**
  La geometria euclidea sintetica sta scomparendo nelle scuole. Essa si può recuperare utilizzandola in altre materie come la fisica. In questo laboratorio ad esempio è stata utilizzata per la dimostrazione della legge della riflessione.

- **Flessibilità nell’utilizzo di strumenti scientifici**
  Gli studenti verranno indotti ad applicare conoscenze matematiche di base (geometria elementare, geometria analitica, analisi) in contesti concreti e inusuali per abituare alla flessibilità nell’uso di tali strumenti. Ad esempio il laboratorio lega la geometria analitica alla realtà con la costruzione della parabola tramite gli specchi ustori e, qualora gli studenti

avessero già alcune conoscenze di analisi, questo laboratorio permette di studiare il concetto di minimo tramite il principio di Fermat e le applicazioni ad esso collegate.

- **Recupero aspetto storico**
  Il recupero dell'aspetto storico dell'ottica e della catottrica permette di risalire alle antiche dimostrazioni dei teoremi, che spesso nella scuola vengono omesse presentando i teoremi come semplici risultati sperimentali (ad esempio nel caso delle leggi della riflessione e della rifrazione). Inoltre in questo laboratorio si analizzano le più antiche applicazioni delle conoscenze di Ottica e Catottrica (specchi ustori, faro di Alessandria), facendo ricordare agli studenti che nel passato era proprio la necessità di applicazioni a portare allo studio della matematica (concetto forse dimenticato perché spesso, come già detto, la matematica viene vista fine a sé stessa). L'aspetto storico viene recuperato sia riproponendo dimostrazioni che con la lettura di testi "originali" (antiche traduzioni di testi originali).

- **Illustrazione del metodo assiomatico-deduttivo**
  Con Euclide l'ottica viene per la prima volta strutturata in assiomi e teoremi: nella sua opera, Ottica e Catottrica (in realtà l'attribuzione di quest'ultima opera a Euclide è molto incerta), sono contenuti elementi di prospettiva, lo studio della riflessione negli specchi piani e sferici e, per la prima volta, viene definito il concetto di raggio visuale come privo di struttura fisica. Ciò permette a Euclide di estendere il metodo tipico delle dimostrazioni geometriche al campo dei fenomeni luminosi. All'Ottica e alla Catottrica viene premesso un certo numero di postulati dai quali vengono derivati i teoremi. Tali assiomi in realtà non hanno quel carattere di rigore logico proprio degli assiomi degli Elementi ma piuttosto sono il risultato di un compromesso tra dati assunti sperimentalmente e dati nei quali elementi spaziali e geometrici si intrecciano a considerazioni di carattere soggettivo. Partendo da ciò si potrebbero illustrare agli studenti anche i primi postulati e teoremi degli Elementi di Euclide ed instaurare una discussione.

- **Non unicità dei ragionamenti matematici**
  In vari casi (ad esempio per la dimostrazione delle leggi della riflessione e della rifrazione) vengono proposte agli studenti più dimostrazioni dello stessa legge. Questo può aiutare gli studenti a capire che spesso la soluzione di un problema non è unica e può permettere di instaurare una discussione su quale sia, al limite, la soluzione ottimale.

1.3 Programma del laboratorio

Per lo sviluppo delle lezioni è stata scelta una divisione per argomenti. Ogni argomento viene analizzato dal punto di vista storico considerando la trattazione che di esso hanno fatto vari scienziati e dal punto di vista pratico, proponendo Tavole di esercizi o l'utilizzo del Cabri.

1° LEZIONE

- Introduzione
- Descrizione del metodo assiomatico-deduttivo (presentazione dei postulati della geometria di Euclide che servono come prerequisito per il successivo studio dei postulati e delle proposizioni dell'Ottica e della Catottrica), differenza tra definizioni, nozioni comuni e postulati
- Definizione Ottica/Catottrica
- Teorie della visione (emissionista, immissionista)
- Primi postulati dell'Ottica

- Primi postulati di Euclide della Catottrica (in questi ultimi due punti sottolineare la differenza tra il rigore dei postulati degli Elementi e i postulati dell'Ottica/Catottrica)

2° LEZIONE

Riflessione:
- Postulati (dal 3 al 6) e Teoremi (1,2,3,16,17,18) della Catottrica di Euclide
- Trattazione di Erone
- Cenni su Tolomeo
- Diffusione

3° LEZIONE

- Ottica geometrica: specchi
- Teoremi della Catottrica di Euclide sugli specchi

4° LEZIONE

Applicazioni storiche della riflessione:
- Specchi ustori (ultima proposizione di Euclide, Diocle)
- Faro di Alessandria
- Parabola (costruzione Cabri)
- Macchine catottriche di Erone

5° LEZIONE

Rifrazione:
- Trattazione di Euclide (qualitativa, postulato 7 della Catottrica)
- Trattazione sperimentale di Tolomeo (relazione parabolica tra gli angoli)
- Trattazione di Fermat (doppia dimostrazione della legge di Snell con derivata o meno)

Applicazioni rifrazione:
- Miraggi (asfalto, miraggio della fata Morgana)
- Angolo limite e riflessione totale (il mondo visto dai pesci, fibre ottiche, riflesso mare mosso)

6° LEZIONE

Principio del minimo cammino ottico:
- Riflessione e rifrazione (ripresa)
- Applicazioni: moltiplicazione pesci in acquario, moneta galleggiante
- Reversibilità cammino ottico
- Altri problemi di massimo e minimo (applicazioni)

7° LEZIONE

Ottica geometrica: lenti

8° LEZIONE

Macchine ottiche: macchina fotografica, microscopi, cannocchiali telescopi (storia e funzionamento)

2 Elementi approfonditi e sviluppati

2.1 II lezione: la riflessione

2.1.1 Euclide

POSTULATO 3 DELLA CATOTTRICA DI EUCLIDE

"Se lo specchio sta su un piano e su questo sta un'altezza qualsiasi elevata ad angoli retti, il segmento interposto tra lo spettatore e lo specchio ha lo stesso rapporto con il segmento interposto tra lo specchio e l'altezza considerata, che l'altezza dello spettatore con l'altezza presa in considerazione."

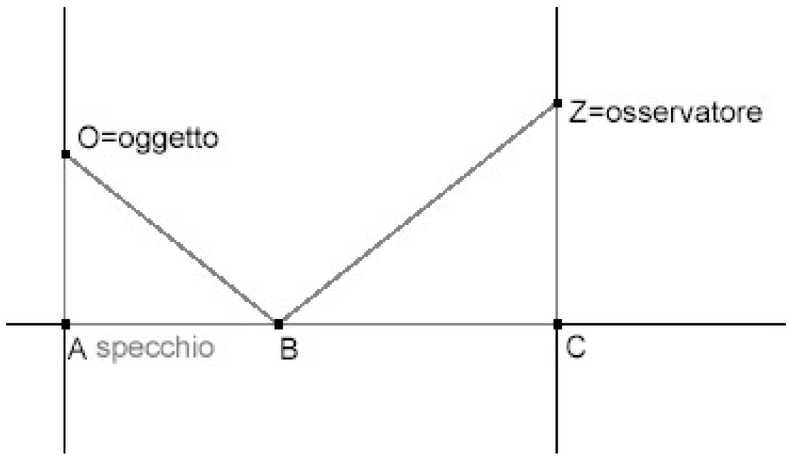


Figura 1

Il postulato 3, attraverso la similitudine tra triangoli, esprime la legge della riflessione che è enunciata esplicitamente nel Teorema I.

TEOREMA I

"Negli specchi piani, negli specchi convessi, negli specchi concavi, i raggi si riflettono con angoli eguali"

Dimostrazione:
Il postulato 1 afferma la proporzionalità tra le distanze dell'oggetto e dell'osservatore dallo specchio e le distanze del punto d'incidenza della luce dalle perpendicolari allo specchio passanti per l'oggetto e per l'osservatore. Ovvero dalla Figura 1:
AB:BC=OA:ZC
Poiché i triangoli OAB e ZBC sono rettangoli e i lati che comprendono gli angoli uguali sono proporzionali, i triangoli sono simili. Questo vuol dire che a lati proporzionali corrispondono angoli uguali.

Nel Postulato 1 e conseguentemente nel Teorema I non viene enunciato esplicitamente il fatto che il raggio incidente e il raggio riflesso sono complanari.

I Postulati 4,5,6 della Catottrica di Euclide trattano il caso particolare in cui l'osservatore è posizionato sulla normale dello specchio

POSTULATO 4 DELLA CATOTTRICA DI EUCLIDE

"Negli specchi piani l'occhio posto sulla perpendicolare condotta dall'oggetto allo specchio, non vede l'oggetto"

POSTULATO 5 DELLA CATOTTRICA DI EUCLIDE

"Negli specchi convessi, l'occhio posto sulla retta condotta dall'oggetto al centro della sfera, di cui lo specchio è una porzione, non vede l'oggetto"

POSTULATO 6 DELLA CATOTTRICA DI EUCLIDE

"Lo stesso accade per gli specchi concavi"

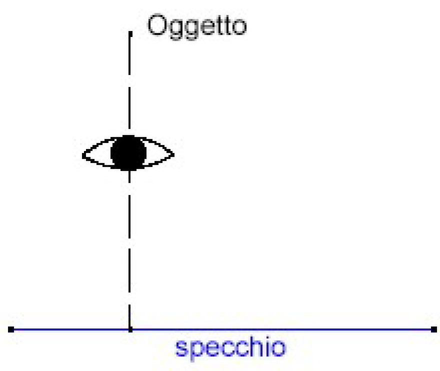


Figura 2

Da questi postulati si possono dedurre i teoremi

TEOREMA XVI

"Negli specchi piani l'oggetto vedesi sulla perpendicolare condotta dall'oggetto allo specchio."

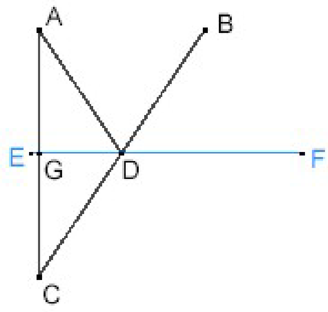


Figura 3

Dimostrazione

Sia EF uno specchio piano, B l'osservatore e A l'oggetto da osservare. Da A si tracci la perpendicolare allo specchio che interseca quest'ultimo nel punto G. Poiché per il postulato 4 il punto A non si può vedere dall'osservatore nel punto G allora dovrà vedersi sul prolungamento di AG. Analogamente l'osservatore dovrà vedere l'oggetto lungo un prolungamento di BD. Per cui l'osservatore vedrà l'oggetto nell'intersezione dei prolungamenti di AG e BD

TEOREMA XVII

"Negli specchi convessi l'oggetto si vede sulla retta condotta dall'oggetto al centro della sfera di cui lo specchio è una porzione"

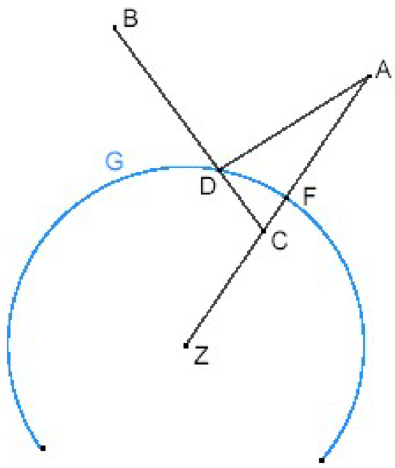


Figura 4

Dimostrazione:

Sia G uno specchio convesso, B l'osservatore, A l'oggetto da osservare, BD il raggio visuale e Z il centro dello specchio. Da A si tracci la congiungente AZ e il raggio BD si prolunghi fino al punto C (intersezione del prolungamento del raggio visuale con il segmento AZ). Per il postulato 5 l'osservatore non può vedere l'oggetto nel punto F e quindi l'oggetto A dovrà essere visto in un punto del prolungamento di AF, ovvero nel punto C in cui il prolungamento di BD interseca il prolungamento di AF.

PROPOSIZIONE XVIII

“Negli specchi concavi l’oggetto è visto sulla retta condotta dall’oggetto al centro della sfera di cui lo specchio è una porzione”

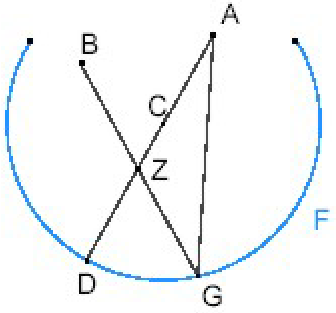


Figura 5

Dimostrazione:
Sia F uno specchio concavo, B l’osservatore, A l’oggetto da osservare, C il centro dello specchio concavo e BG il raggio visuale. Si tracci la congiungente AC e la si prolunghi fino al punto D appartenente allo specchio. Poiché per il postulato 6 l’osservatore non può vedere l’oggetto nel punto D, allora l’immagine dell’oggetto si dovrà vedere in qualche punto del segmento AD ed esattamente nel punto Z, punto di intersezione tra il raggio visuale e il segmento AD.

I Postulati 4, 5 e 6, messi in relazione con i Teoremi XVI, XVII e XVIII, si possono intendere come espressione dell’appartenenza dell’immagine di un oggetto alla normale condotta dall’oggetto stesso allo specchio. Ricordando che Euclide nel Postulato 2 aveva posizionato l’immagine lungo la retta visuale, la posizione del riflesso sarebbe rimasta indeterminata se questi ultimi postulati non avessero definito la sua appartenenza ad un’altra retta che identifica inequivocabilmente l’immagine come intersezione tra retta visuale e retta normale allo specchio condotta dall’oggetto.

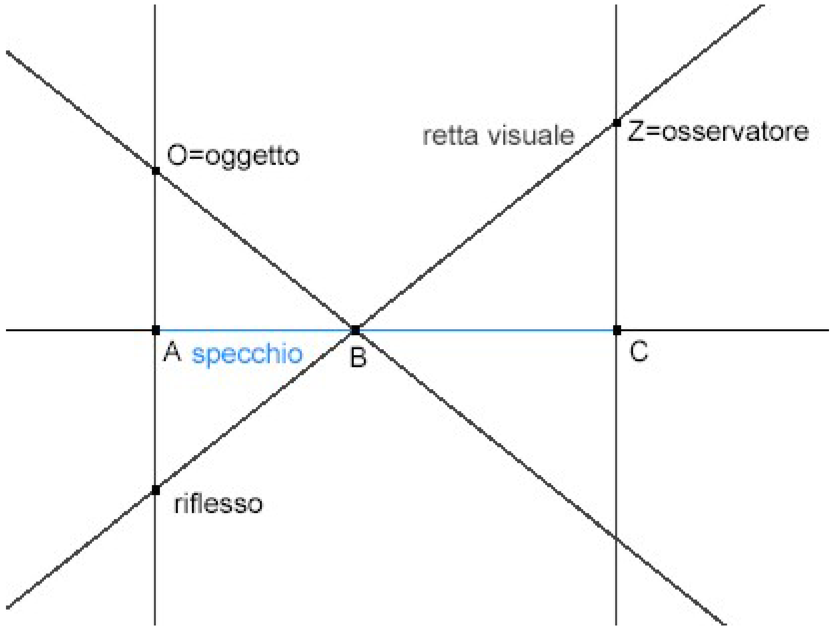


Figura 6

Per quanto riguarda gli specchi sferici, la localizzazione dell'immagine nel punto di intersezione tra la linea congiungente il punto oggetto con il centro di curvatura dello specchio e il prolungamento della linea che va dall'occhio alla superficie riflettente è valida solo nel caso in cui l'angolo acuto formato dalle due linee è abbastanza piccolo.

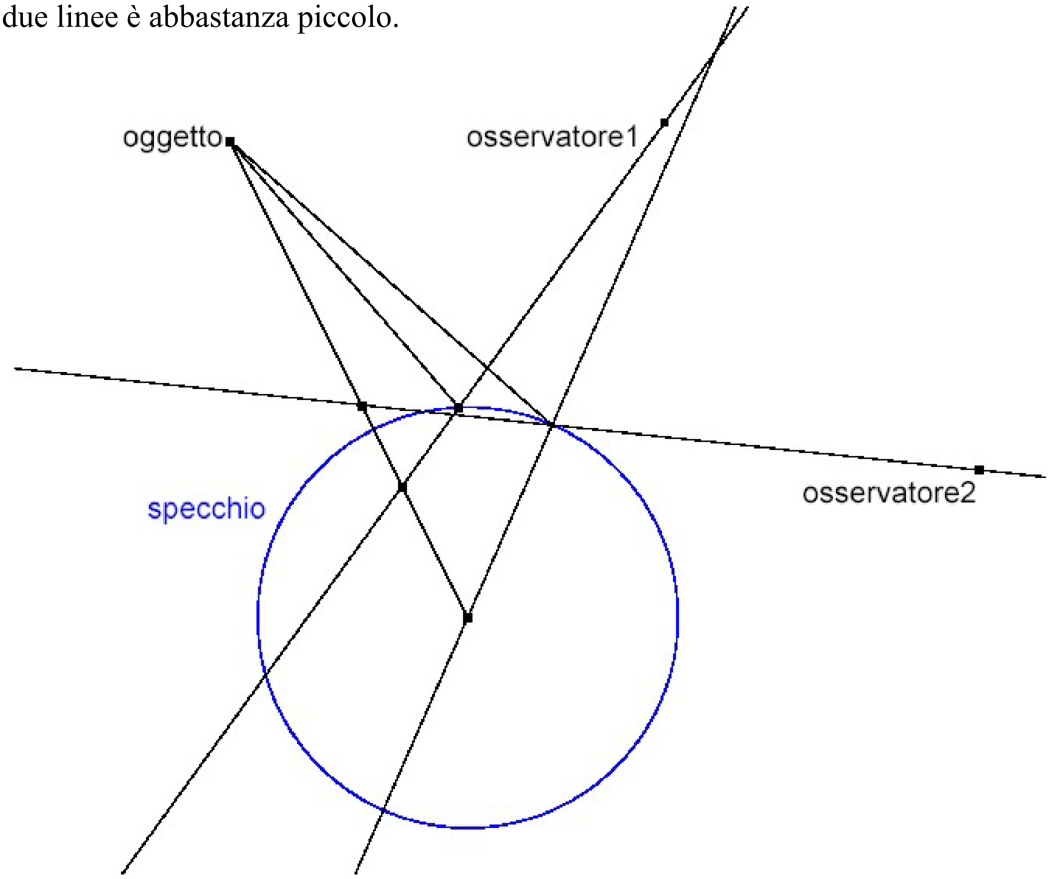


Figura 7

2.1.2 Erone di Alessandria

Nell'opera di Erone di Alessandria (I sec. d.C.) si ha la prima fonte documentata dell'utilizzo in maniera scientificamente valida del principio variazionale della minima distanza che sarà poi ripreso da Fermat nel XVII secolo.
Erone, ipotizzando che la luce scegliesse il percorso più breve come distanza, riuscì a dimostrare la legge della riflessione ma non quella della rifrazione di cui si parlerà in seguito.
Nella Proposizione IV della sua Catottrica dimostrò che fra tutti i cammini possibili per andare dall'oggetto all'osservatore passando per lo specchio il cammino più breve era quello per cui gli angoli di incidenza e di riflessione erano uguali.
Nella VI proposizione Erone osserva come l'immagine riflessa sparisca se si copre il punto di incidenza del raggio luminoso sullo specchio. Questa proposizione equivale all'enunciato del quarto postulato di Euclide, in cui si individuava il raggio lungo il quale si percepisce l'immagine, ma vi sono elementi che richiamano inequivocabilmente alla realizzazione di un esperimento. Erone, infatti, pensa di posizionare della cera sopra lo specchio, nel punto di incidenza del raggio visuale, allo scopo di verificare la sparizione dell'immagine.

Lettura: Erone, Catottrica, II, pp.263-264

L'affermazione che la nostra vista procede in linea retta provenendo dall'occhio può essere fondata come segue. Ciò che si muove con velocità costante si muove in linea retta. Le frecce tirate da un arco possono servire da esempio. Ciò avviene poiché la forza impressa costringe l'oggetto a muoversi per la distanza più breve possibile dal momento che non ha il tempo per un moto più lento, cioè per un moto su un percorso maggiore. La forza impressa non permette un tale ritardo e così, a causa della sua velocità, l'oggetto tende a muoversi sulla traiettoria più breve. Ma la più breve delle linee avente gli stessi punti estremi è la linea retta.

Che i raggi provenienti dai nostri occhi si muovono con velocità infinita può essere compreso dalla considerazione seguente: quando, dopo aver chiuso gli occhi li apriamo e guardiamo il cielo, il raggio visuale non ha bisogno di tempo per raggiungere il cielo. Infatti vediamo le stelle nello stesso istante in cui le guardiamo sebbene la distanza sia, per così dire, infinita. E anche se questa distanza fosse maggiore il risultato sarebbe lo stesso, pertanto è chiaro che i raggi sono emessi con velocità infinita. Per conseguenza essi non subiscono interruzione, incurvamento o deviazione ma si muoveranno lungo il percorso più breve, la linea retta.

Abbiamo mostrato a sufficienza che la nostra vista procede in linea retta. Ora mostreremo che i raggi incidenti sugli specchi e anche sull'acqua e sulle superfici piane sono riflessi [....

In base a considerazioni sulla velocità di incidenza e di riflessione, dimostreremo che questi raggi sono riflessi ad angoli uguali nel caso degli specchi piani e sferici.

Per la nostra dimostrazione faremo ancora uso di linee di minimo. Dico allora che di tutti i raggi incidenti, riflessi in un punto dato da uno specchio piano o sferico, i più brevi sono quelli che sono riflessi ad angoli uguali e, se accade ciò, la riflessione ad angoli uguali è conforme a ragione.

AB sia uno specchio piano, G l'occhio, D l'oggetto da osservare (cfr. fig. 1) e AG sia un raggio incidente sullo specchio. Tracciamo AD e poniamo EAG = BAD. GB sia un altro raggio incidente sullo specchio. Tracciamo BD. Affermo che: GA + AD < GB + BD.

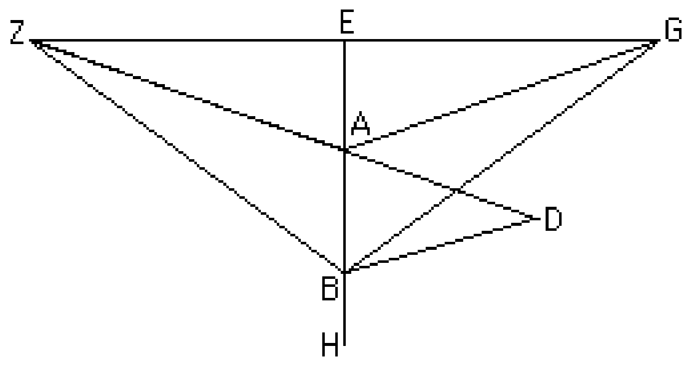


Fig. 1

Abbassiamo da G la perpendicolare ad AB, GE; prolunghiamo poi GE e AD fino a che essi si incontrano in Z. Tracciamo ZB. Ora BAD = EAG, inoltre BAD = ZAE perché angoli al vertice, perciò ZAE = EAG.

Dato che gli angoli in E sono retti ZA = AG e ZB = BG. Ma ZD < ZB + BD e ZA = AG, ZB = BG perciò GA + AD < GB + BD. Ora EAG = BAD e EBG < EAG, HBD > BAD. Perciò a fortiori sarà HBD > EBG.

2.1.3 Dimostrazione della legge della riflessione

Per motivi di simmetria un raggio di luce che si propaga nell'aria e viene riflesso da un specchio piano si muove su di un piano. Viene definito angolo d'incidenza l'angolo formato dal raggio incidente con la normale allo specchio e angolo di riflessione l'angolo formato dal raggio riflesso con la normale allo specchio. Nella figura sono mostrati i punti A e B e uno specchio piano XY.

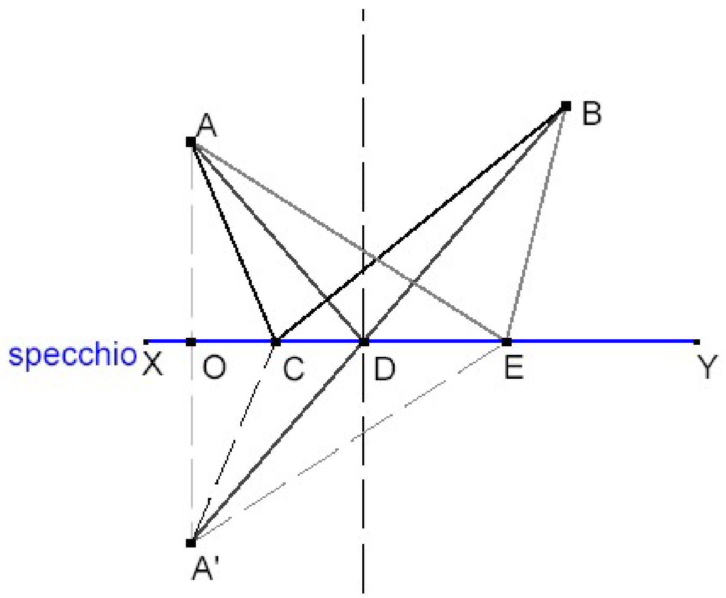


Figura 8

Si vuole determinare il percorso lungo il quale la luce impiega il minor tempo possibile per andare da A a B riflettendosi sullo specchio. Dal momento che tutta la traiettoria è nello stesso mezzo ottico il tempo minore coincide con la distanza più breve poiché la velocità della luce rimane costante nello stesso mezzo.
Si potrebbe pensare di scegliere il cammino ACB. In tal caso il segmento AC sarebbe effettivamente molto breve, ma il segmento EB risulterebbe molto lungo. Spostando leggermente a destra il punto d'impatto con lo specchio il secondo segmento diminuisce, mentre il primo aumenta. Per trovare il percorso più breve bisogna ricorrere a una costruzione geometrica. Si costruisce dall'altra parte dello specchio un punto artificiale A' simmetrico di A rispetto allo specchio, distante quindi dallo specchio quanto A. I triangoli ACO e A'CO sono uguali poiché sono retti e hanno un cateto in comune e l'altro cateto uguale per costruzione. Da ciò segue che A'C è uguale a AC. Il problema si riduce quindi a trovare il percorso più breve per andare da B fino ad A'. Ma in questo caso la risposta è ovvia, poiché il percorso più breve per unire due punti è una linea retta. Se indichiamo con D il punto in cui tale linea retta incontra lo specchio, dall'uguaglianza dei triangoli ADO e A'DO si deduce che l'angolo ADO è uguale all'angolo A'DO e quindi all'angolo BDE che è opposto ad A'DO. Quindi l'angolo d'incidenza è uguale all'angolo di riflessione in quanto complementari di angoli uguali.

2.1.4 Claudio Tolomeo

Un altro importante studioso alessandrino che si occupò di Catottrica fu l'astronomo Claudio Tolomeo (II sec. d.C.). Due dei cinque libri dell'Ottica che egli scrive sono dedicati alla Catottrica. In questi libri Tolomeo definisce le leggi della riflessione attraverso l'appartenenza del punto-immagine al raggio visuale e alla normale del punto-oggetto sullo specchio, oltre all'uguaglianza tra gli angoli di incidenza e di riflessione (leggi già note ad Euclide). Un aspetto innovativo di Tolomeo è però quello della dimostrazione delle leggi attraverso modalità sperimentali, come la prova della formazione dell'immagine lungo il raggio visuale in maniera analoga a quella scritta da Erone. In seguito Tolomeo descrive altri esperimenti per provare le restanti leggi della riflessione, anche grazie all'utilizzo di uno strumento per la misura degli angoli riflessi e incidenti. Lo strumento era un cerchio graduato munito al centro di due indici che Tolomeo utilizzò anche per un'analisi sperimentale del fenomeno della rifrazione.

2.1.5 Diffusione

Perché una superficie ruvida non riflette?
L'angolo di riflessione della luce nel caso di una superficie ruvida varia da un punto della superficie di incidenza all'altro a seconda dell'orientazione locale della superficie: in questi casi si parla di "diffusione". La diffusione è più concentrata intorno alla direzione di riflessione speculare, ma con una grande dispersione.

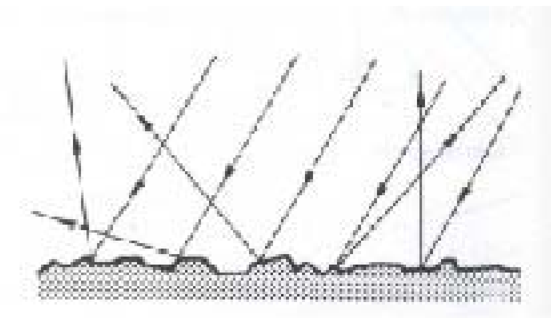


Figura 9

2.1.6 Esercizi

Gli esercizi proposti hanno lo scopo di approfondire e consolidare la legge della riflessione e di far capire il concetto di immagine riflessa e virtuale in preparazione alla Lezione 3 che tratterà di specchi tramite l'ottica geometrica .

Tavola 2.1

1.Francesca si sta guardando allo specchio. Lo specchio si trova davanti a lei alla distanza di 1m.
- Quale distanza la separa dalla sua immagine?
- Se lo specchio viene spostato verso Francesca di 50 cm, di quanto si sposta l'immagine?

2. Una candela viene posizionata davanti a un piccolo specchio appoggiato su un tavolo a 8 cm di distanza . L'altezza della candela è maggiore dell'altezza dello specchio. Dove dovrò mettere una seconda candela identica alla precedente in modo che la sua parte superiore appaia la continuazione dell'immagine riflessa della prima candela?

Tavola 2.2

Valentina, che ha 5 anni ed è alta 1m, si sta guardando allo specchio. Quale deve essere l'altezza minima dello specchio in modo che Valentina possa vedersi dalla testa ai piedi?

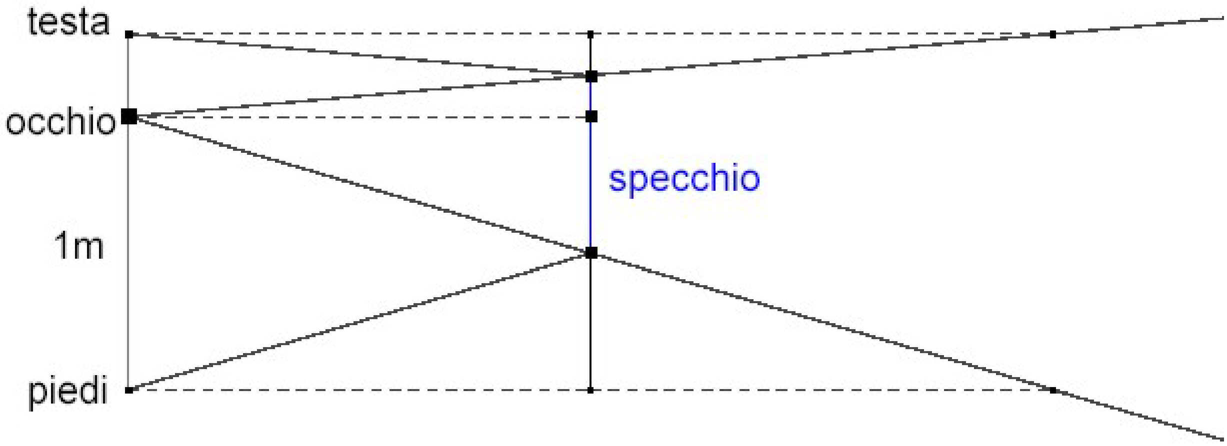
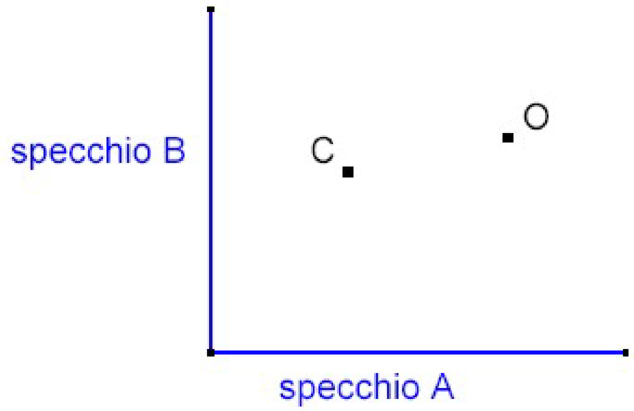
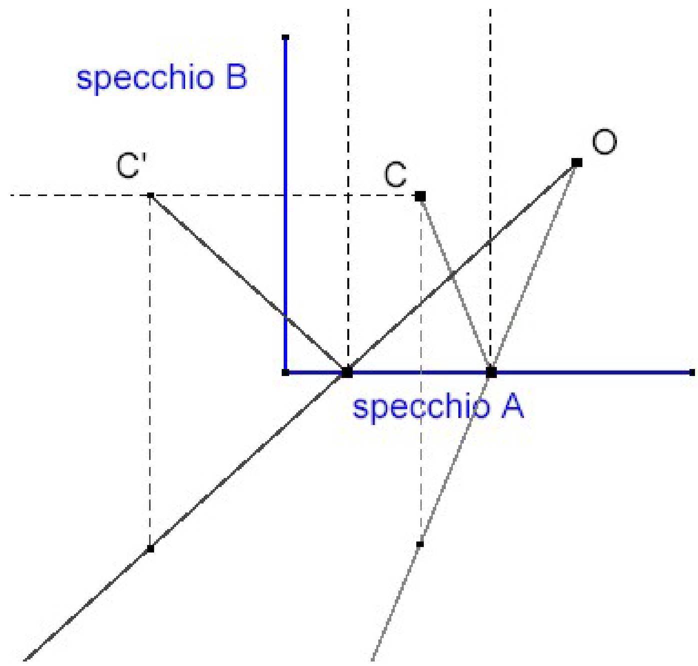


Tavola 2.3

In Figura sono rappresentati due specchi A e B perpendicolari e con un lato in comune. L'osservatore O è rivolto verso lo specchio A. Quante immagini dell'oggetto C l'osservatore vedrà sullo specchio A?



Soluzione



2.2 *Specchi ustori e costruzione della parabola (applicazione pratica con l'utilizzo di Cabri per la lezione 4)*

Di seguito sono riportate le indicazioni per la costruzione della parabola tramite il software Cabri utilizzando vari metodi. Alla fine di ogni costruzione è riportato il file .fig sul quale la costruzione è stata eseguita.

Per presentarlo durante il laboratorio si potrebbe innanzi tutto far costruire a tutti gli studenti un prototipo di specchio ustore tramite piccoli segmenti (che simulano degli specchi piani) orientati in modo che il riflesso di un raggio orizzontale (che simula un raggio solare) passi per un punto, il fuoco della parabola (in modo da simulare la concentrazione dei raggi solari in un punto). Di seguito, per dimostrare effettivamente che i segmenti si sono disposti a formare una parabola, si potrebbe far costruire la parabola con la definizione classica che gli studenti hanno appreso in geometria analitica e sovrapporre le due costruzioni. Questa costruzione fa capire come dalla costruzione di uno specchio ustore si può ricavare una curva parabolica. Per finire è riportata la costruzione della parabola tramite la proprietà focale (proprietà che si può ricavare dalla costruzione precedente).

2.2.1 Costruzione specchio ustore. Posizionamento di specchi piani in modo che il riflesso di raggi paralleli incida su un unico punto

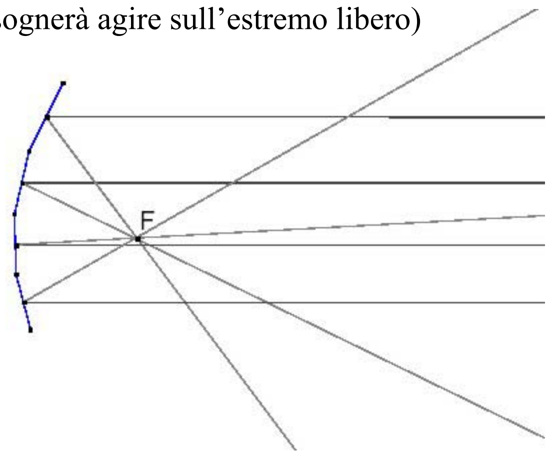
-Tracciare segmento
-disegnare un punto qualsiasi F
-Disegnare punto medio del segmento
-Tracciare retta orizzontale passante per il punto medio
-Tracciare semiretta passante per il punto medio e con stessa direzione retta appena tracciata
-Nascondere la retta perpendicolare
-Applicare la Macro *riflessione* al segmento: selezionare segmento, punto medio e semiretta

Costruzione della Macro riflessione

-tracciare segmento
-definire punto medio
-disegnare perpendicolare passante per il punto medio
-disegnare una semiretta qualunque passante per il punto medio
-applicare la simmetria assiale della semiretta rispetto all'asse
-definire la MACRO:oggetti iniziali (segmento, punto medio, semiretta iniziale), oggetti finali (semiretta simmetrica)

-Muovere un estremo del segmento in modo che il raggio riflesso passi per il punto F (fuoco)
-Continuare con altri segmenti che devono avere un estremo in comune con un segmento già disegnato (per il movimento del segmento bisognerà agire sull'estremo libero)

vedi: specchipiani.fig



Si può vedere che per far passare il raggio riflesso di ogni segmento in un unico punto (fuoco) i segmenti si dispongono in modo da formare una parabola.
Per verificare ciò si passa alla

2.2.2 Costruzione della parabola con Cabri tramite la definizione

Definizione della parabola: *“la parabola è il luogo dei punti equidistanti da un retta detta direttrice e da un punto detto fuoco.”*

-disegnare retta direttrice *d* perpendicolare alle semirette tracciate
-prendere un punto *H* qualsiasi su *d*
- tracciare perpendicolare a *d* passante per *H*
-tracciare segmento *FH*
-tracciare asse segmento *FH*
-definire *P*, punto d’intersezione asse e retta perpendicolare a *d*

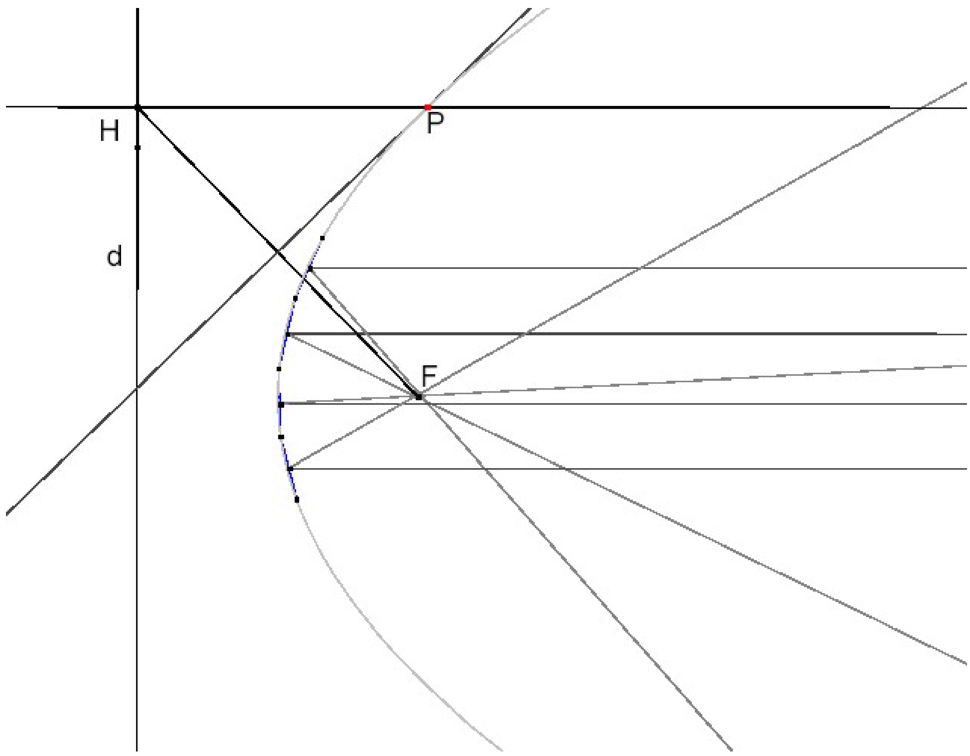
P è equidistante a *H* e a *F* per la definizione di asse del segmento

Al variare di *H*, *P* conserva questa proprietà quindi descrive il luogo dei punti della parabola

Con Cabri è possibile disegnare la parabola visualizzando il luogo generato dal punto *P*:
-selezionare *costruzione luogo di punti*
-selezionare il punto *P* come punto che traccia il luogo
-selezionare *H* come punto da muovere
-al muoversi di *H* verrà tracciata la parabola

-muovere la direttrice della parabola fino a che la parabola si sovrappone agli specchi piani precedentemente disegnati

vedi: parab_specchipiani.fig



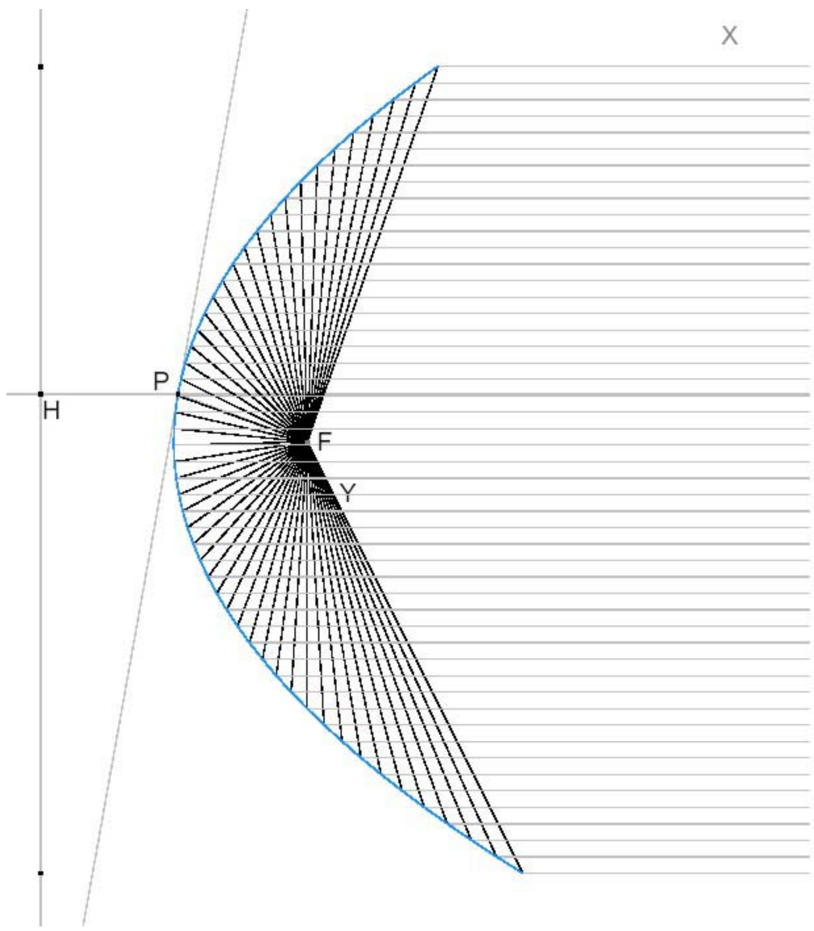
2.2.3 Costruzione della parabola tramite la proprietà focale

Proprietà focale: *"Ogni raggio luminoso passante per F si riflette in un raggio parallelo all'asse della parabola e, viceversa, ogni raggio parallelo all'asse della parabola si riflette nel fuoco"*

-disegnare retta direttrice *d*
-disegnare punto *F* non appartenente alla retta
-prendere un punto *H* qualsiasi su *d* (per limitare lo specchio disegnare un segmento sulla retta e posizionare *H* sul segmento)
- tracciare perpendicolare a *d* passante per *H*
-tracciare segmento *FH*
-tracciare asse segmento *FH*
-definire *P*, punto d'intersezione asse e retta perpendicolare a *d*
-disegnare il luogo *Y* del segmento *FP* al variare di *H*
-disegnare il luogo *X* della semiretta con origine in *P* al variare di *H*
-disegnare il luogo di *P* al variare di *H* (sappiamo che è una parabola)

Si nota che l'intersezione dei due luoghi di punti *X* e *Y* coincide con la parabola

vedi: proprietàfocale.fig



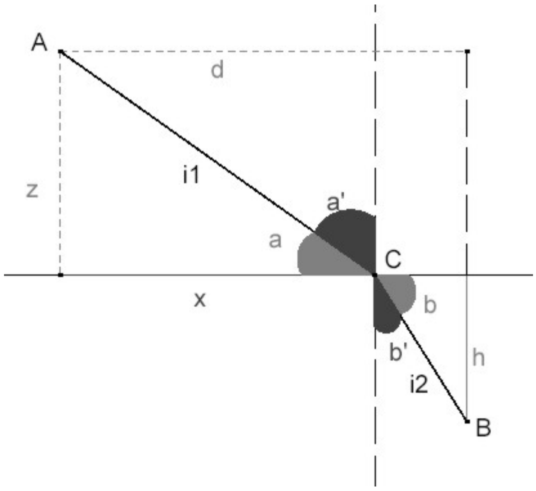
2.3 *Dimostrazione della legge della rifrazione (da inserire nella lezione 5)*

2.3.1 Il principio di Fermat

Formulazione esatta:*"Il percorso seguito da un raggio di luce per andare da un punto ad un altro attraverso un qualsiasi insieme di mezzi è tale da rendere il suo cammino ottico stazionario"*

Formulazione del 1650: *"Di tutti i possibili cammini che la luce può seguire per andare da un punto ad un altro, essa segue il cammino che richiede il tempo più breve"*

- Dimostrazione utilizzando le derivate (per studenti che hanno già acquisito nozioni di analisi)



Si considera il punto A immerso in un mezzo dove la luce ha velocità v1 e il punto B immerso in un mezzo in cui la luce ha velocità v2.

$$i_1 = \sqrt{z^2 + x^2}$$

$$i_2 = \sqrt{h^2 + (d-x)^2}$$

$$t = \frac{i_1}{v_1} + \frac{i_2}{v_2} = \frac{\sqrt{z^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Per trovare il percorso che minimizza il tempo

$$\frac{dt}{dx} = 0 = \frac{2x}{2v_1\sqrt{z^2 + x^2}} + \frac{2(d-x)(-)}{2v_2\sqrt{h^2 + (d-x)^2}}$$

$$xv_2\sqrt{h^2 + (d-x)^2} = v_1(d-x)\sqrt{z^2 + x^2}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{(d-x)v_1}{xi_2} = \frac{\cos b}{\cos a} = \frac{\sin b'}{\sin a'}$$

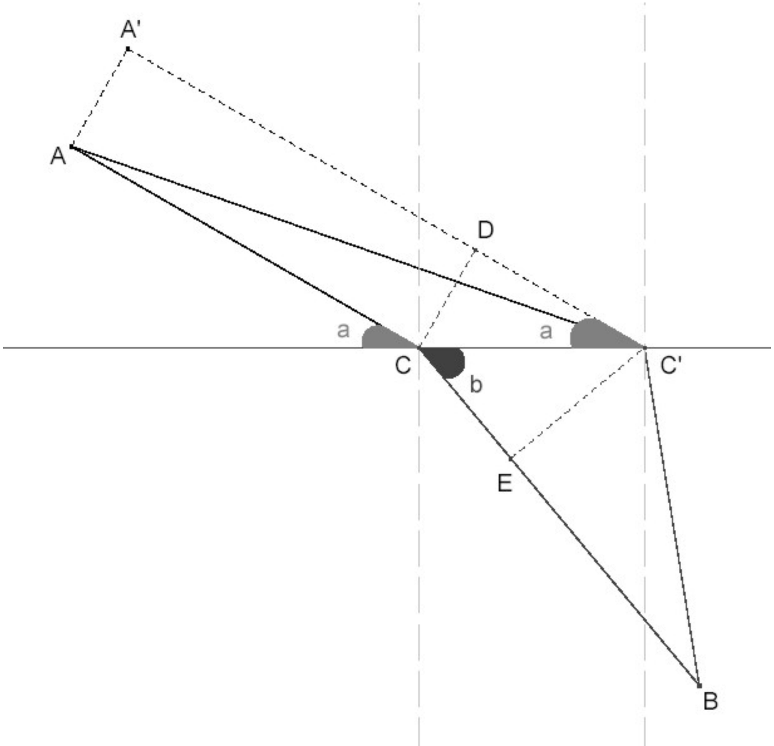
L'ultima formula è la legge della rifrazione. La formula è stata ottenuta considerando che

$$x = i_1 \cos a$$

$$(d - x) = i_2 \cos b$$

e gli angoli di incidenza e di rifrazione sono i complementari di *a* e *b*

- Dimostrazione senza le derivate



Si considera il punto A immerso in un mezzo dove la luce ha velocità v1 e il punto B immerso in un mezzo in cui la luce ha velocità v2.

Si suppone che il cammino AC+CB sia il cammino lungo il quale la luce impieghi meno tempo per andare da A a B. Si disegna un altro possibile cammino per andare da A a B, il cammino AC'+C'B. Si vuole dimostrare che

$$\frac{AC'}{v_1} + \frac{C'B}{v_2} > \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2}$$

Si traccia il segmento parallelo ad AC passante per C' e le perpendicolari ad AC, AA' e CD. Si traccia inoltre il segmento perpendicolare a CB passante per C', C'E. Poiché l'ipotenusa è maggiore di un cateto si può facilmente vedere che:

$$\frac{AC'}{v_1} + \frac{C'B}{v_2} > \frac{A'C'}{v_1} + \frac{BE}{v_2}$$

Poiché

A'C'=AC+DC' e BE= BC – CE

la seguente uguaglianza

$$\frac{AC + DC'}{v_1} + \frac{BC - CE}{v_2} = \frac{AC}{v_1} + \frac{BC}{v_2}$$

sarà vera se

$$\frac{DC'}{v_1} = \frac{CE}{v_2}$$

Considerando che

$$DC' = CC' \cos a$$

$$CE = CC' \cos b$$

la condizione da verificare sarà

$$\frac{CC' \cos a}{v_1} = \frac{CC' \cos b}{v_2}$$

ovvero

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\cos b}{\cos a}$$

che è la legge della rifrazione considerando che gli angoli di incidenza e di rifrazione sono i complementari di a e di b.