

Roma, 10 febbraio 2006

**INTERAZIONI DIDATTICHE
TRA MATEMATICA E FISICA:
ALCUNE ESPERIENZE
NEL CANTON TICINO**

Michele D'Anna

Alta Scuola Pedagogica – CH-6600 Locarno (Svizzera)

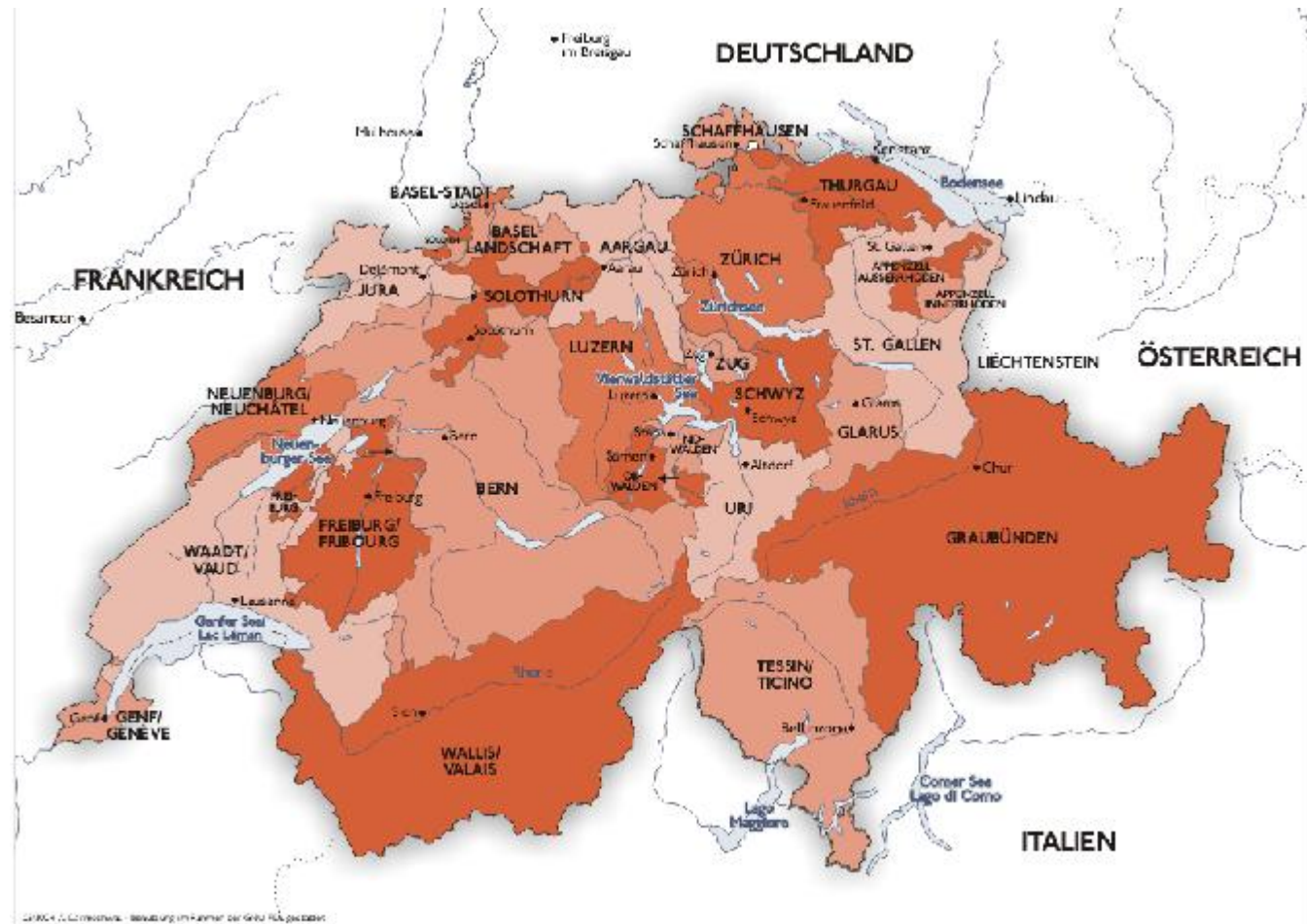
I^a parte – L'interazione matematica-fisica

- 1 - Il quadro di riferimento generale
- 2 - L'opzione specifica FAM
- 3 - La modellizzazione dinamica

II^a parte - Esempi

- 1 - Il raggiungimento dell'equilibrio
- 2 - Dalla termostatica alla dinamica del calore
- 3 - Chi arriverà a terra per primo? Modellizzare per capire l'esperimento
- 4 - Dal moto uniformemente accelerato all'esperimento di Rutherford
- 5 - Il pendolo di Wilberforce

1. Il quadro di riferimento generale



Quadro legislativo di riferimento a livello federale

Ordinanza **413.11**
concernente il riconoscimento degli attestati liceali
di maturità
(Ordinanza sulla maturità, ORM)

del 15 febbraio 1995 (Stato il 1° luglio 1995)



Art. 5 Obiettivi degli studi

¹ Lo scopo delle scuole che preparano alla maturità è quello di offrire ai propri allievi, nella prospettiva di una formazione permanente, la possibilità di acquisire solide conoscenze di base, adatte al livello secondario, e favorire la formazione di uno spirito d'apertura e di un giudizio indipendente. Queste scuole non aspirano a conferire una formazione specialistica o professionale, bensì privilegiano una formazione ampia, equilibrata e coerente che dia la maturità necessaria per intraprendere studi superiori e per svolgere nella società tutte quelle attività complesse che essa richiede. Esse sviluppano contemporaneamente l'intelligenza, la volontà, la sensibilità etica ed estetica come pure le attitudini fisiche dei loro allievi.

² I maturandi devono essere capaci di acquisire un nuovo sapere, di sviluppare la curiosità, l'immaginazione, la facoltà di comunicazione, come pure di lavorare da soli e in gruppo. Essi esercitano il ragionamento logico e l'astrazione, ma anche il pensiero intuitivo, analogico e contestuale. Imparano così a familiarizzarsi con la metodologia scientifica.

³ I maturandi devono padroneggiare una lingua nazionale ed aver acquisito buone conoscenze di altre lingue nazionali o straniere. Essi devono essere capaci di esprimersi con chiarezza, precisione e sensibilità e imparare a scoprire le ricchezze e le particolarità delle culture di cui ogni lingua è il vettore.

⁴ I maturandi devono sapersi situare nel mondo naturale, tecnico, sociale e culturale nel quale vivono, nelle sue dimensioni svizzere e internazionali, attuali e storiche. Essi si preparano ad esercitarvi la loro responsabilità verso se stessi, gli altri, la società e la natura.

§ **Art. 9** Materie di maturità

¹ Le sette discipline fondamentali, l'opzione specifica e l'opzione complementare costituiscono l'insieme delle materie di maturità.

² Le discipline fondamentali sono:

- a. la lingua prima;
- b. una seconda lingua nazionale;
- c. una terza lingua, che può essere sia una terza lingua nazionale, sia l'inglese, sia una lingua antica;
- d. la matematica;
- e. il settore delle scienze sperimentali, con l'obbligo di seguire un insegnamento in biologia, chimica e fisica;
- f. il settore delle scienze umane, con l'obbligo di seguire un insegnamento in storia e geografia e un'introduzione all'economia e al diritto;
- g. le arti visive e/o la musica.

³ L'opzione specifica va scelta tra le discipline o i gruppi di discipline seguenti:

- a. lingue antiche (latino e/o greco);
- b. una lingua moderna (una terza lingua nazionale, l'inglese, lo spagnolo o il russo);
- c. fisica e applicazioni della matematica; 
- d. biologia e chimica;
- e. economia e diritto;
- f. filosofia/pedagogia/psicologia;
- g. arti visive;
- h. musica.

⁴ L'opzione complementare va scelta tra le discipline seguenti:

- a. fisica; 
- b. chimica;
- c. biologia;
- d. applicazioni della matematica; 
- e. storia;
- f. geografia;
- g. filosofia;
- h. insegnamento religioso;
- i. economia e diritto;
- k. pedagogia/psicologia;
- l. arti visive;
- m. musica;
- n. sport.

Il contesto generale:
una doppia riforma dei curricoli liceali

negli aspetti organizzativi:
nuova struttura curricolare
con *corsi di base* e *opzioni* caratterizzanti

negli aspetti pedagogici:
“dall’insegnamento all’apprendimento”

La riforma del curriculum liceale in **TICINO**

Esempio: la nuova struttura dell'insegnamento

- *un corso di base “comune” a tutti gli indirizzi*
- *l'opzione specifica FAM /BIC*

Curricoli NON scientifici

3	IV° anno	-
3	III° anno	1&1&1
-	II° anno	2
-	I° anno	3
vecchio		NUOVO

Curricoli scientifici

3	IV° anno	-	3+3
3	III° anno	-	3+3
2	II° anno	3	-
3	I° anno	3	-
vecchio			NUOVO

2 - FAM

Fisica e applicazioni della matematica

L'opzione specifica

Fisica e applicazioni della matematica

si configura come *una* nuova disciplina,
con lo scopo di evidenziare il ruolo della matematica
quale indispensabile strumento di pensiero per
comprendere la struttura dei fenomeni fisici.

I campi di studio considerati si basano su capitoli scelti
di fisica che si prestano particolarmente ad essere
descritti e modellizzati con l'apporto della conoscenza
matematica.

I temi proposti

1 –Oscillazioni

2 -Modello ondulatorio

3 –Coniche

4 -Prodotto vettoriale

5 -Simmetrie e leggi di conservazione

6 -Spazio, tempo e relatività

7 -Equazioni differenziali

8 -Modelli stocastici

- 9 - Il secondo principio della termodinamica:
modelli e interpretazione*
- 10 - La conduzione elettrica*
- 11 - Induzione elettromagnetica*
- 12 - Luce e polarizzazione*
- 13 - Cristalli e aspetti geometrici*
- 14 - Modelli non lineari e fenomeni caotici*
- 15 - Astronomia: dal micro- al macrocosmo*
- 16 - Matematica e fisica nel XVII secolo*



Quale strategia?

Educare lo studente a riconoscere il ruolo della **matematica** quale indispensabile strumento di pensiero per comprendere la struttura dei fenomeni fisici, rappresenta una delle finalità formative che possono caratterizzare un (nuovo) curriculum liceale di indirizzo scientifico.

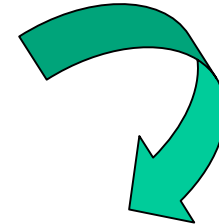
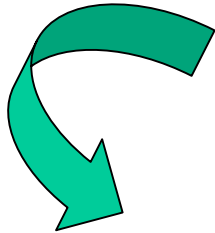
Per il raggiungimento di questo obiettivo, **lo studente**, partendo dalle osservazioni sperimentali compiute in laboratorio, deve costruirsi modelli matematici di situazioni fisiche.

Particolarmente efficace risulta essere **l'approccio dinamico alla modellizzazione**: oltre ad aprire nuove possibilità, tanto sul piano metodologico che su quello dei contenuti, i nuovi strumenti disponibili per la modellizzazione di sistemi dinamici sono facili da utilizzare e permettono di introdurre lo studente a questo mondo molto prima che egli sia in grado di padroneggiare formalmente lo strumento matematico.

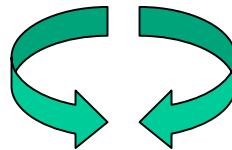
L'uso combinato **dell'acquisizione dati in tempo reale** e della modellizzazione dei processi fisici osservati – favorito da un contesto di apprendimento attivo – consente inoltre di colmare almeno in parte il divario tra i fenomeni fisici reali e l'insegnamento tradizionale.

La struttura della proposta che ho sperimentato al liceo di Locarno:

definizione dell'approccio
didattico disciplinare



definizione dello
strumento di
modellizzazione
matematica



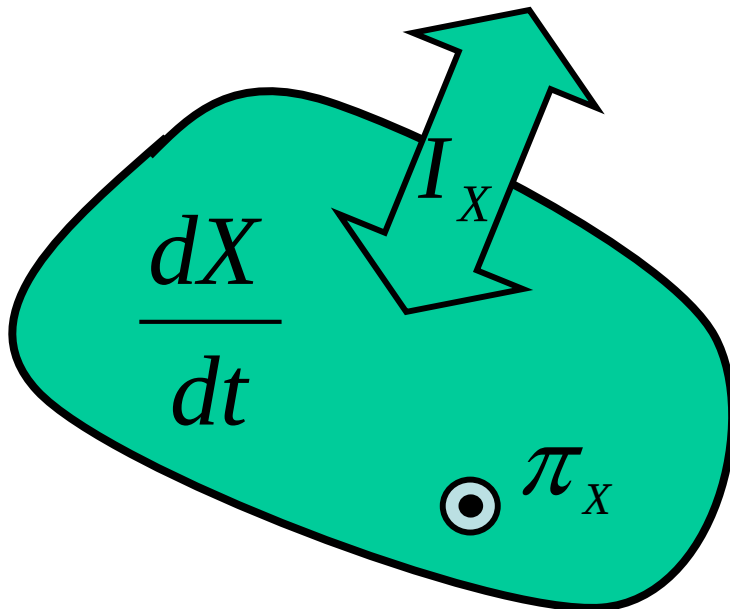
utilizzo di un sistema di
acquisizione dati on-line
per indagare sperimentally
le varie situazioni

Campo di studio	Grandezza estensiva	Conservata / non conservata	Corrente associata	Grandezza intensiva	“Spinta” al trasferimento
Idraulica	Volume d’acqua V	conservata	Corrente d’acqua I_V	Pressione P	ΔP
Elettricità	Carica elettrica Q	conservata	Corrente elettrica I_Q	Potenziale elettrico φ	$\Delta \varphi$
Meccanica (traslazioni)	Quantità di moto p_x	conservata	Corrente meccanica (traslazioni) I_{p_x} (o forza F)	Velocità v_x	Δv_x
Meccanica (rotazioni)	Quantità di moto angolare L_x	conservata	Corrente meccanica (rotazioni) I_{L_x} (o momento della forza M_{mecc})	Velocità angolare ω_x	$\Delta \omega_x$
Termologia	Entropia S	non conservata	Corrente d’entropia I_S	Temperatura assoluta T	ΔT
Chimica (trasformazioni della materia)	Quantità di sostanza n	non conservata	Corrente chimica (o di quantità di sostanza) I_n	Potenziale chimico μ	$\Delta \mu$

L'equazione di bilancio

Per ogni **grandezza estensiva**
è possibile scrivere una
relazione di bilancio
(istantaneo) della forma:

$$\frac{dX}{dt} = I_X + \pi_X$$



X : misura della grandezza

I_X : misura dell'intensità di
corrente

π_X : misura del tasso di
produzione/distruzione

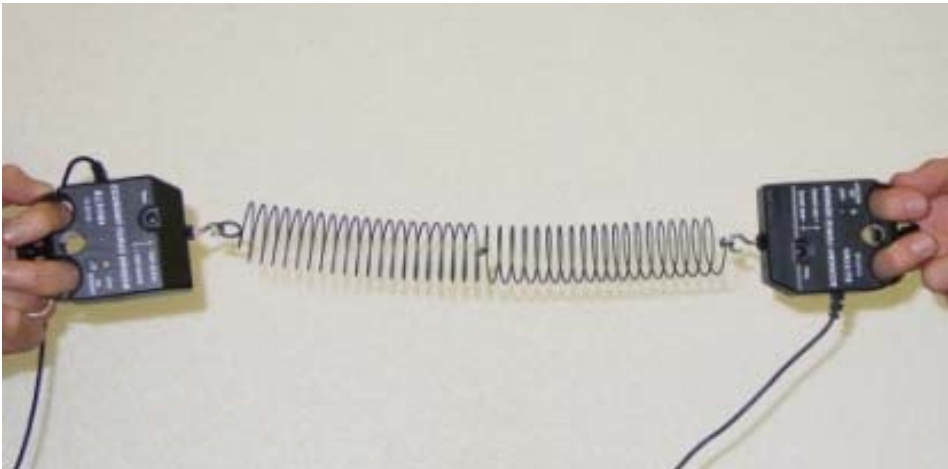
Campo di studio	Grandezza estensiva	Grandezza intensiva	Corrente associata	Trasporto di energia	Scambi di energia
Idraulica	Volume d'acqua V	Pressione P	Corrente d'acqua I_V	$I_E = I_V \cdot P$	$\mathcal{P} = I_V \cdot \Delta P$
Elettricità	Carica elettrica Q	Potenziale elettrico φ	Corrente elettrica I_Q	$I_E = I_Q \cdot \varphi$	$\mathcal{P} = I_Q \cdot \Delta \varphi$
Meccanica (traslazioni)	Quantità di moto p_x	Velocità v_x	Corrente meccanica (traslazioni) I_{px} (o forza F)	$I_E = I_{px} \cdot v_x$	$\mathcal{P} = I_{px} \cdot \Delta v_x$
Meccanica (rotazioni)	Quantità di moto angolare L_x	Velocità angolare ω_x	Corrente meccanica (rotazioni) I_{Lx} (o momento della forza M_{mecc})	$I_E = I_{Lx} \cdot \omega_x$	$\mathcal{P} = I_{Lx} \cdot \Delta \omega_x$
Termologia	Entropia S	Temperatura assoluta T	Corrente d'entropia I_S	$I_E = I_S \cdot T$	$\mathcal{P} = I_S \cdot \Delta T$
Chimica	Quantità di sostanza n	Potenziale chimico μ	Corrente chimica (o di quantità di sostanza) I_n	$I_E = I_n \cdot \mu$	$\mathcal{P} = I_n \cdot \Delta \mu$

Condizioni per cambiare: la formazione dei docenti



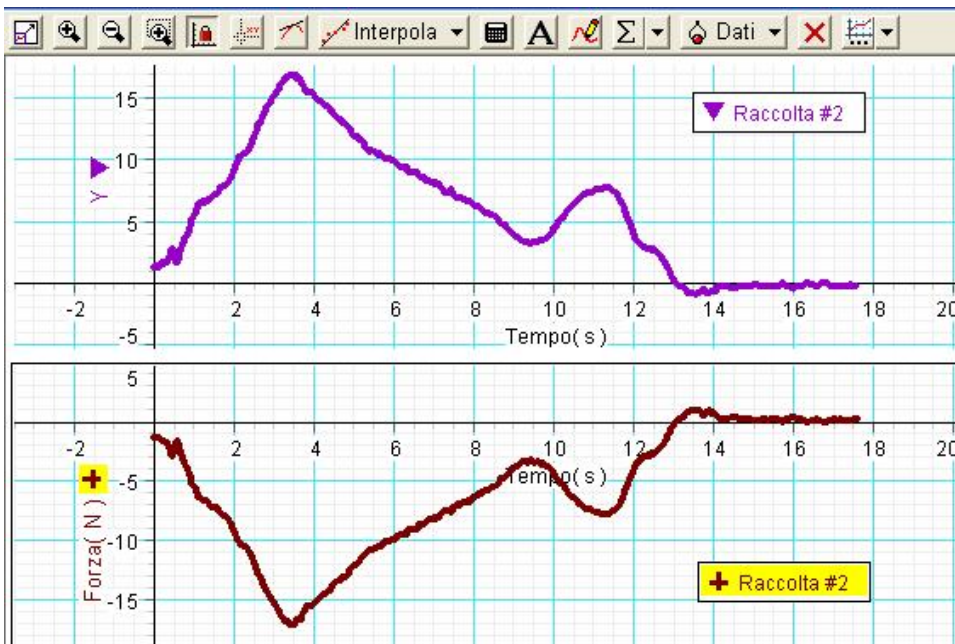
Docenti di biologia, chimica e fisica al lavoro durante un corso di aggiornamento sull'utilizzo dell'on-line.

Azione e reazione

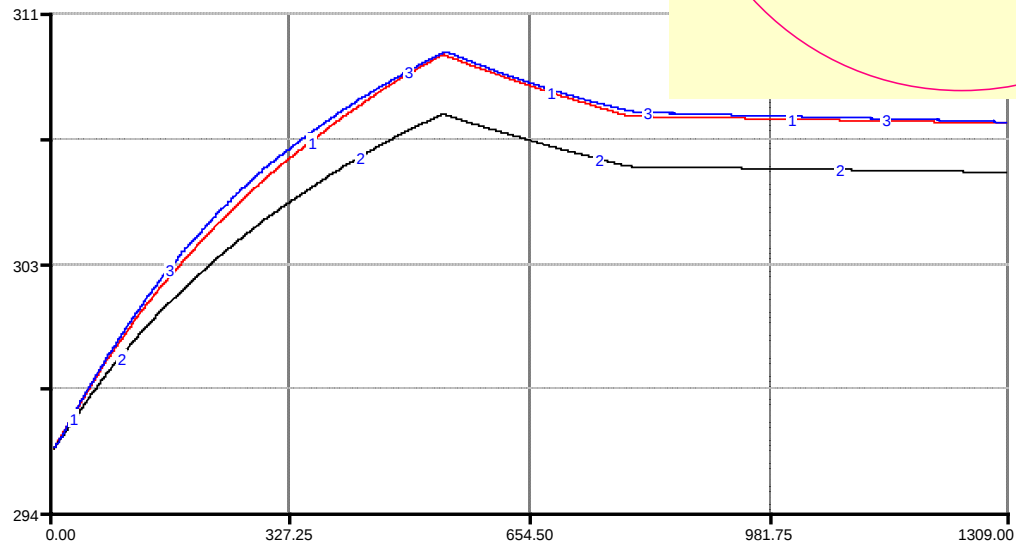
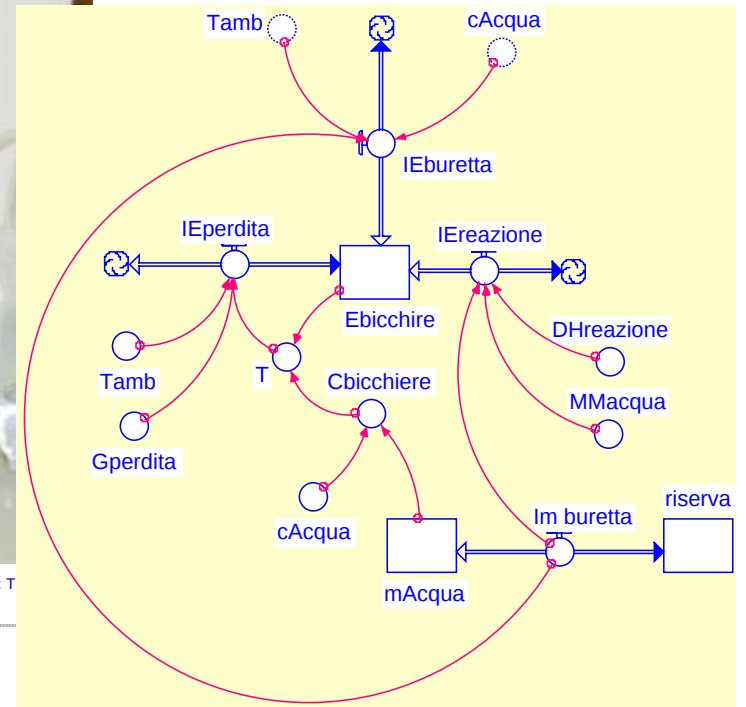


Con due **sensori di forza** si misurano simultaneamente le forze agenti sulle estremità di una molla che viene sollecitata.

La rappresentazione grafica evidenzia una delle caratteristiche di base delle interazioni (principio di azione e reazione).



Titolazione acido - base



L'approccio scelto è basato sulle **analogie**
ciò consente di mettere in evidenza la
struttura sottostante:

- sul piano **disciplinare**
- sul piano della **descrizione matematica**

Sul piano **disciplinare**:

si tratta in primo luogo di *differenziare e strutturare* le singole relazioni, distinguendo da una parte tra:

- **leggi generali** (come ad esempio le leggi di conservazione, le relazioni che esprimono dei bilanci per le variazioni di grandezze estensive) e
- **leggi particolari** specifiche per diverse classi di fenomeni (come ad esempio le varie leggi capacitive, conduttive, induttive), e dall'altra
- **leggi costitutive** che caratterizzano i singoli sistemi (come ad esempio la legge di Hooke per la molla, la legge del gas ideale, la relazione tra quantità di moto e velocità per un corpo dotato di massa).

Per quanto riguarda la **struttura matematica**:

- in un **primo momento** si tratta di introdurre gli studenti a concetti e metodi tipici dell'approccio numerico (**procedure iterative**, metodo di Eulero);
- in una **seconda fase** si tratta di familiarizzarli con **ambienti di modellizzazione dinamica** (con superficie di lavoro grafica);
- in una **terza fase**, si tratta di introdurre gli studenti alle **equazioni differenziali** attraverso una rilettura dei formalismi utilizzati e la soluzione esplicita di alcuni casi significativi.

Dal punto di vista didattico questo approccio è interessante poiché:

- i **tempi di apprendimento** delle procedure di base sono **contenuti**;
- richiede agli studenti una **partecipazione attiva**;
- permette una **differenziazione** e **individualizzazione** dell'insegnamento.

Dal **punto di vista metodologico**, le possibilità d'impiego sono piuttosto diversificate; tra queste:

- l'utilizzo **come supporto** per l'indagine sperimentale;
- l'impiego come strumento **per estendere** il campo delle situazioni che possono essere affrontate e studiate;
- l'utilizzo quale strumento **per esplicitare** le analogie strutturali e formali.

Alcuni obiettivi educativi generali ...

- favorire un apprendimento attivo da parte degli studenti, in particolare valorizzando le loro preconoscenze e le osservazioni qualitative che nascono dall'osservazione dello svolgimento dei fenomeni
- favorire la costruzione da parte degli studenti del proprio sapere, in particolare creando un ambiente in cui possano reinvestire le conoscenze acquisite
- presentare una metodologia scientifica aperta (elaborazione di un modello / acquisizione di dati on-line / confronto con le previsioni del modello / elaborazione di un nuovo modello)
- fornire uno strumento d'indagine che può essere applicato anche al di fuori dell'ambito strettamente fisico

... e alcuni obiettivi disciplinari specifici

- mettere in evidenza l'aspetto sperimentale dell'indagine fisica
- ridurre il divario esistente tra gli esempi considerati nell'insegnamento e i fenomeni fisici reali
- approfondire e riqualificare in un contesto unitario relazioni e leggi, altrimenti percepite come slegate tra loro
- distinguere tra leggi generali e leggi costitutive particolari
- riconoscere le analogie tra i vari elementi delle leggi fisiche
- tradurre le relazioni osservate tra le varie grandezze fisiche in un linguaggio matematico preciso
- riconoscere le caratteristiche unificanti del formalismo matematico

3 – Gli strumenti della modellizzazione dinamica

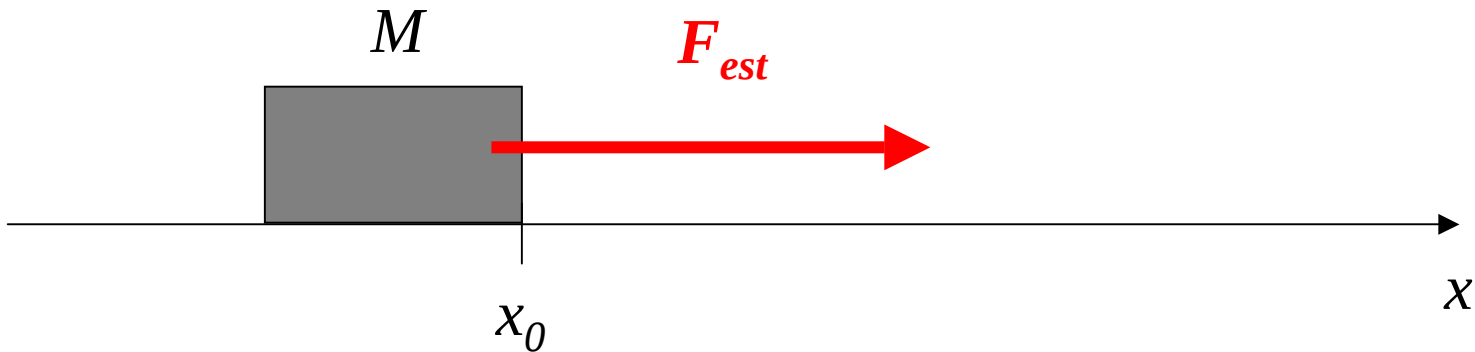
1. Introduzione dell'algoritmo iterativo
2. L'ambiente di modellizzazione
3. La valutazione

1. Introduzione dell'algoritmo iterativo: prime attività

Considerando un esempio concreto (il cui risultato è già conosciuto dagli studenti)

- viene introdotto il **metodo di Eulero** per la determinazione dell'evoluzione temporale;
- si eseguono “*a mano*” alcuni **cicli iterativi** (confronto dei risultati con i dati relativi alla soluzione “esatta”);
- viene svolto il medesimo compito con un **foglio elettronico**.

Esempio: Moto generato dall'azione di una forza costante



Piuttosto che sugli aspetti cinematici, si vuole impostare la descrizione sull'*equazione di bilancio* per la quantità di moto p_x :

$$\dot{p}_x \equiv \frac{dp_x}{dt} = F_x = F_{est}$$

Allora:

$$p_x(t) = p_x(t - \Delta t) + (F_{est}) \cdot \Delta t$$

La posizione in funzione del tempo $x(t)$ è ottenuta partendo dalla velocità $v_x(t)$.

Quest'ultima è ricavata dalle legge costitutiva per la traslazione del corpo rigido:

$$p_x(t) = M v_x(t)$$

In particolare si ha quindi:

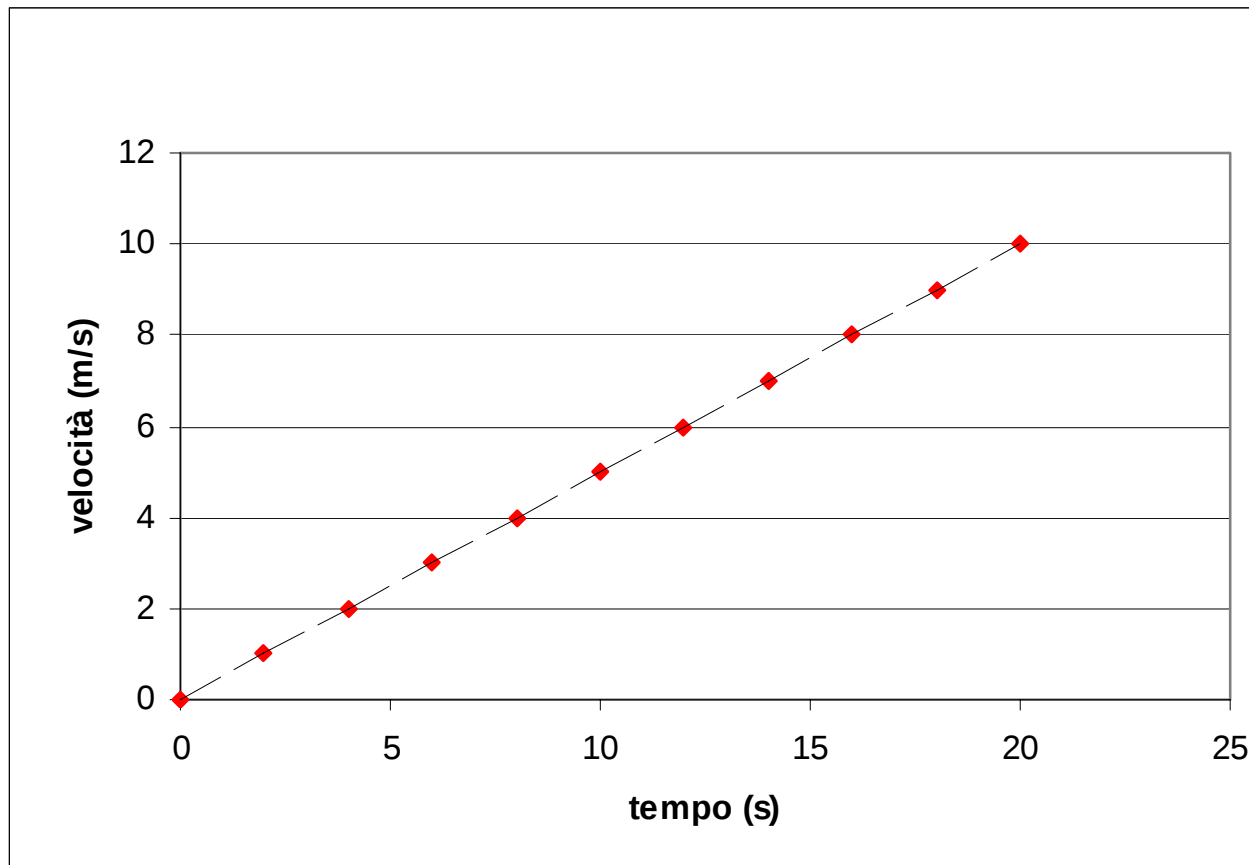
$$x(t) = x(t - \Delta t) + v_x(t) \cdot \Delta t$$

Osservazione: per l'esecuzione concreta dei calcoli relativi ai diversi cicli iterativi occorre fissare l'intervallo di iterazione Δt .

Esempio: moto generato da una forza costante, con
 $\Delta t = 2 \text{ s}, F = 2 \text{ N} \quad m = 4 \text{ kg}$

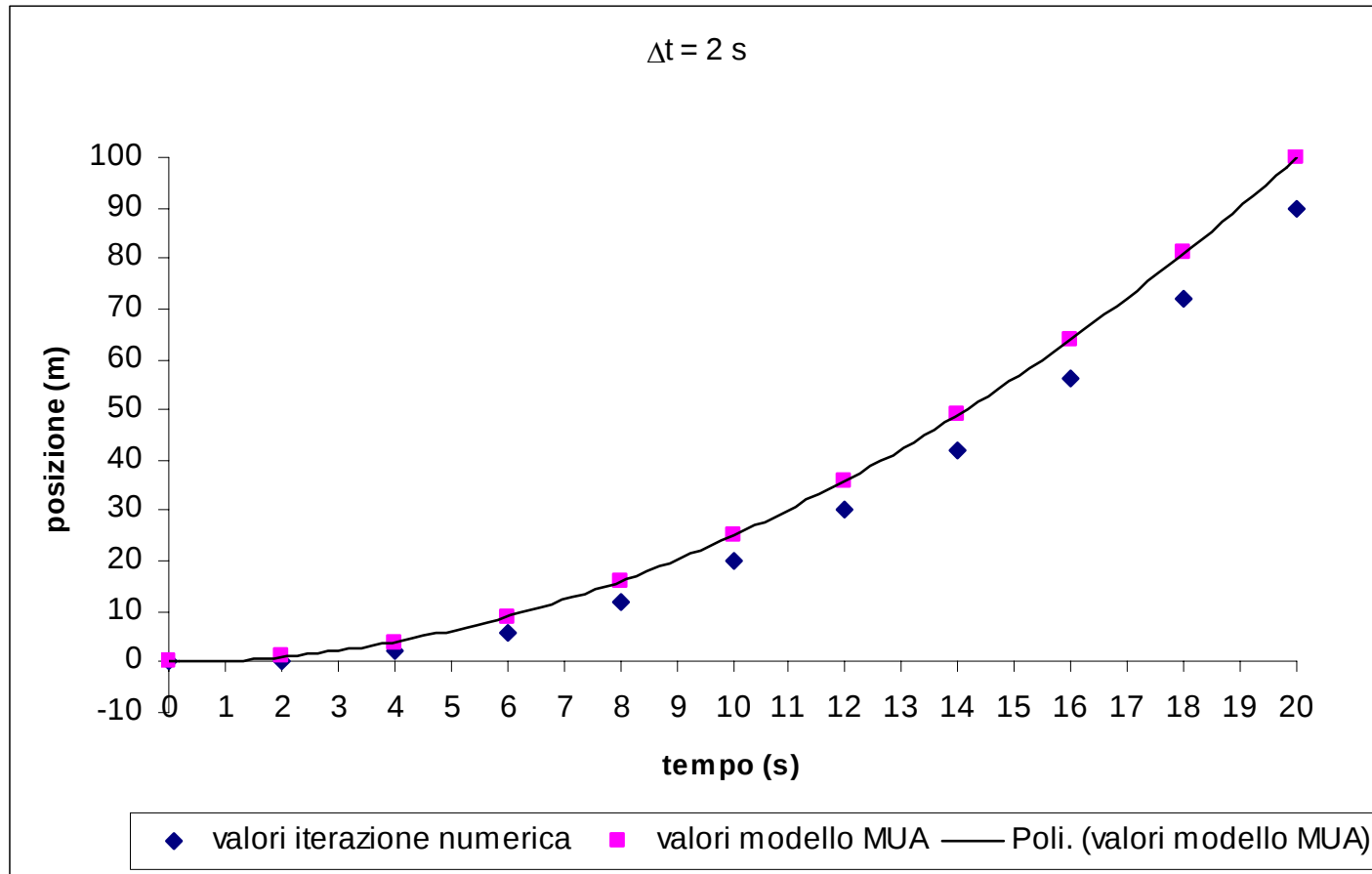
t	$v(t) =$ $p(t)/m$	$p(t) = p(t-\Delta t)$ $+ F \cdot \Delta t$	$x(t) = x(t-\Delta t) +$ $v(t-\Delta t) \cdot \Delta t$	$x(t)$ (valori MUA)
0	0	0	0	0
2	1	4	0	1
4	2	8	2	4
6	3	12	6	9
8	4	16	12	16
10	5	20	20	25
12	6	24	30	36
14	7	28	42	49
16	8	32	56	64
18	9	36	72	81
20	10	40	90	100

Velocità in funzione del tempo



La velocità cresce linearmente, vale a dire possiamo concludere che si origina un *moto uniformemente accelerato*.

Confronto tra i risultati dell'iterazione numerica e i valori teorici per la posizione in funzione del tempo:



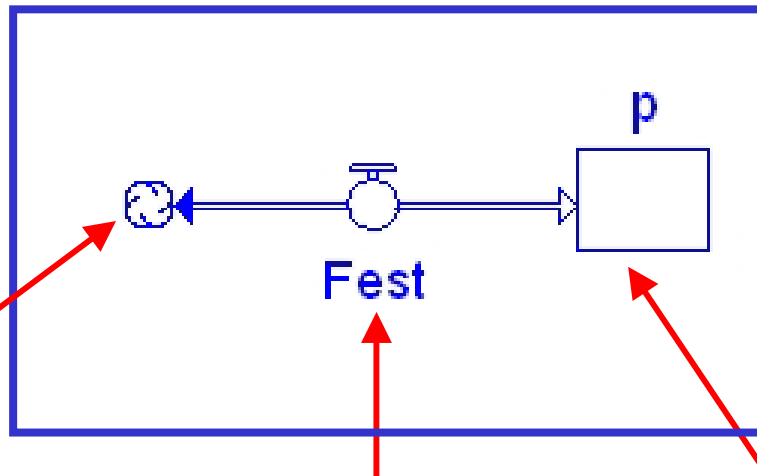
Quali fattori influenzano la previsione numerica?



2. L'ambiente di modellizzazione

(aspetti concettuali, non operativi)

Equazione di bilancio



Ambiente
esterno con
cui il sistema
scambia
quantità di
moto.

Tasso di variazione
*Esprime gli scambi
del sistema con
l'ambiente esterno.*

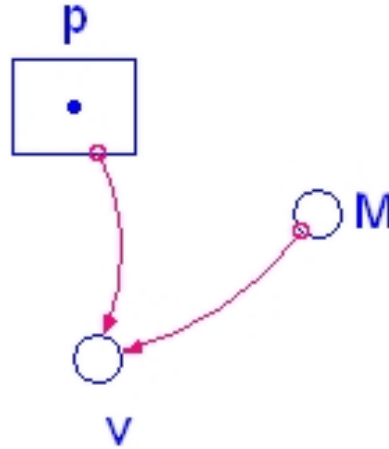
Grandezza per la quale
viene allestito il bilancio
quantità di moto p_x del
corpo sul quale agisce la
forza esterna.
*Deve essere esplicitato
anche il valore iniziale.*

$$p(t) = p(t - dt) + (Fest). dt$$

INIT $p = 0$
INFLOWS:
 $Fest = 2 \{N\}$

Grandezze fisiche, relazioni costitutive

(definiscono le
proprietà del sistema
fisico considerato)



$$M = 4 \{kg\}$$
$$v = p/M$$

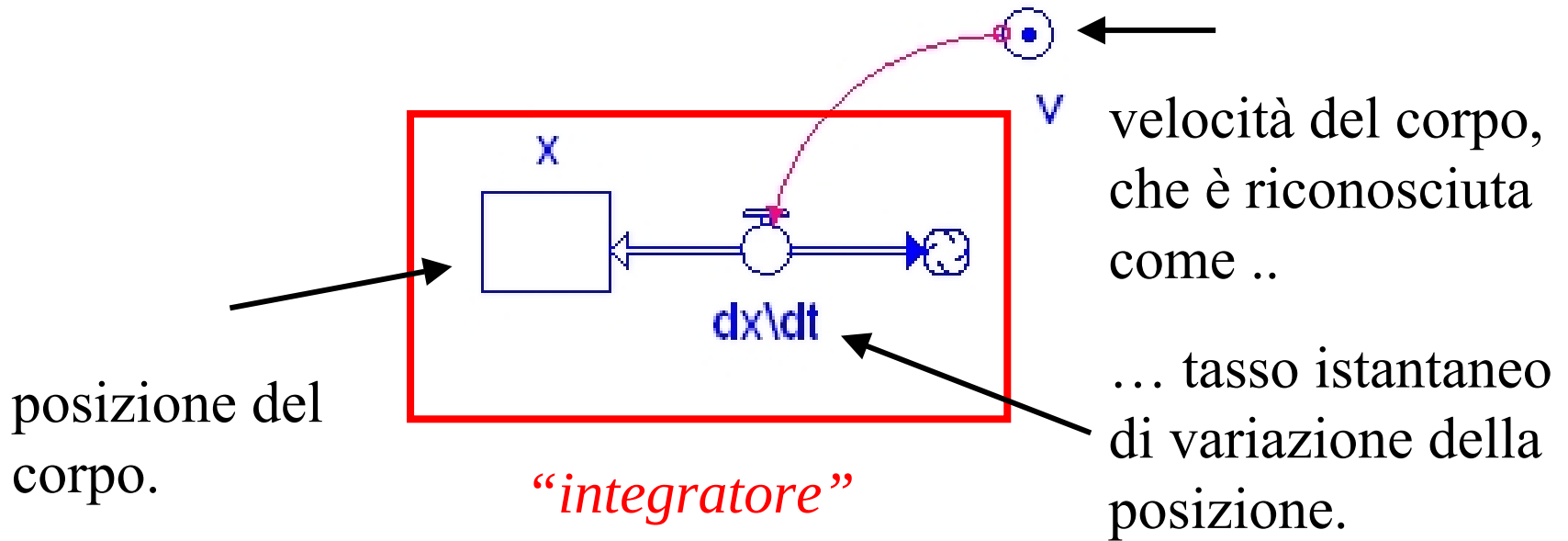
Le varie grandezze fisiche in gioco possono essere introdotte in vari modi; qui:

- l'inerzia M è definita attraverso il suo valore numerico;
- la velocità v_x è definita attraverso la relazione costitutiva che, nell'ambito della meccanica newtoniana, la lega con la quantità di moto e con l'inerzia.

Con i **connettori** (freccie rosse, orientate!) possono essere esplicitate le interdipendenze tra le varie grandezze:

- la velocità del corpo dipende dalla sua quantità di moto:
- la velocità del corpo dipende dalla sua inerzia.

Aspetti cinematici



È ottenuta
aggiungendo
passo passo
alla *posizione*
iniziale i vari
spostamenti.

$$x(t) = x(t - dt) + (dx/dt) \cdot dt$$

$$INIT\ x = 0$$

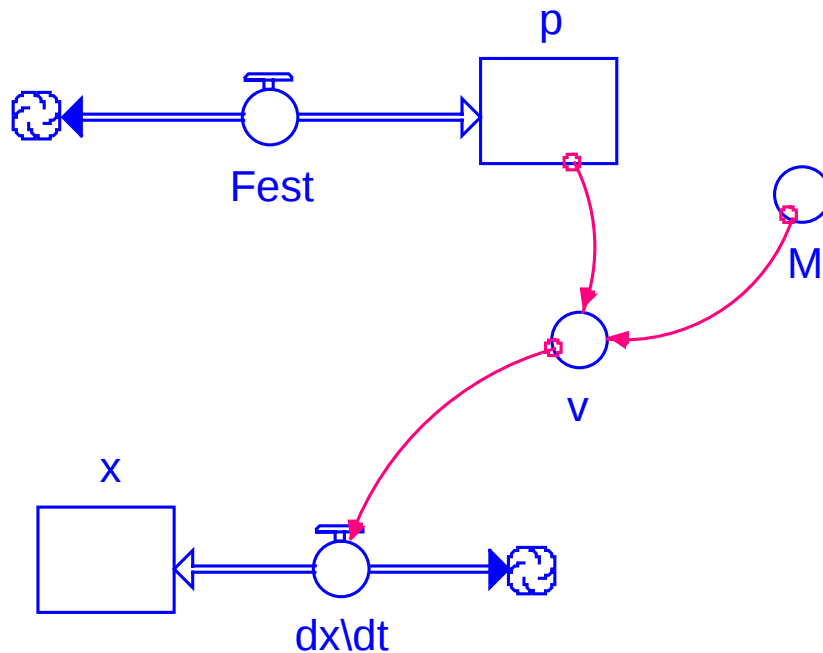
INFLOWS:

$$dx/dt = v$$

Riassumendo:

Un oggetto di massa $M = 4,0 \text{ kg}$ (inizialmente fermo) è soggetto ad una forza costante $F = 2,0 \text{ N}$.

Determina quale tipo di moto si origina nonché la velocità e la posizione in funzione del tempo.



$$p(t) = p(t - dt) + (F_{est}) * dt$$

$$INIT \ p = 0$$

INFLOWS:

$$F_{est} = 2 \{N\}$$

$$x(t) = x(t - dt) + (dx/dt) * dt$$

$$INIT \ x = 0$$

INFLOWS:

$$dx/dt = v$$

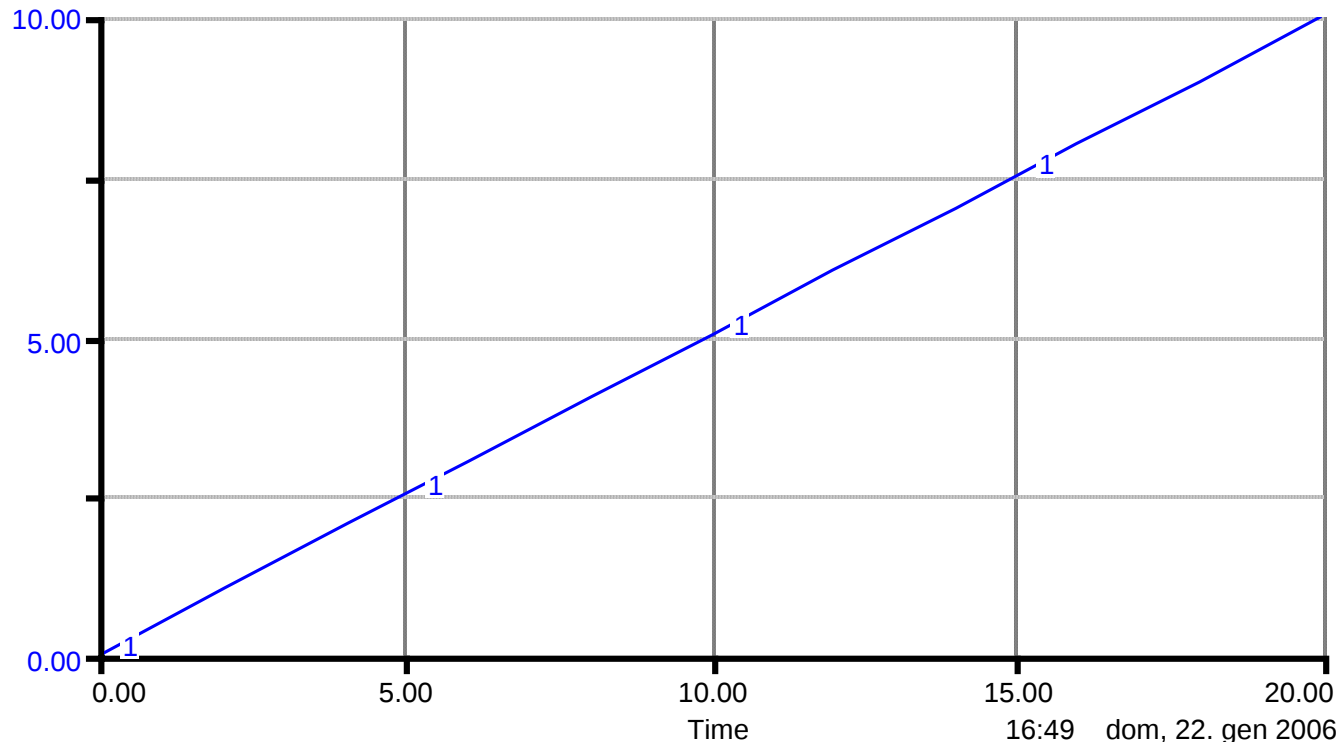
$$M = 4 \{kg\}$$

$$v = p/M$$

■ Presentazione del modello

Rappresentazione grafica dei risultati: velocità in funzione del tempo

1: v

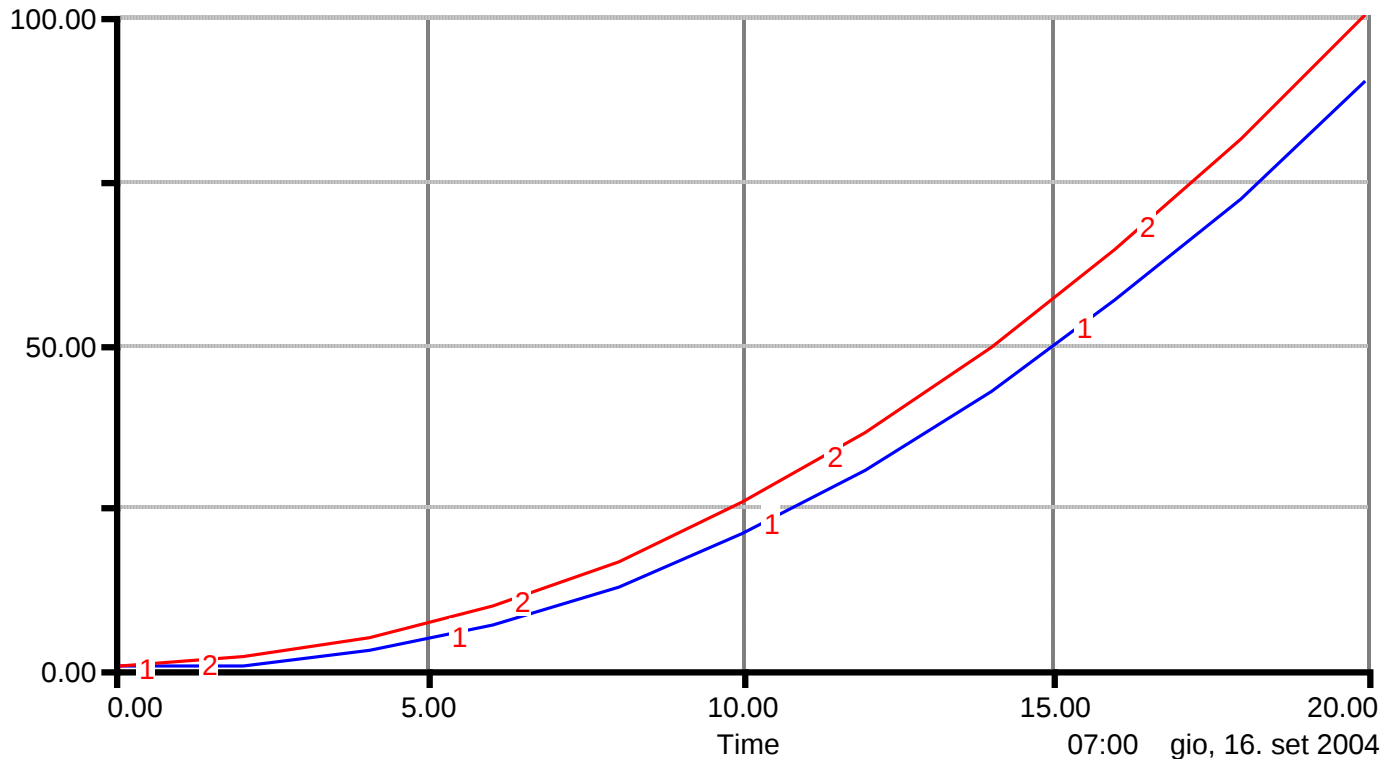


Previsione del modello (con $\Delta t = 2$ s): la velocità cresce linearmente, vale a dire possiamo concludere che si origina un *moto uniformemente accelerato*.

Rappresentazione grafica dei risultati

1: x

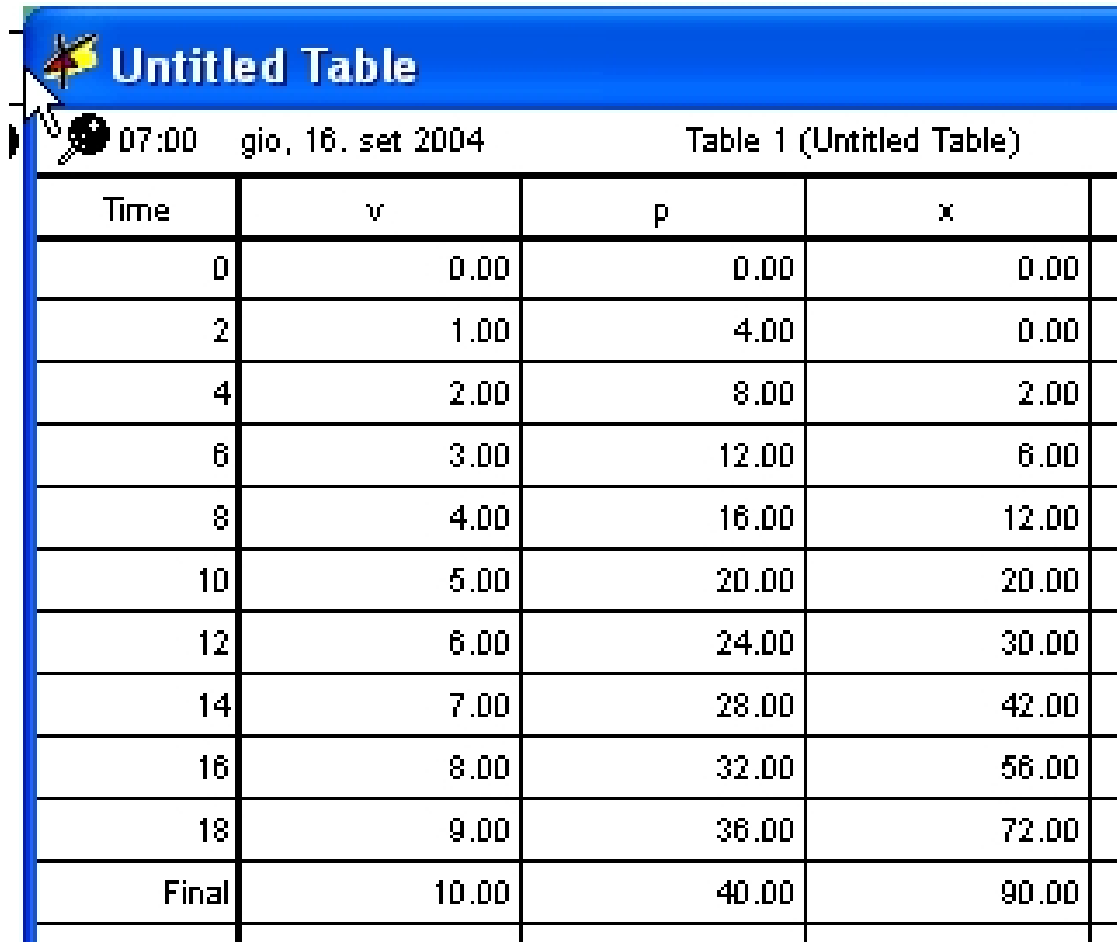
2: x MUA



Confronto tra i risultati forniti dal modello e i valori teorici del moto uniformemente accelerato ($\Delta t = 2$ s).

Quali fattori influenzano la precisione della previsione?

Rappresentazione numerica dei risultati (tabella)



07:00	gio, 16. set 2004	Table 1 (Untitled Table)		
Time	v	p	x	
0	0.00	0.00	0.00	
2	1.00	4.00	0.00	
4	2.00	8.00	2.00	
6	3.00	12.00	6.00	
8	4.00	16.00	12.00	
10	5.00	20.00	20.00	
12	6.00	24.00	30.00	
14	7.00	28.00	42.00	
16	8.00	32.00	56.00	
18	9.00	36.00	72.00	
Final	10.00	40.00	90.00	

Tabella con i valori numerici fornita dal modello: i dati coincidono perfettamente con quelli calcolati con il foglio elettronico ($\Delta t = 2$ s).

3. La valutazione

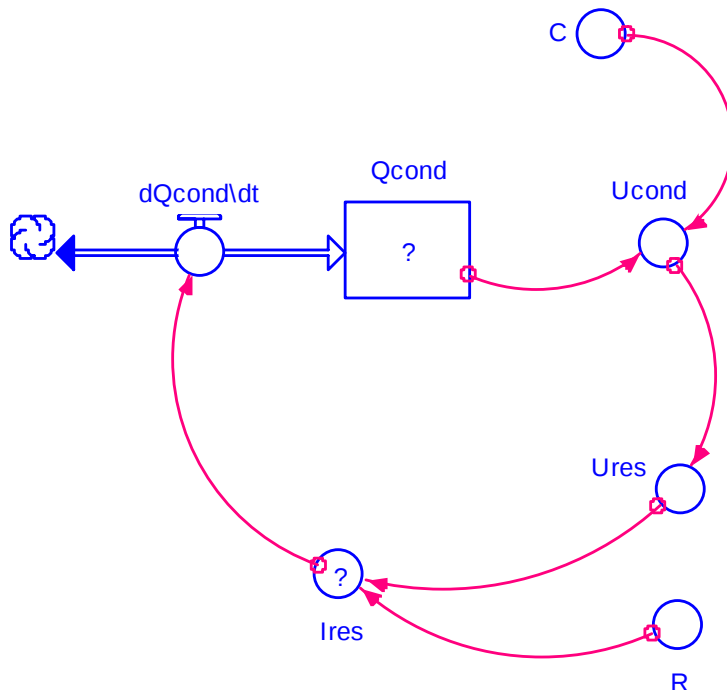
Le prestazioni cognitive richieste agli studenti nel corso di un'attività di modellizzazione sono particolarmente interessanti poiché – soprattutto utilizzando ambienti di lavoro che presentano una interfaccia grafica - viene loro richiesto di esplicitare, più che singole nozioni, una rete di connessioni, una sorta di *mappa concettuale* corredata dagli aspetti quantitativi.

Ciò consente quindi di utilizzare attività di modellizzazione anche in prove scritte o in colloqui orali; si può chiedere di illustrare il procedimento utilizzato per impostare un determinato modello, oppure si possono proporre dei modelli parzialmente sviluppati, chiedendo di completarli.

Qui di seguito un esempio relativo alla *scarica di un condensatore*.

5 – Un condensatore di capacità $C = 100 \text{ mF}$ è inizialmente carico $Q_{\text{cond}}(0) = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ C}$. Esso viene poi scaricato attraverso un resistore ohmico $R = 400 \text{ W}$. Sulla base del modello che trovi sotto:

- spiega il significato sia fisico che matematico della prima riga del tabulato;
- come mai per il simbolo per la carica elettrica Q_{cond} e per l'intensità della corrente elettrica I_Q vi è un punto di domanda? Cosa faresti per eliminarlo?
- Spiega quali sono le leggi generali (principi di conservazione, bilancio, ecc.) che vengono utilizzate nel modello;
- indica quali sono le leggi particolari impiegate per la descrizione dei singoli elementi;
- rappresenta qualitativamente l'andamento in funzione del tempo per la carica $Q_{\text{cond}}(t)$ del condensatore e la tensione $U_{\text{res}}(t)$ ai capi del resistore;
- Come potresti ampliare il modello per esplicitare anche gli aspetti energetici?



$$Q_{\text{cond}}(t) = Q_{\text{cond}}(t - dt) + (dQ_{\text{cond}}/dt) * dt$$

INIT $Q_{\text{cond}} =$

INFLOWS:

$$dQ_{\text{cond}}/dt = -I_{\text{res}}$$

$$C = 1.00e-4 \{F\}$$

$I_{\text{res}} =$

$$R = 400 \{ohm\}$$

$$U_{\text{cond}} = Q_{\text{cond}}/C$$

$$U_{\text{res}} = U_{\text{cond}}$$

$$Q_{\text{cond}}(t) = Q_{\text{cond}}(t - dt) + (dQ_{\text{cond}}/dt) * dt$$

INIT $Q_{\text{cond}} = 2.00\text{e-}3 \text{ \{Clb\}}$

INFLOWS:

$$dQ_{\text{cond}}/dt = -I_{\text{res}}$$

$$C = 1.00\text{e-}4 \text{ \{F\}}$$

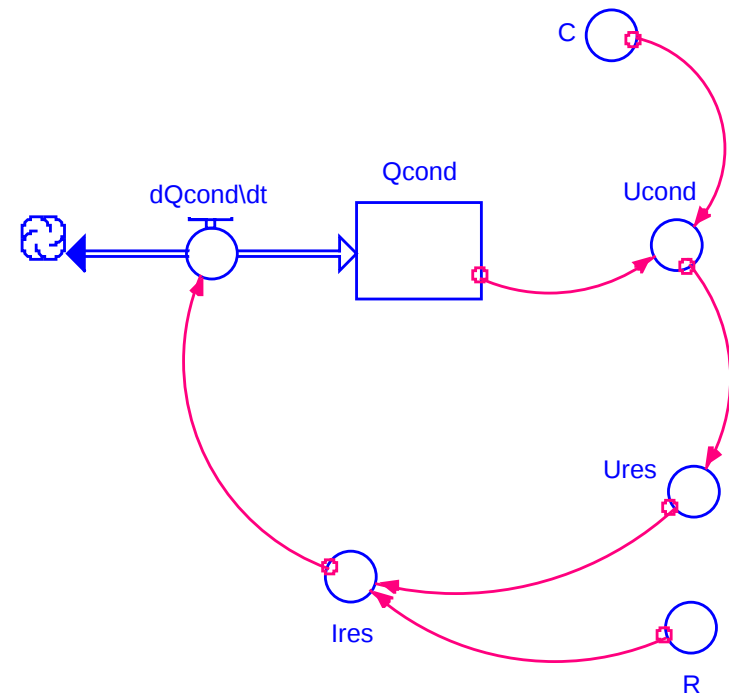
$$I_{\text{res}} = U_{\text{res}}/R$$

$$Q_0 = 2.00\text{e-}3 \text{ \{Clb\}}$$

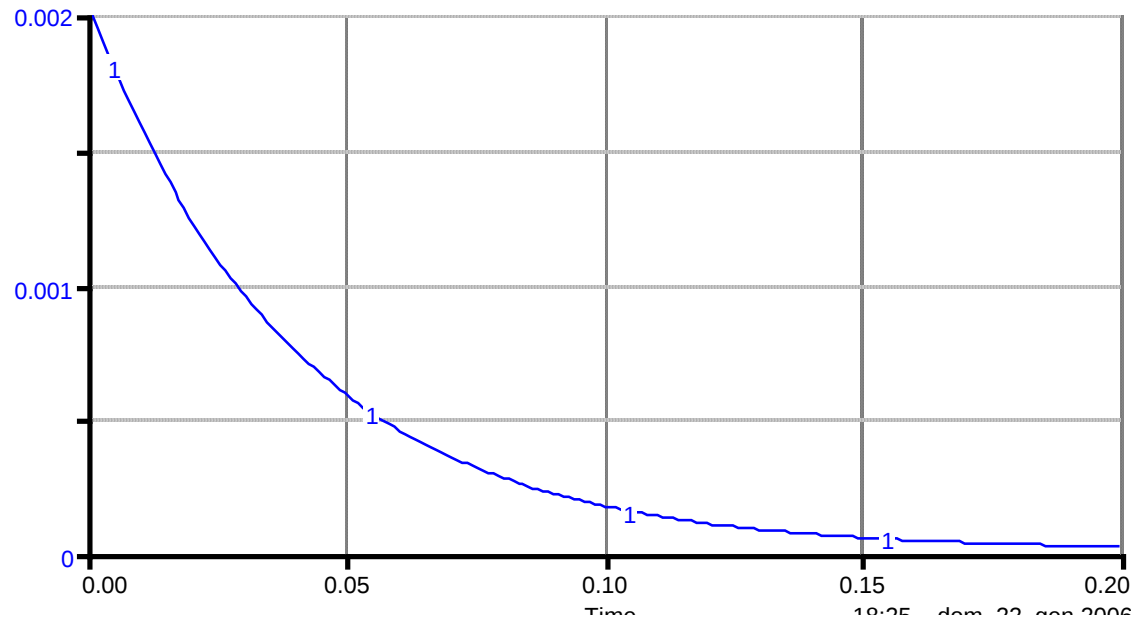
$$R = 400 \text{ \{ohm\}}$$

$$U_{\text{cond}} = Q_{\text{cond}}/C$$

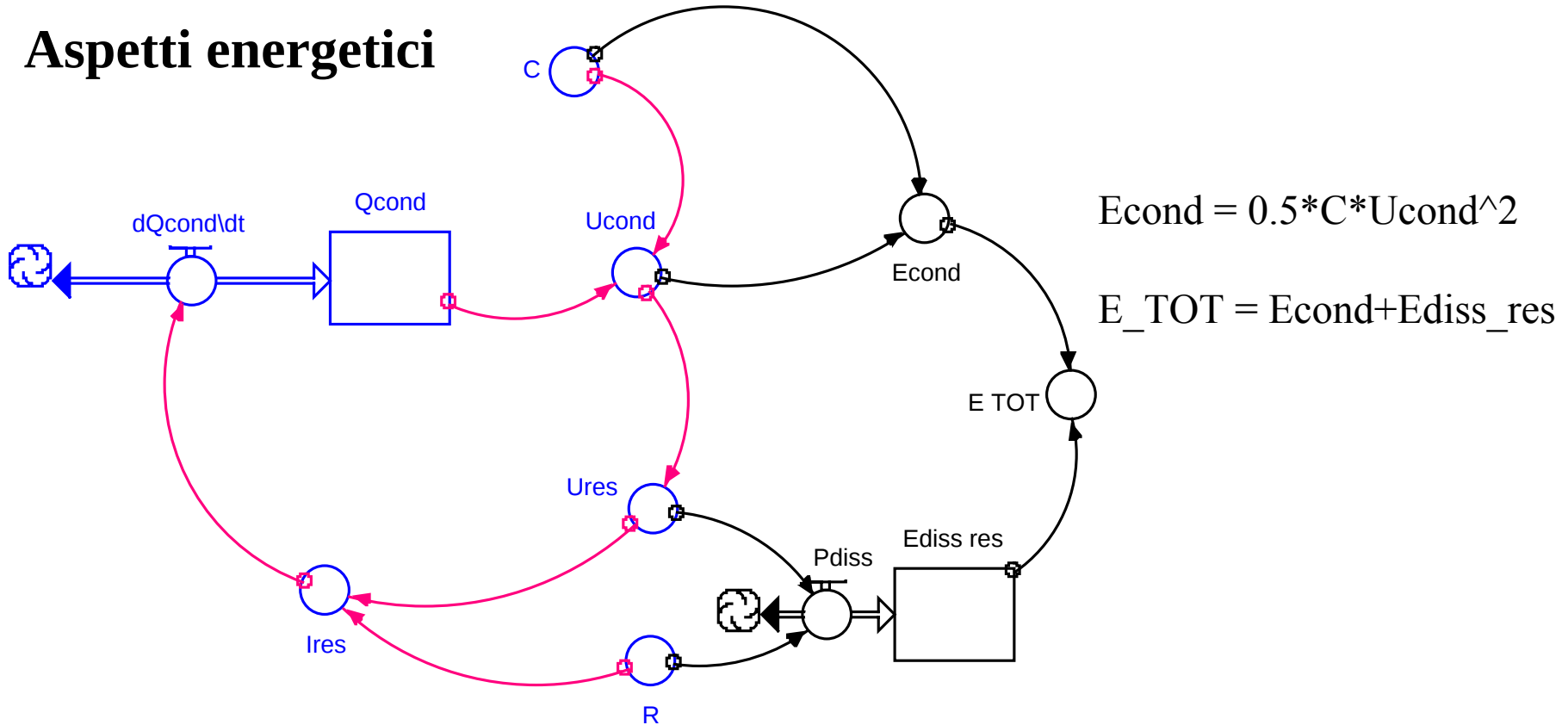
$$U_{\text{res}} = U_{\text{cond}}$$



1: Q_{cond}



Aspetti energetici



$$E_{cond} = 0.5 * C * U_{cond}^2$$

$$E_{TOT} = E_{cond} + E_{diss_res}$$

**Si noti la diversa
struttura dei vari
termini presenti!**

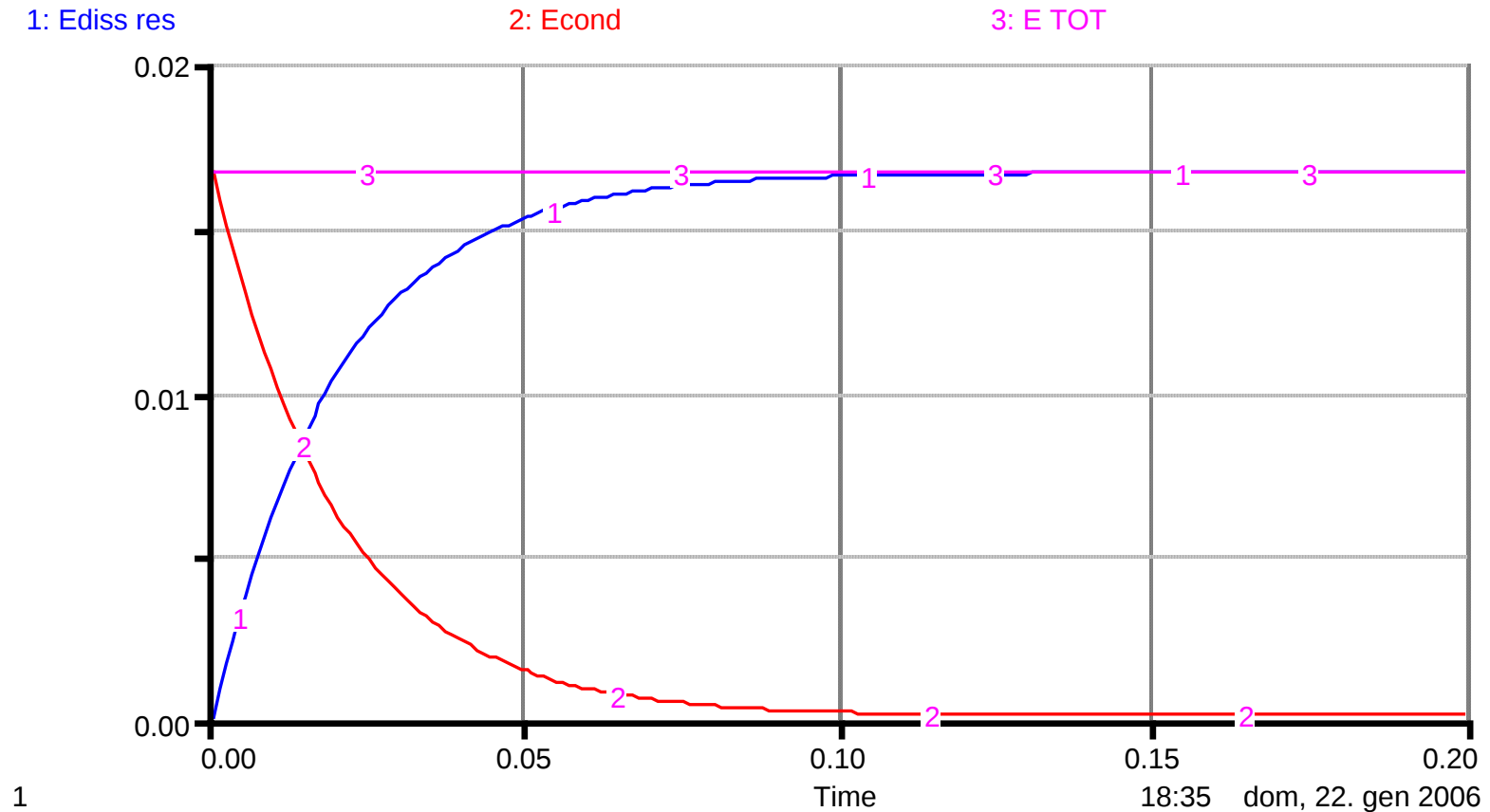
$$E_{diss_res}(t) = E_{diss_res}(t - dt) + (P_{diss}) * dt$$

$$INIT E_{diss_res} = 0$$

INFLOWS:

$$P_{diss} = (U_{res}^2) / R$$





L'**energia nel condensatore** e l'**energia dissipata nel resistore** sono determinate in modo indipendente; ciò permette di verificare se la modellizzazione proposta rispetta la legge di conservazione dell'energia: l'**energia totale** del sistema risulta effettivamente costante!

Altri esempi

Esame scritto di maturità 2001 

Problema 1

Moto di una slitta magnetica lungo un piano inclinato

Esame scritto di maturità 2002 

Problema 1

Sferetta in caduta all'interno di un mezzo viscoso

Esame scritto di maturità 2004 

Problema 6

Contatto termico con l'ambiente

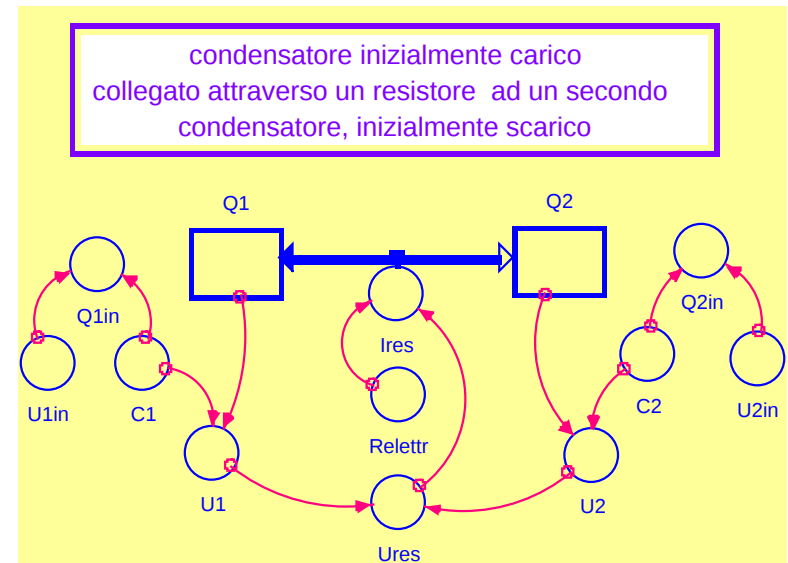
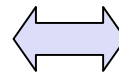
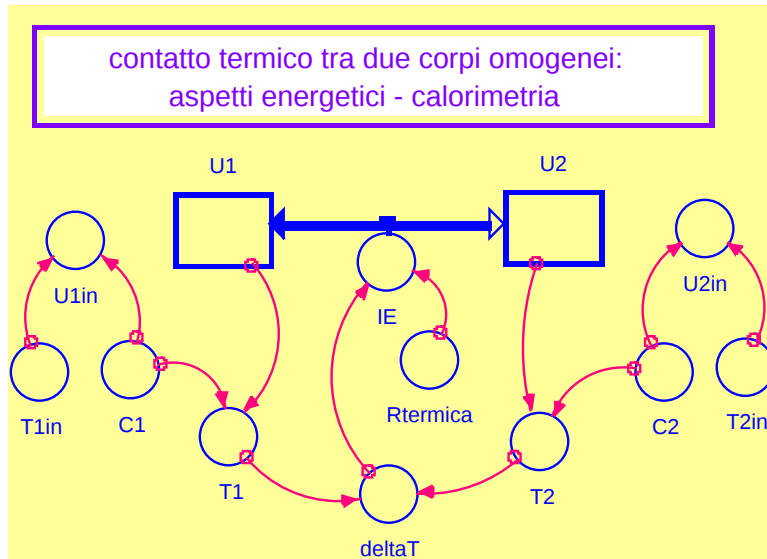
II^a parte: alcuni esempi (presentazione)

- 1- Il raggiungimento dell'equilibrio
- 2 - Chi arriverà a terra per primo
- 3 - Dalla termostatica alla dinamica del calore
Modellizzare per capire l'esperimento
- 4 - Dal moto uniformemente accelerato
all'esperienza di Rutherford
- 5 - Il pendolo di Wilberforce

1 – Il raggiungimento dell'equilibrio: analogie e differenze nei vari campi di studio

Obiettivo

attraverso l'esame di alcuni esempi idraulici, elettrici e termici, si vuole mettere in evidenza la **struttura delle leggi fisiche** che governano i diversi processi considerati: elementi costitutivi, leggi generali, equazioni di bilancio



2 – Dalla termostatica alla dinamica del calore

Obiettivo

costruire una traccia per la modellizzazione di processi termodinamici, superando in particolare il tradizionale approccio in cui *sin dall'inizio* si considera unicamente *la* “soluzione”, scegliendola tra le trasformazioni “standard” conosciute.

Nella *prima parte* elaboreremo alcuni modelli basati sulle proprietà del gas ideale (equazione di stato, energia interna), mentre nella *seconda parte* verrà sviluppato un approccio più genuinamente termodinamico (entropia).

3 - Chi arriverà a terra per primo?

Modellizzare per capire l'esperimento

Obiettivo

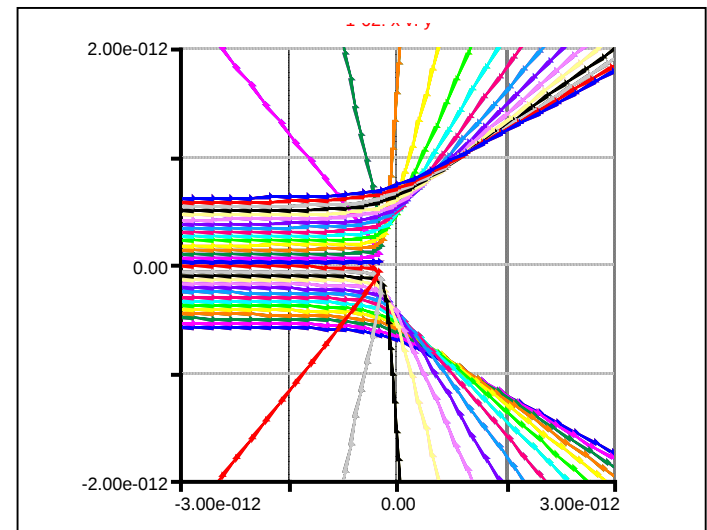
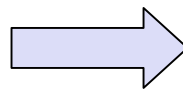
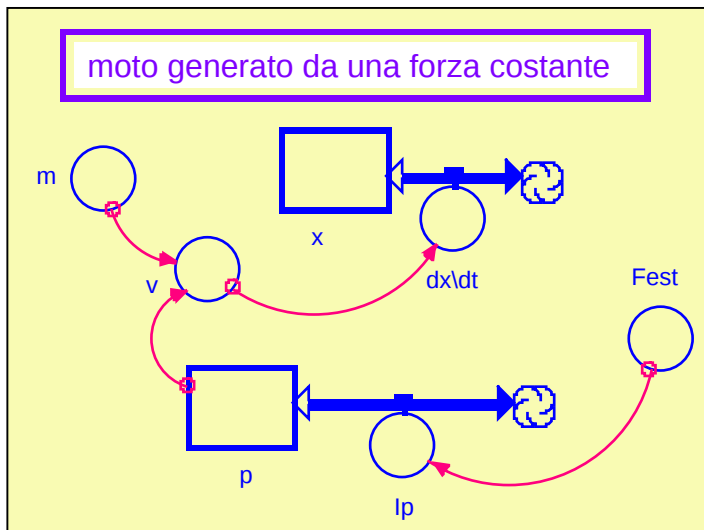
Utilizzare la modellizzazione per interpretare e verificare dei risultati sperimentali a prima vista sorprendenti e per i quali non si ha la possibilità di un confronto diretto con le previsioni di un modello teorico.

La situazione considerata (ribaltamento assicelle) presenta una fenomenologia che non può essere interpretata in modo qualitativo con il concetto di massa inerziale, ma richiede l'elaborazione di un preciso modello meccanico per le rotazioni basato sui concetti di momento angolare, momento d'inerzia e momento meccanico di una forza.

4 – Dal moto uniformemente accelerato all'esperienza di Rutherford

Obiettivo

attraverso una sequenza di modelli che partono da situazioni semplici e ben conosciute, si vuole mostrare come è possibile affrontare ambiti altrimenti difficilmente accessibili ad uno studente liceale con i tradizionali strumenti matematici



5 – Il pendolo di Wilberforce

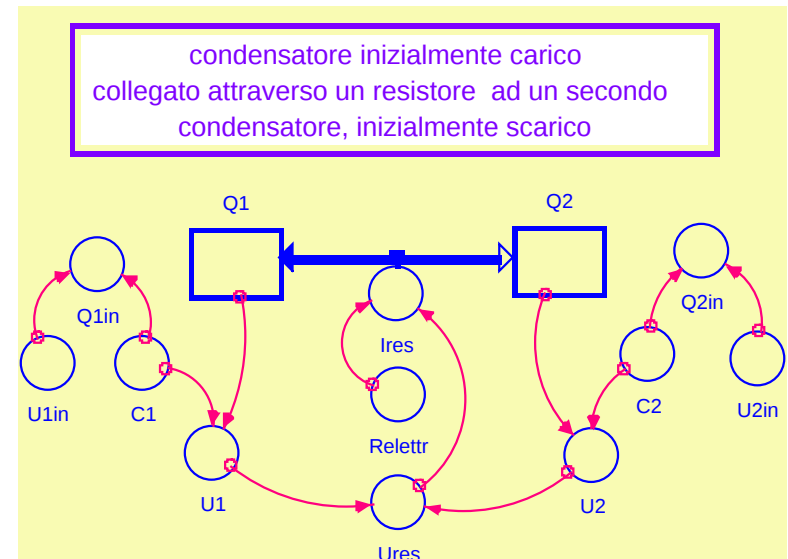
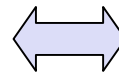
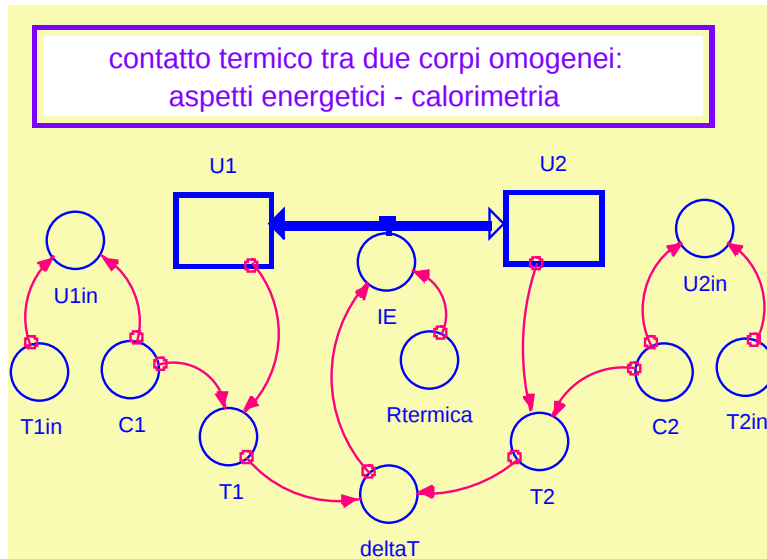
Obiettivo

Partendo dalle osservazioni sperimentali relative a questo sistema con due gradi di libertà, attraverso la modellizzazione dinamica è possibile introdurre e illustrare alcune delle proprietà fondamentali delle soluzioni di equazioni differenziali lineari.

1 – Il raggiungimento dell'equilibrio: analogie e differenze nei vari campi di studio

Obiettivo

attraverso l'esame di alcuni esempi idraulici, elettrici e termici, si vuole mettere in evidenza la **struttura delle leggi fisiche** che governano i diversi processi considerati: elementi costitutivi, leggi generali, equazioni di bilancio



*Contatto di un corpo con l'ambiente circostante
ossia interazione con un corpo di “capacità infinita”*

processo:	esempio:	cosa capita:
• idraulico	un vaso pieno di acqua viene svuotato nell'ambiente circostante attraverso un tubicino inserito alla base	fino a che ai capi del tubicino vi è una differenza di pressione, vi è un trasferimento di acqua dal vaso all'ambiente
• elettrico	un condensatore viene scaricato (“a terra”) attraverso un resistore	fino a che ai capi del resistore vi è una differenza di potenziale elettrico, vi è un trasferimento di carica elettrica dal condensatore a terra
• meccanico	un corpo in moto su di una superficie orizzontale viene arrestato da una forza d'attrito	fino a che tra oggetto e superficie vi è una differenza di velocità, l'oggetto viene frenato, ossia vi è un trasferimento di impulso dall'oggetto a terra
• termico	un corpo viene lasciato raffreddare a contatto con l'aria circostante	fino a che tra oggetto e aria circostante vi è una differenza di temperatura, vi è un trasferimento di entropia (“calore”) dal corpo all'aria

1.1 svuotamento di un vaso provvisto di tubo alla base (flusso laminare)

$$\text{VOLUME}(t) = \text{VOLUME}(t - dt) + (\text{correnteIv}) * dt$$

$$\text{INIT VOLUME} = 5e-3 \{m^3\}$$

INFLOWS:

$$\text{correnteIv} = \text{deltaPtubo} / \text{Ridraulica}$$

$$\text{area} = 2.5e-2 \{m^2\}$$

$$\text{deltaPtubo} = -\text{deltaPvaso}$$

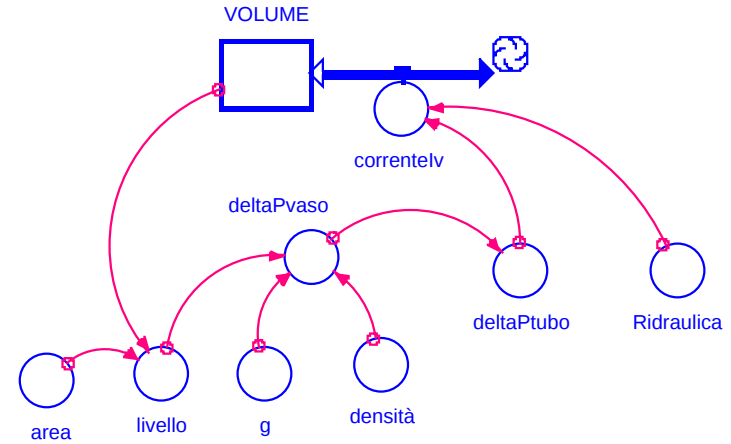
$$\text{deltaPvaso} = \text{densità} * g * \text{livello}$$

$$\text{densità} = 1e3 \{kg/m^3\}$$

$$g = 9.81 \{m/sec^2\}$$

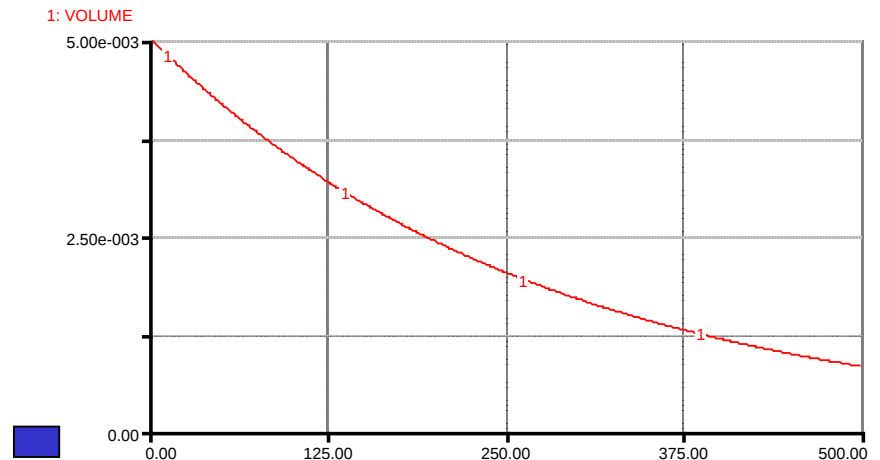
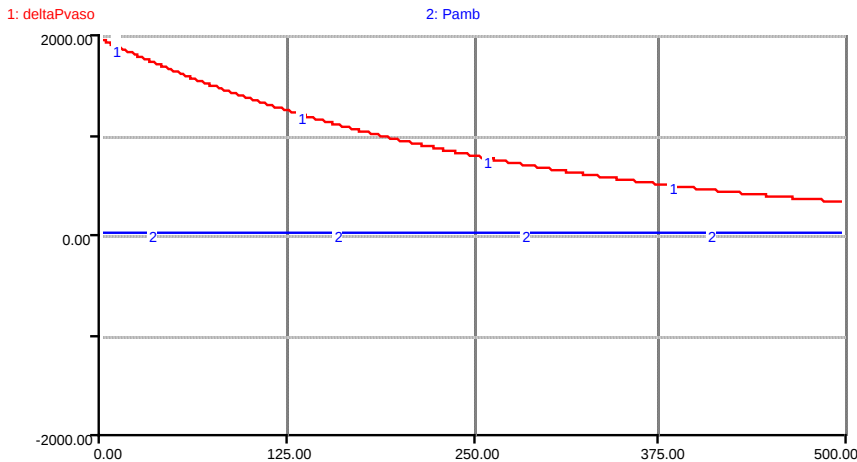
$$\text{livello} = \text{VOLUME} / \text{area}$$

$$\text{Ridraulica} = 1.08e8 \{N.sec/m^5\}$$



Il modello

- 1) ipotizza un flusso laminare ($\text{deltaP} = R \cdot I_v$)
- 2) NON tiene conto né degli aspetti induttivi né dell'effetto Bernoulli nel passaggio cilindro-tubo!



1.2 scarica di un condensatore attraverso un resistore

$$Q_c(t) = Q_c(t - dt) + (dQ_c/dt) * dt$$

$$\text{INIT } Q_c = 2 \{Clb\}$$

INFLOWS:

$$dQ_c/dt = -I_{res}$$

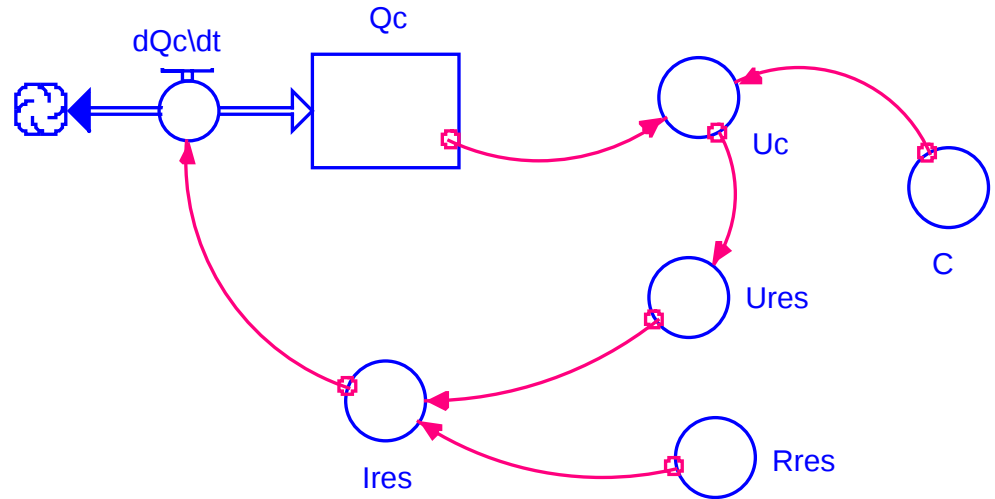
$$C = 0.1 \{F\}$$

$$I_{res} = U_{res}/R_{res}$$

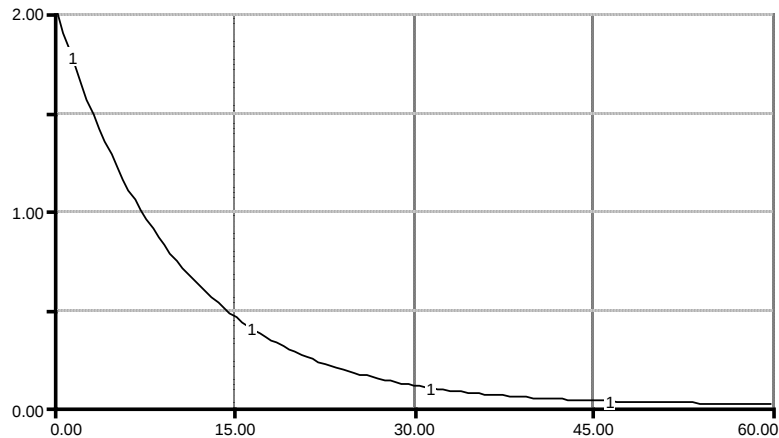
$$R_{res} = 100 \{Ohm\}$$

$$U_c = Q_c/C$$

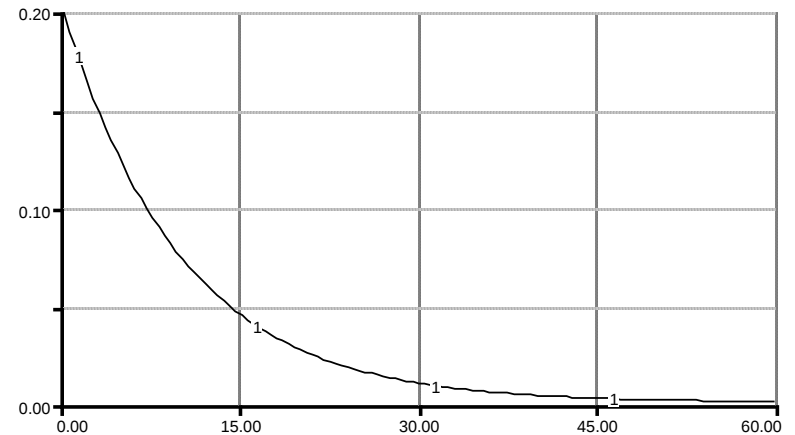
$$U_{res} = U_c$$



1: Q_c



1: I_{res}



1.3 arresto di un corpo sulla superficie di scivolamento

$$p(t) = p(t - dt) + (I_p_attr) * dt$$

$$\text{INIT } p = 2.1 \text{ \{N.sec\}}$$

INFLOWS:

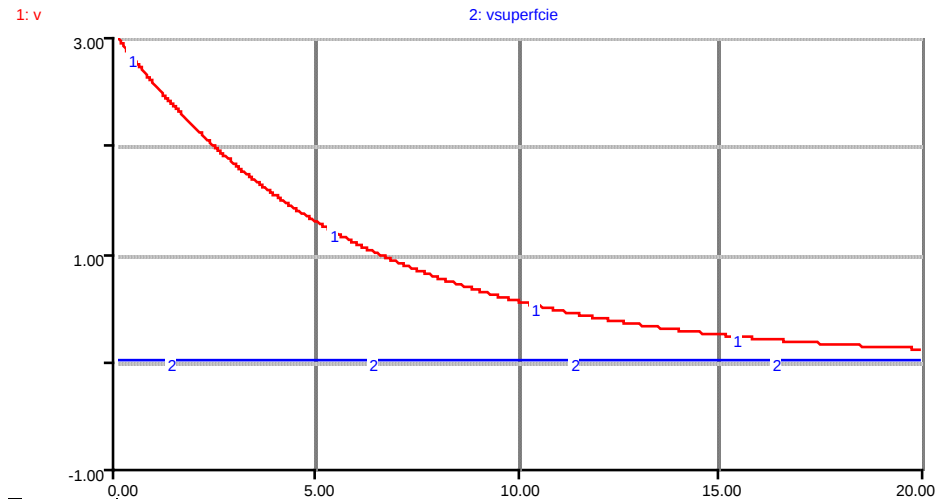
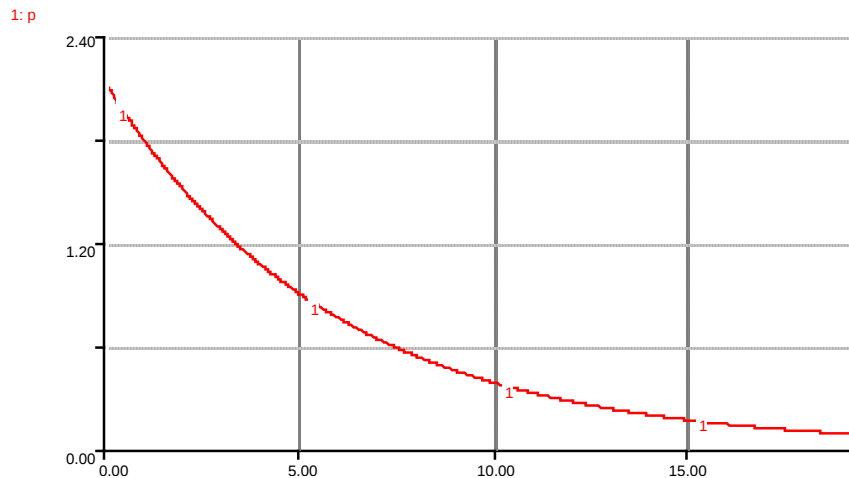
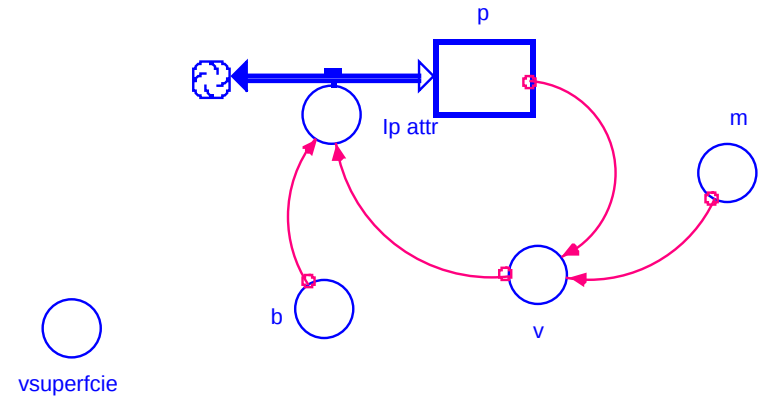
$$I_p_attr = -b*v$$

$$b = 0.12 \text{ \{N.sec/m\}}$$

$$m = 0.7 \text{ \{kg\}}$$

$$v = p/m$$

$$v_{\text{superficie}} = 0 \text{ \{m/sec\}}$$



1.4 raffreddamento di un corpo omogeneo: aspetti energetici - calorimetria

$$U1(t) = U1(t - dt) + (- IE) * dt$$

$$\text{INIT } U1 = U1_{\text{in}}$$

OUTFLOWS:

$$IE = \text{deltaT} / R_{\text{termica}}$$

$$C1 = 38 \{J/^{\circ}C\}$$

$$\text{deltaT} = T1 - T_{\text{ambiente}}$$

$$R_{\text{termica}} = 2.5 \{^{\circ}C/W\}$$

$$T1 = U1 / C1$$

$$T1_{\text{in}} = 60 \{^{\circ}C\}$$

$$T_{\text{ambiente}} = 15 \{^{\circ}C\}$$

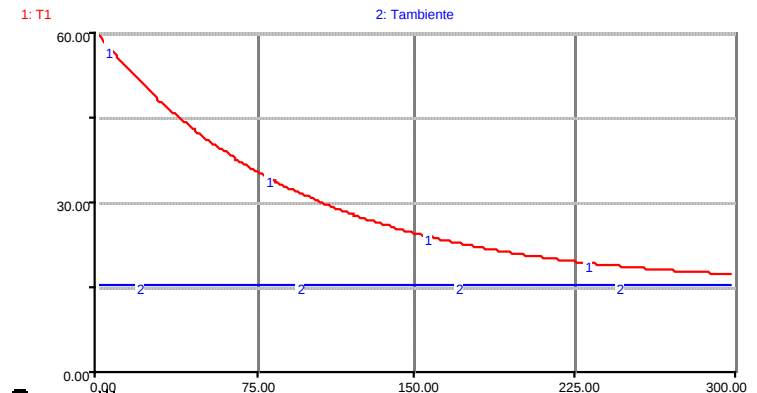
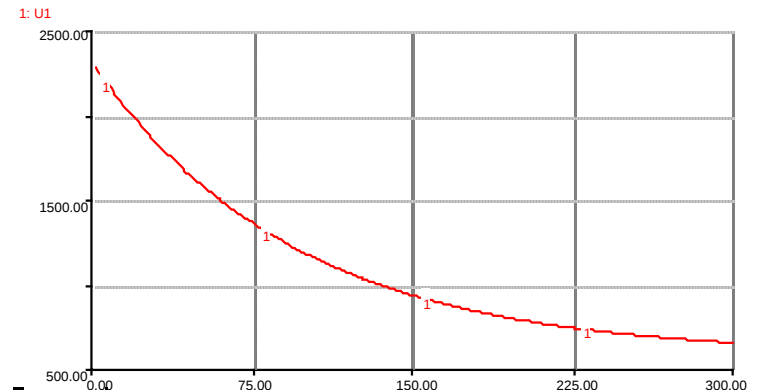
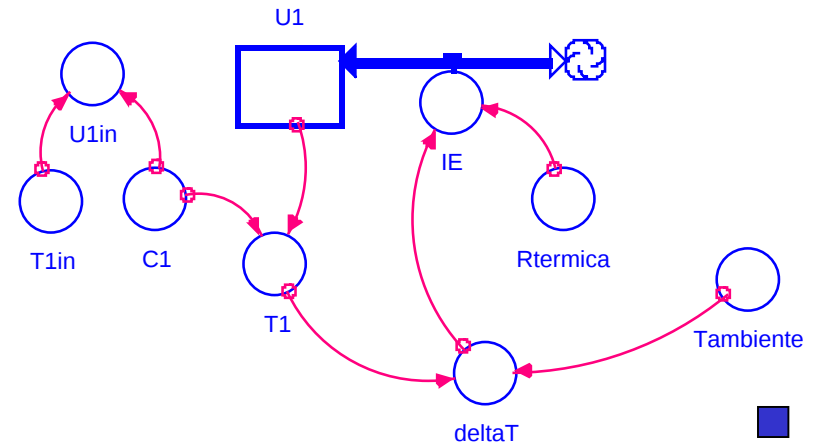
$$U1_{\text{in}} = C1 * T1_{\text{in}}$$

Osservazioni

1. Il corpo è considerato omogeneo; in particolare si assume che la temperatura abbia un unico valore per l'intero corpo ad ogni istante.

2. Si assume inoltre che la capacità termica sia costante (indipendente dalla temperatura) e che l'energia interna sia una funzione lineare della temperatura.

3. Si assume che gli scambi termici siano unicamente di tipo conduttivo; il flusso di calore viene allora "regolato" dalla resistenza termica, indicata qui con un valore numerico.



Dopo le analogie, ecco ... alcune differenze

Ovviamente i diversi campi della fisica presentano anche delle particolarità che li distinguono gli uni dagli altri: la modellizzazione con STELLA permette di darne conto senza modificare la struttura generale, ma adattando unicamente le singole leggi costitutive. Ecco alcuni esempi:

• idraulica	si può considerare una corrente NON laminare, l'effetto Bernoulli all'imboccatura del tubo e/o il fatto che il fluido in movimento può possedere un'inerzia non trascurabile
• elettricità	si può considerare il caso in cui una delle componenti sia caratterizzata da una proprietà dipendente dalle condizioni d'impiego (resistore NON ohmico; capacità non costante)
• meccanica	si possono considerare anche situazioni in cui viene raggiunto uno stato stazionario, come ad esempio nella caduta di un corpo in aria (con una forza d'attrito non necessariamente direttamente proporzionale alla velocità)
• termico	si possono considerare situazioni in cui la temperatura dei corpi NON viene considerata omogenea, o dove il calore specifico dipende dalla temperatura, oppure dove la diminuzione d'energia è causata dall'irraggiamento

2.1 svuotamento di un vaso provvisto di tubo alla base (II)

$$Itubo(t) = Itubo(t - dt) + (dItubodt) * dt$$

$$INIT Itubo = 0$$

INFLOWS:

$$dItubodt = -\Delta P_{ind} / Ltubo$$

$$VOLUME(t) = VOLUME(t - dt) + (I_v) * dt$$

$$INIT VOLUME = 5e-3 \{m^3\}$$

INFLOWS:

$$I_v = -Itubo$$

$$A_{tubo} = 22e-6 \{m^2\}$$

$$A_{vaso} = 2.5e-2 \{m^2\}$$

$$\Delta P_{bern} = -0.5 * veluscita^2 * densità$$

$$\Delta P_{diss} = -Itubo * Ridraulica$$

$$\Delta P_{ind} = -\Delta P_{vaso} - \Delta P_{diss} - \Delta P_{bern}$$

$$\Delta P_{vaso} = densità * g * h$$

$$densità = 0.78e3 \{kg/m^3\}$$

$$g = 9.81 \{m/sec^2\}$$

$$h = VOLUME / A_{vaso}$$

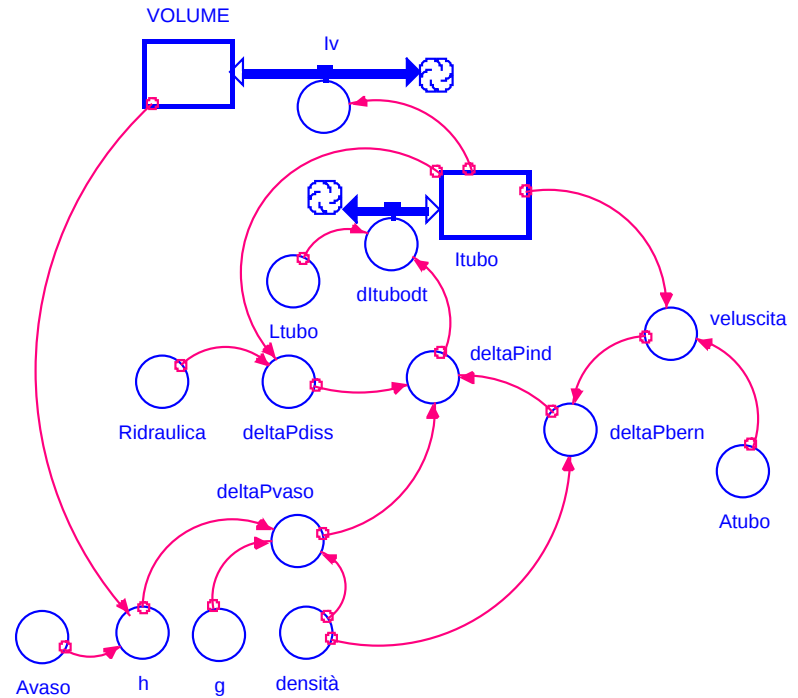
$$Ltubo = 2e9 \{kg/m^4\}$$

$$Ridraulica = 1.08e8 \{N.sec/m^5\}$$

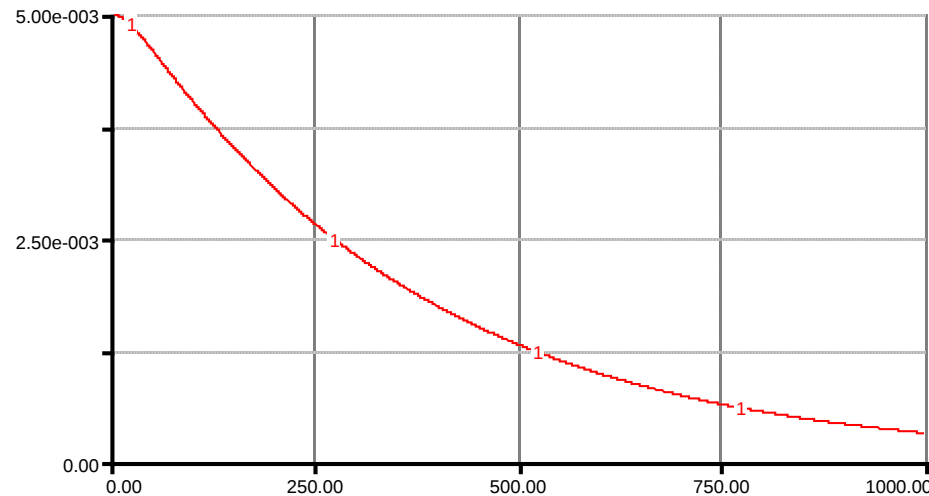
$$veluscita = Itubo / A_{tubo}$$

Il modello

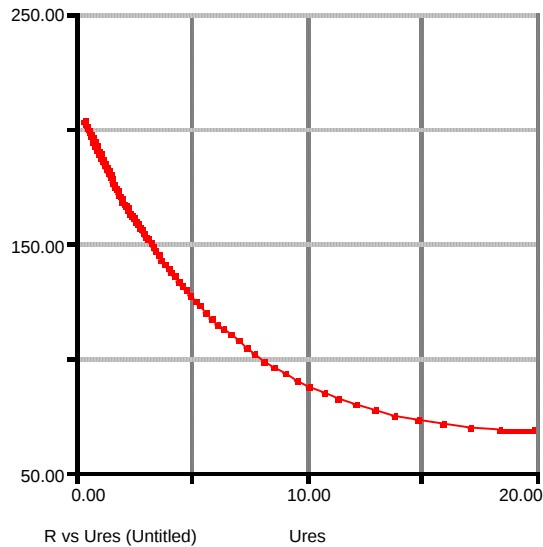
- 1) ipotizza un flusso laminare ($\Delta P = R \cdot I_v$)
- 2) tiene conto sia degli aspetti induttivi che dell'effetto Bernoulli nel passaggio cilindro-tubo!



1: VOLUME



2.2 scarica di un condensatore attraverso un resistore NON ohmico



$$Q_c(t) = Q_c(t - dt) + (dQ_c/dt) * dt$$

$$\text{INIT } Q_c = 2 \{C l_b\}$$

INFLOWS:

$$dQ_c/dt = -I_{res}$$

$$C = 0.1 \{F\}$$

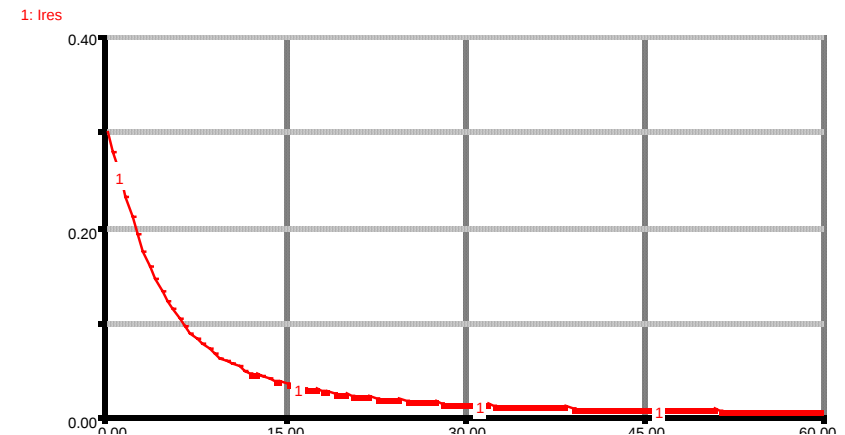
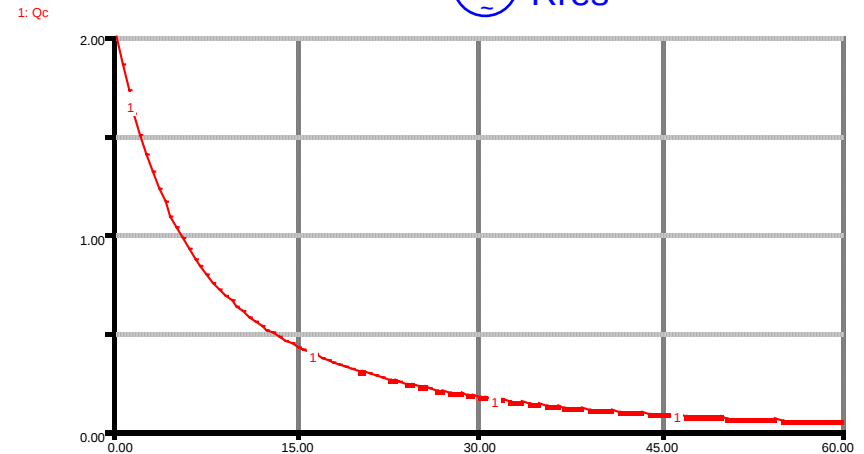
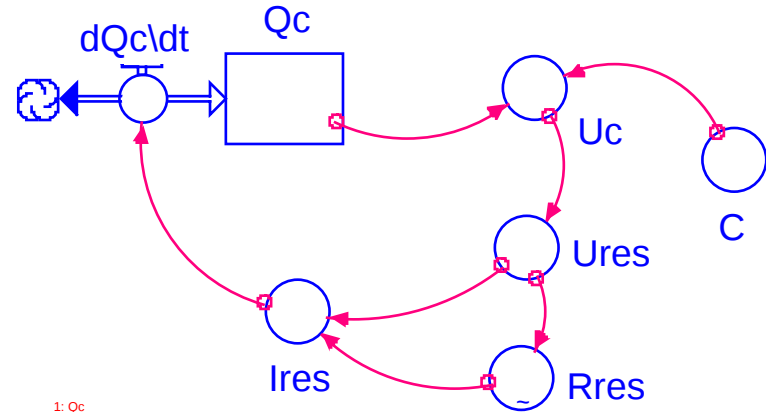
$$I_{res} = U_{res}/R_{res}$$

$$U_c = Q_c/C$$

$$U_{res} = U_c$$

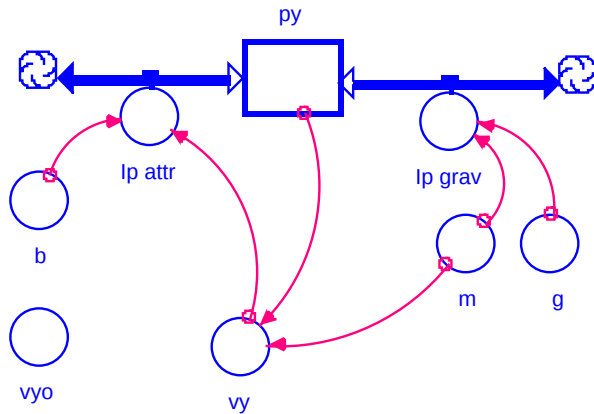
$$R_{res} = \text{GRAPH}(U_{res})$$

(0.00, 210), (2.00, 168), (4.00, 138), (6.00, 116),
 , (16.0, 70.5), (18.0, 67.5), (20.0, 67.5)



2.3 paracadutista

apertura del paracadute: a 800 m
sopra la superficie della Terra;
velocità verticale al momento
dell'apertura: 20 m/sec verso il basso.



$$py(t) = py(t - dt) + (Ip_attr + Ip_grav) * dt$$

INIT $py = m * vyo$

INFLOWS:

$$Ip_attr = -b * vy^2$$

$$Ip_grav = m * g$$

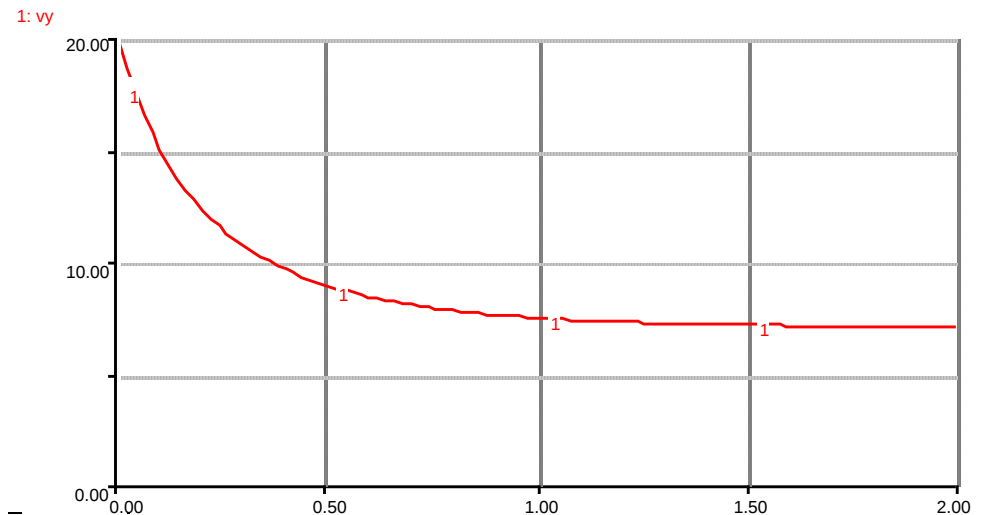
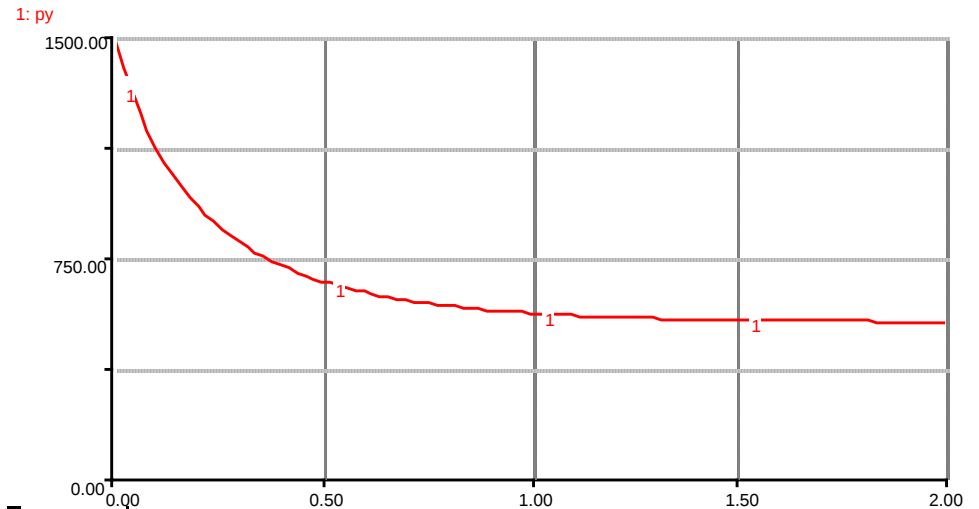
$$b = 15 \{N \cdot sec^2 / m^2\}$$

$$g = 9.81 \{m / sec^2\}$$

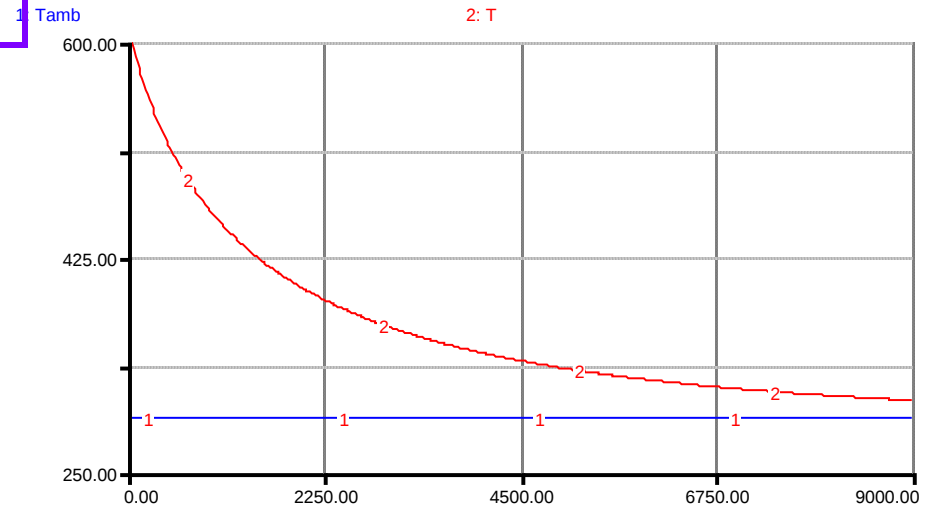
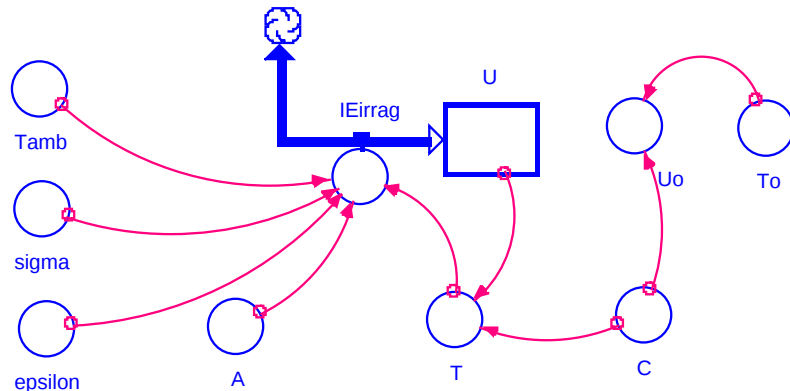
$$m = 75 \{kg\}$$

$$vy = py / m$$

$$vyo = 20 \{m / sec\}$$

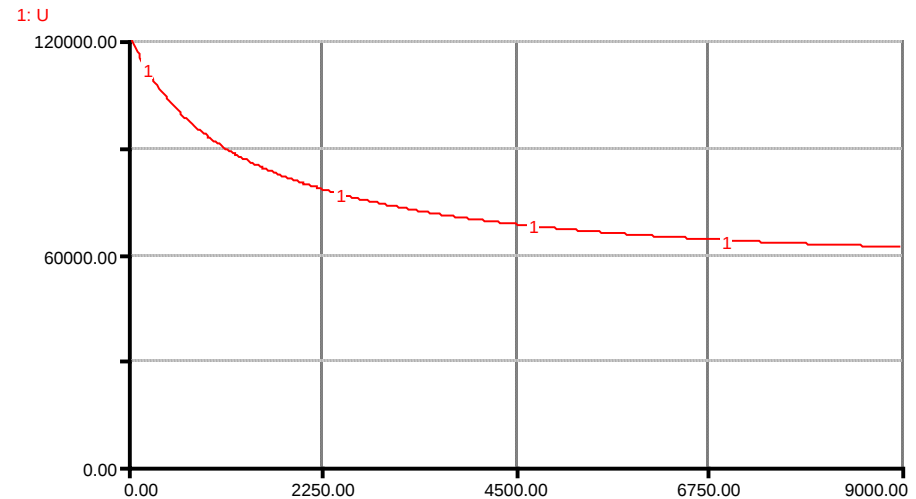


2.4 Raffreddamento di un corpo (posto in un ambiente a temperatura costante) per irraggiamento termico



$U(t) = U(t - dt) + (IEirrag) * dt$
 INIT $U = U_o$
 INFLOWS:
 $IEirrag = -A * \epsilon * \sigma * (T^4 - T_{amb}^4)$

$A = 0.01 \{m^2\}$
 $C = 200 \{J/^{\circ}K\}$
 $\epsilon = 0.8$
 $\sigma = 5.67e-8 \{W/(m^2 * K^4)\}$
 $T = U/C$
 $T_{amb} = 293 \{^{\circ}K\}$
 $T_o = 600 \{^{\circ}K\}$
 $U_o = C * T_o$



*Contatto tra due corpi, ossia interazione tra due sistemi
entrambi di “capacità finita”*

processo:	esempio:	cosa capita:
• idraulico	un vaso pieno di acqua viene messo in comunicazione con un secondo vaso inizialmente vuoto attraverso un tubicino inserito alla base	fino a che ai capi del tubicino vi è una differenza di pressione, vi è un trasferimento di acqua da un vaso all'altro
• elettrico	un condensatore inizialmente carico viene messo in comunicazione con un secondo condensatore in inizialmente scarico attraverso un resistore	fino a che ai capi del resistore vi è una differenza di potenziale elettrico, vi è un trasferimento di carica elettrica da un condensatore all'altro
• meccanico	un corpo in moto su di una superficie orizzontale di un secondo corpo viene arrestato da una forza d'attrito	fino a che tra le superfici dei due oggetti vi è una differenza di velocità, vi è un trasferimento di impulso da un oggetto all'altro
• termico	un corpo “caldo” viene messo in contatto con un secondo corpo “freddo” attraverso un “contatto termico”	fino a che tra i due oggetti vi è una differenza di temperatura, vi è un trasferimento di entropia dal corpo caldo a quello freddo

3.1 vasi comunicanti attraverso un tubo alla base (flusso laminare)

$$\text{Volume1}(t) = \text{Volume1}(t - dt) + (-Iv_tubo) * dt$$

$$\text{INIT Volume1} = V1in$$

OUTFLOWS:

$$Iv_tubo = \text{deltaPtubo} / \text{Ridraulica}$$

$$\text{Volume2}(t) = \text{Volume2}(t - dt) + (Iv_tubo) * dt$$

$$\text{INIT Volume2} = V2in$$

INFLOWS:

$$Iv_tubo = \text{deltaPtubo} / \text{Ridraulica}$$

$$\text{area1} = 2.5e-2 \{m^2\}$$

$$\text{area2} = 2.5e-2 \{m^2\}$$

$$C1 = \text{area1} / (\text{densità} * g)$$

$$C2 = \text{area2} / (\text{densità} * g)$$

$$\text{deltaPtubo} = Pvaso1 - Pvaso2$$

$$\text{densità} = 1e3 \{kg/m^3\}$$

$$g = 9.81 \{m/sec^2\}$$

$$\text{livello1} = \text{Volume1} / \text{area1}$$

$$\text{livello1in} = 0.20 \{m\}$$

$$\text{livello2} = \text{Volume2} / \text{area2}$$

$$\text{livello2in} = 0 \{m\}$$

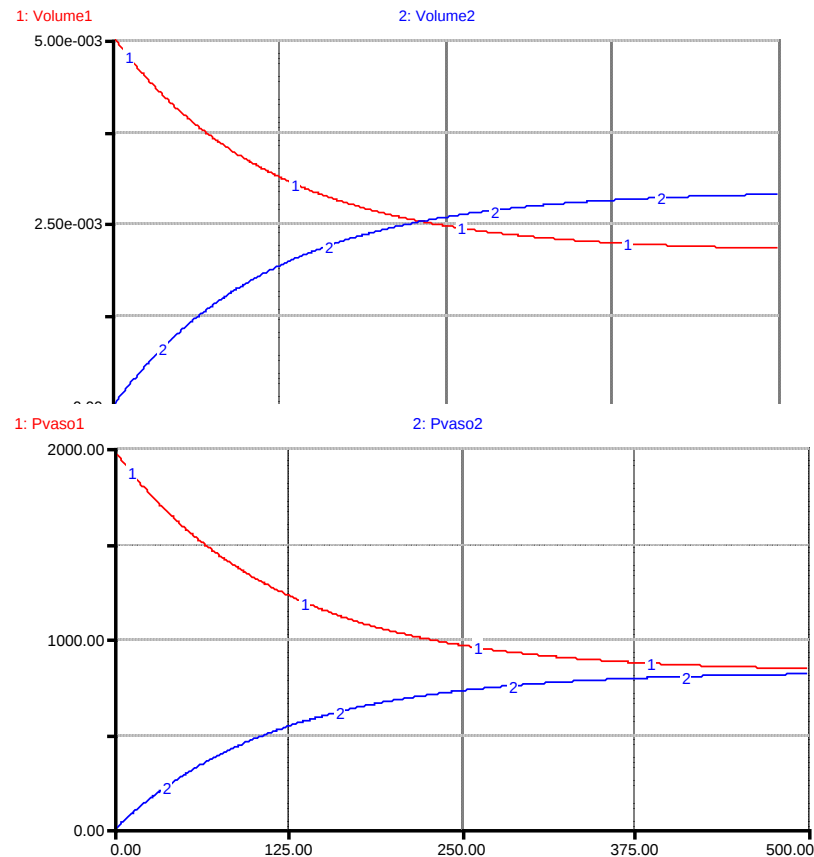
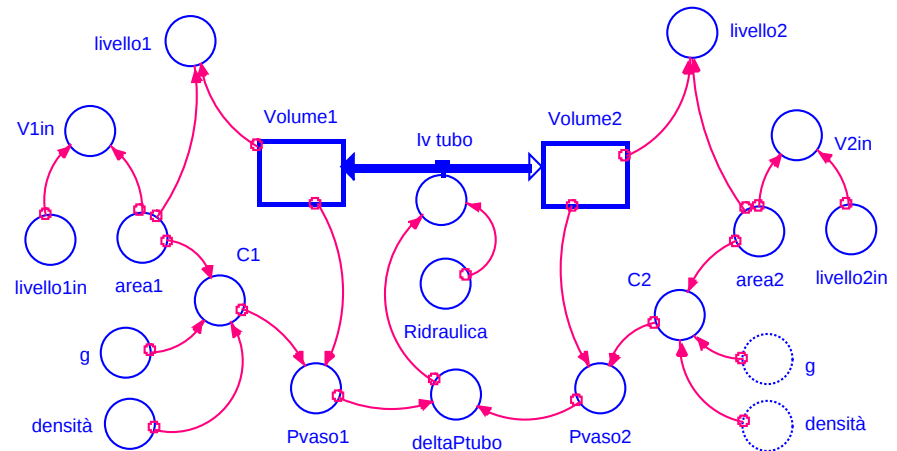
$$Pvaso1 = \text{Volume1} / C1$$

$$Pvaso2 = \text{Volume2} / C2$$

$$\text{Ridraulica} = 0.8e8 \{N.sec/m^5\}$$

$$V1in = \text{livello1in} * \text{area1}$$

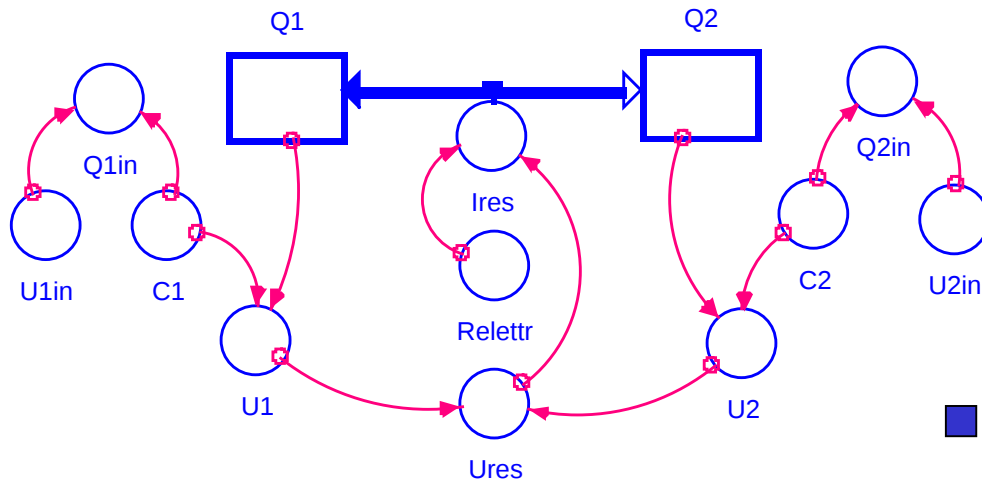
$$V2in = \text{livello2in} * \text{area2}$$



Il modello

- 1) ipotizza un flusso laminare ($\text{deltaP} = R \cdot Iv$)
- 2) NON tiene conto né degli aspetti induttivi né dell'effetto Bernoulli nel passaggio cilindro-tubo!

3.2 condensatore inizialmente carico
collegato attraverso un resistore ad un
secondo condensatore, inizialmente scarico



$$Q1(t) = Q1(t - dt) + (- Ires) * dt$$

$$INIT Q1 = Q1in$$

OUTFLOWS:

$$Ires = Ures/Reletr$$

$$Q2(t) = Q2(t - dt) + (Ires) * dt$$

$$INIT Q2 = Q2in$$

INFLOWS:

$$Ires = Ures/Reletr$$

$$C1 = 0.1 \{F\}$$

$$C2 = 0.2 \{F\}$$

$$Q1in = U1in * C1$$

$$Q2in = C2 * U2in$$

$$Reletr = 100 \{Ohm\}$$

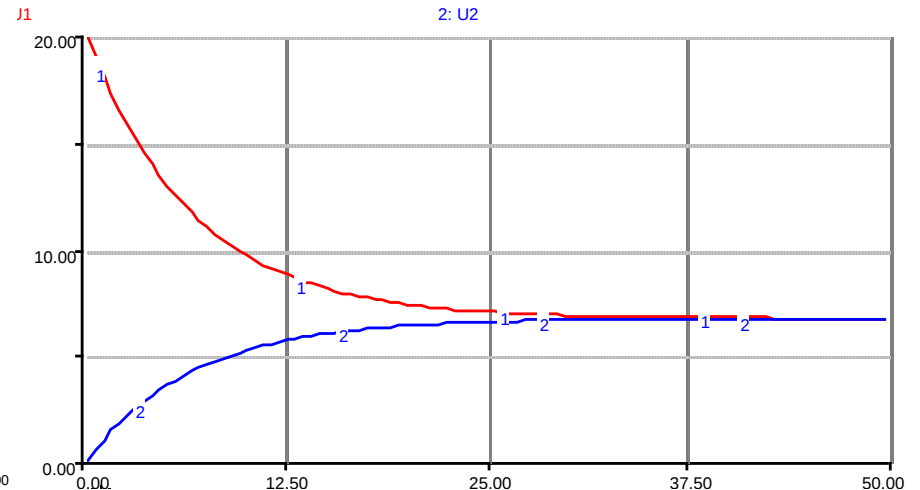
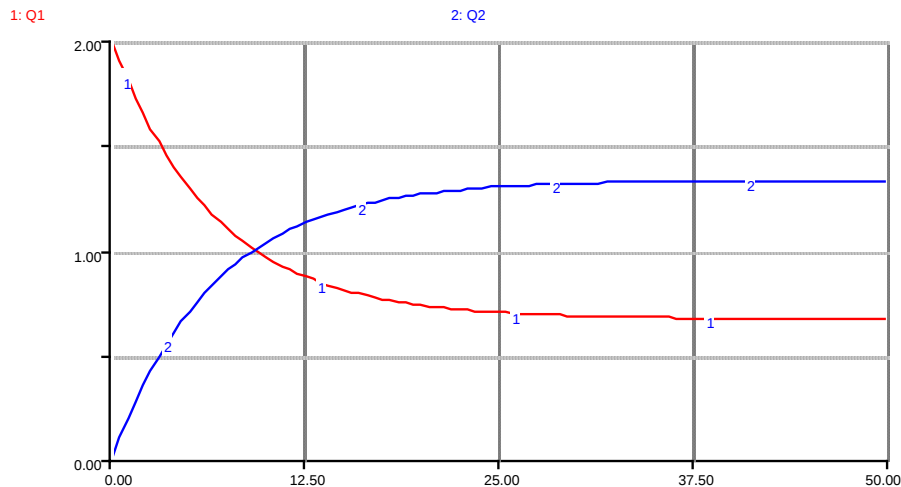
$$U1 = Q1/C1$$

$$U1in = 20 \{V\}$$

$$U2 = Q2/C2$$

$$U2in = 0 \{V\}$$

$$Ures = U1 - U2$$



3.3 modello di "urto anelastico"

$$p1(t) = p1(t - dt) + (Ip) * dt$$

$$\text{INIT } p1 = m1 * v1o$$

INFLOWS:

$$Ip = -b * v_rel$$

$$p2(t) = p2(t - dt) + (- Ip) * dt$$

$$\text{INIT } p2 = m2 * v2o$$

OUTFLOWS:

$$Ip = -b * v_rel$$

$$b = 0.3 \text{ \{N.sec/m\}}$$

$$m1 = 1.5 \text{ \{kg\}}$$

$$m2 = 0.8 \text{ \{kg\}}$$

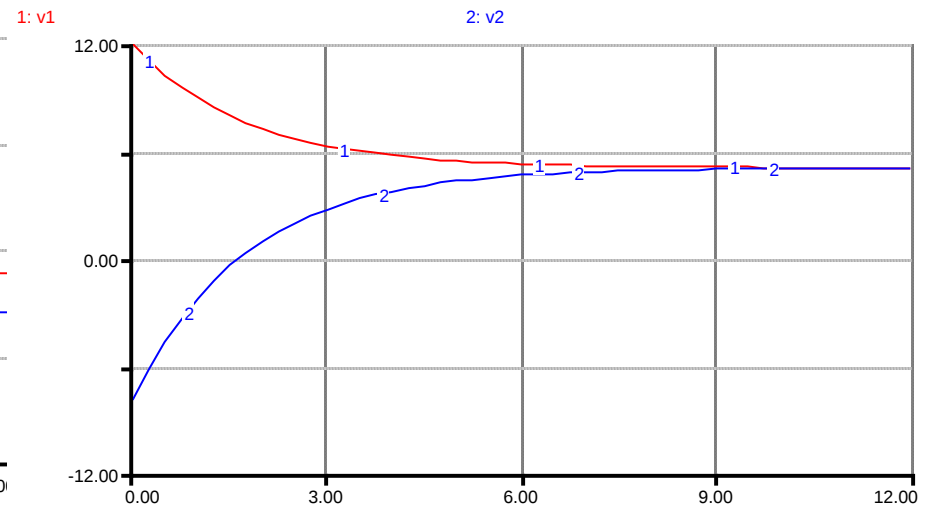
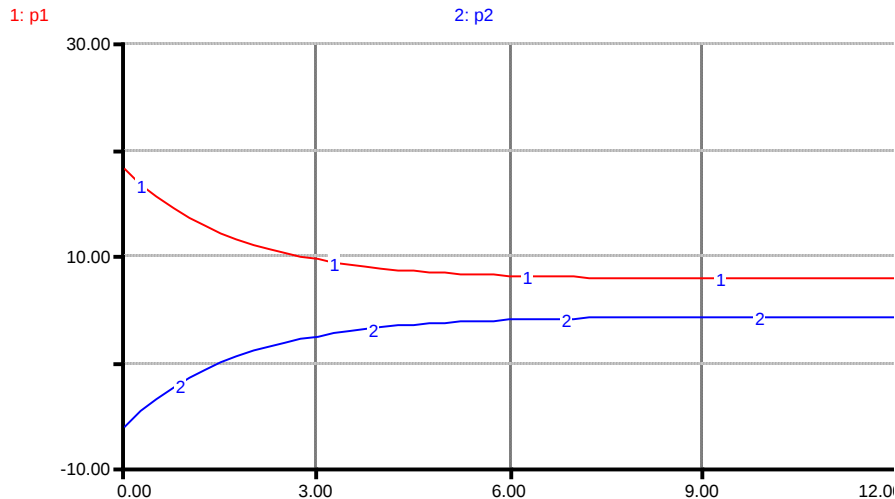
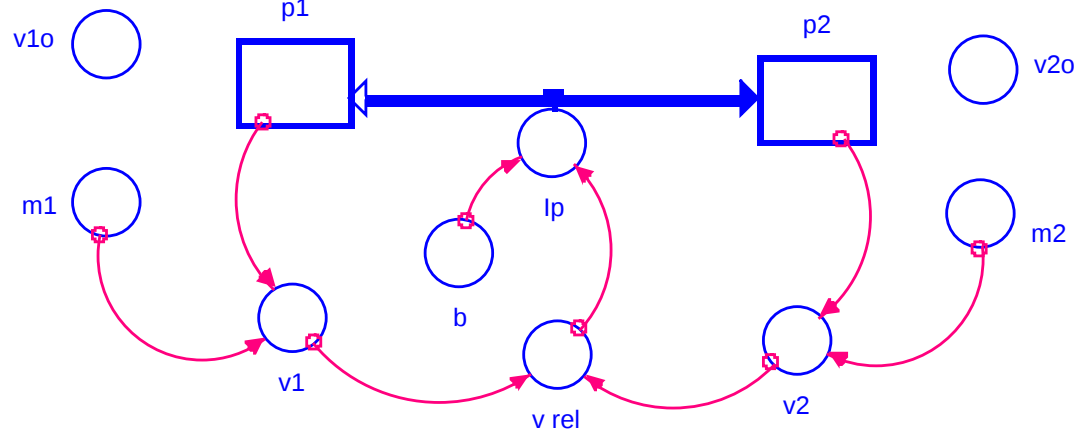
$$v1 = p1/m1$$

$$v1o = 12 \text{ \{m/sec\}}$$

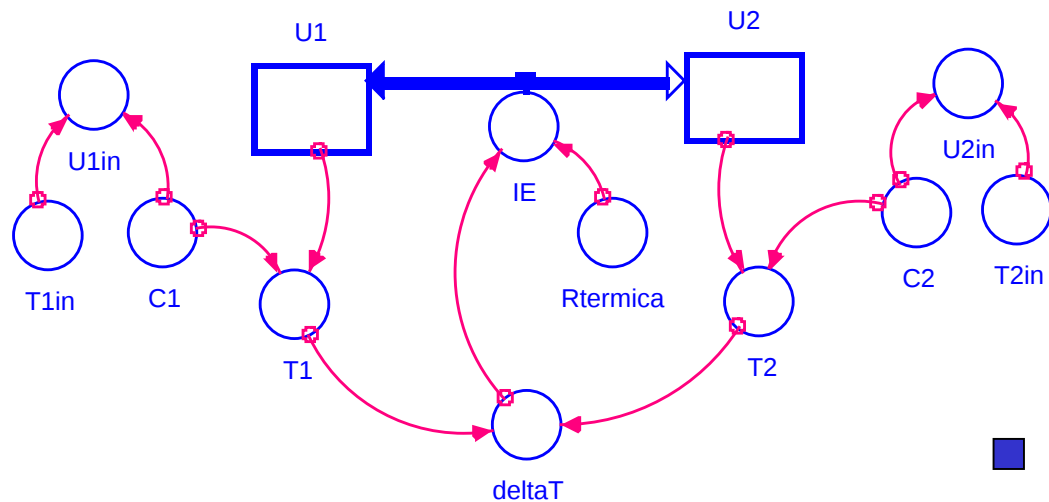
$$v2 = p2/m2$$

$$v2o = -8 \text{ \{m/sec\}}$$

$$v_rel = v1 - v2$$



3.4 contatto termico tra due corpi omogenei: aspetti energetici - calorimetria



$$U1(t) = U1(t - dt) + (- IE) * dt$$

$$\text{INIT } U1 = U1_{\text{in}}$$

OUTFLOWS:

$$IE = \text{deltaT} / R_{\text{termica}}$$

$$U2(t) = U2(t - dt) + (IE) * dt$$

$$\text{INIT } U2 = U2_{\text{in}}$$

INFLOWS:

$$IE = \text{deltaT} / R_{\text{termica}}$$

$$C1 = 38 \{J/^{\circ}C\}$$

$$C2 = 32 \{J/^{\circ}C\}$$

$$\text{deltaT} = T1 - T2$$

$$R_{\text{termica}} = 2.5 \{^{\circ}C/W\}$$

$$T1 = U1 / C1$$

$$T1_{\text{in}} = 60 \{^{\circ}C\}$$

$$T2 = U2 / C2$$

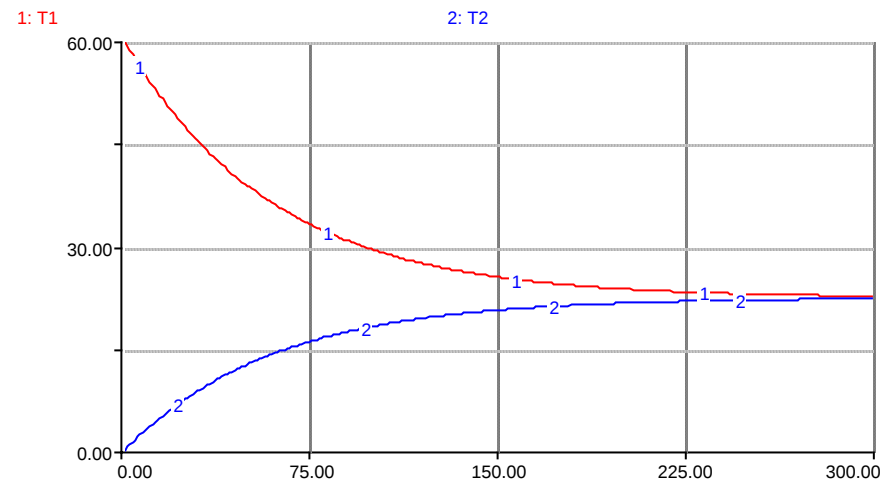
$$T2_{\text{in}} = 0 \{^{\circ}C\}$$

$$U1_{\text{in}} = C1 * T1_{\text{in}}$$

$$U2_{\text{in}} = C2 * T2_{\text{in}}$$

Osservazioni

1. I due corpi sono considerati omogenei; in particolare per ciascuno di essi si assume che la temperatura abbia costantemente un unico valore.
2. Si assume inoltre che la capacità termica dei corpi sia costante (indipendente dalla temperatura) e che l'energia interna sia una funzione lineare della temperatura.
3. Il flusso di calore tra i due corpi viene "regolato" dalla resistenza termica, qui indicata un valore numerico; può ovviamente essere ricavata dalle caratteristiche dei corpi a contatto.



$$\Delta S_1(t) = \Delta S_1(t - \Delta t) + (-IS_1) * \Delta t$$

$$\text{INIT } \Delta S_1 = 0$$

OUTFLOWS:

$$IS_1 = G_s * \Delta T$$

$$\Delta S_2(t) = \Delta S_2(t - \Delta t) + (-IS_2) * \Delta t$$

$$\text{INIT } \Delta S_2 = 0$$

OUTFLOWS:

$$IS_2 = -(IS_1 + IS_{\text{prod}})$$

$$\Delta S_{\text{supcont}}(t) = \Delta S_{\text{supcont}}(t - \Delta t) + (IS_1 + IS_{\text{prod}} + IS_2) * \Delta t$$

$$\text{INIT } \Delta S_{\text{supcont}} = \Delta T_1 / \Delta t + \Delta T_2 / \Delta t + IS_1$$

INFLOWS:

$$IS_1 = G_s * \Delta T$$

$$IS_{\text{prod}} = IS_1 * \Delta T / T_2$$

$$IS_2 = -(IS_1 + IS_{\text{prod}})$$

$$T_1(t) = T_1(t - \Delta t) + (\Delta T_1 / \Delta t) * \Delta t$$

$$\text{INIT } T_1 = T_{1\text{in}}$$

INFLOWS:

$$\Delta T_1 / \Delta t = \Delta S_1 / \Delta t / C_{s1}$$

$$T_2(t) = T_2(t - \Delta t) + (\Delta T_2 / \Delta t) * \Delta t$$

$$\text{INIT } T_2 = T_{2\text{in}}$$

INFLOWS:

$$\Delta T_2 / \Delta t = \Delta S_2 / \Delta t / C_{s2}$$

$$CE_1 = 38 \{J/^{\circ}K\}$$

$$CE_2 = 64 \{J/^{\circ}K\}$$

$$C_{s1} = CE_1 / T_1$$

$$C_{s2} = CE_2 / T_2$$

$$\Delta T = T_1 - T_2$$

$$\Delta S_1 / \Delta t = -IS_1$$

$$\Delta S_2 / \Delta t = -IS_2$$

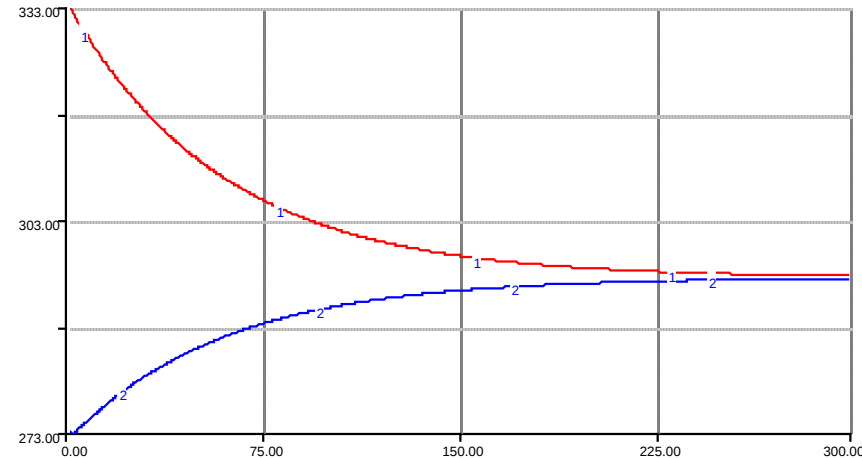
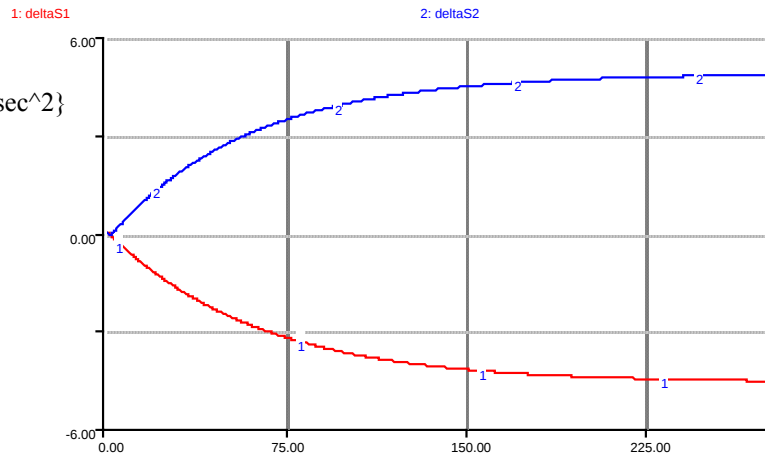
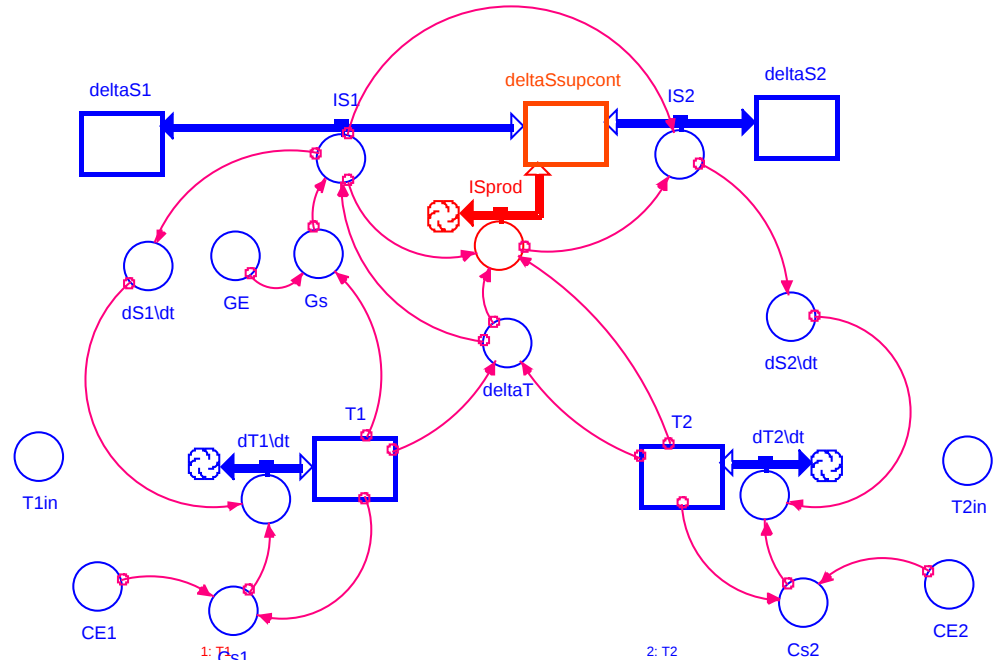
$$GE = 0.4 \{J/^{\circ}K * \text{sec}^2\}$$

$$G_s = GE / T_1$$

$$T_{1\text{in}} = 333 \{^{\circ}K\}$$

$$T_{2\text{in}} = 273 \{^{\circ}K\}$$

3.4bis contatto termico bilancio dell'entropia e aspetti energetici



2 – Dalla termostatica alla dinamica del calore

Obiettivo

costruire una traccia per la modellizzazione di processi termodinamici, in particolare superando il tradizionale approccio in cui *sin dall'inizio* si considerano unicamente “soluzioni”, ossia ci si colloca all'interno di una delle trasformazioni “standard” conosciute.

Nella *prima parte* elaboreremo alcuni modelli basati sulle proprietà del gas ideale (equazione di stato, energia interna), mentre nella *seconda parte* verrà sviluppato un approccio più genuinamente termodinamico (entropia).

Prima parte: come modellizzare le trasformazioni termodinamiche del gas ideale?

Consideriamo trasformazioni di una certa quantità di gas ideale, racchiuso in un cilindro munito di pistone mobile, per diverse condizioni degli scambi termici:

equazione di stato
del gas ideale

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

energia interna

$$U_{gas} = n \cdot c_v \cdot T$$

Per descrivere l'evoluzione nel tempo del processo possiamo considerare le relazioni “istantanee”:

$$P \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{dP}{dt} \cdot V = n \cdot R \cdot \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dU_{gas}}{dt} = n \cdot c_v \cdot \frac{dT}{dt}$$

nonché la corrispondente forma del *primo principio della termodinamica* (conservazione dell'energia):

$$\frac{dU_{gas}}{dt} = I_{E,mecc} + I_{E,term}$$

Esempio 1

Una certa quantità di gas (ideale) è racchiusa in un recipiente cilindrico, munito di pistone mobile e **perfettamente isolato termicamente**; il pistone viene mosso in modo da fornire al gas una potenza meccanica costante.

Si tratta quindi di una compressione adiabatica.

Condizioni iniziali: $T_o = 293 \text{ K}$, $V_o = 100 \text{ cm}^3$, $P_o = 0,98 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Tipo di gas: $\gamma = c_p/c_v = 1,40$ e quindi $c_v = R/(\gamma-1)$

Scambi energetici: $I_{E,mecc} = 5,0 \text{ W} = \text{cost}$

$$I_{E,term} = 0$$

Idee-guida per la modellizzazione:

- 1) Le condizioni iniziali permettono di determinare la quantità (n) di gas racchiusa nel pistone;
- 2) la potenza meccanica fornita determina istante per istante l'aumento dell'energia interna e quindi la variazione della temperatura;
- 3) d'altra parte essa determina anche, assieme al valore della pressione, la variazione istantanea del volume;
- 4) quindi, con la relazione è possibile determinare anche la variazione istantanea della pressione.
- 5) È così determinata la nuova situazione termodinamica del gas.

$$P_{\text{gas}}(t) = P_{\text{gas}}(t - dt) + (dP/dt) * dt$$

$$\text{INIT } P_{\text{gas}} = P_o$$

INFLOWS:

$$dP/dt = (n * R * dT/dt - P_{\text{gas}} * dV/dt) / V_{\text{gas}}$$

$$T_{\text{gas}}(t) = T_{\text{gas}}(t - dt) + (dT/dt) * dt$$

$$\text{INIT } T_{\text{gas}} = T_o$$

INFLOWS:

$$dT/dt = dU_{\text{gas}}/dt / (cv * n)$$

$$U_{\text{gas}}(t) = U_{\text{gas}}(t - dt) + (dU_{\text{gas}}/dt) * dt$$

$$\text{INIT } U_{\text{gas}} = n * cv * T_o$$

INFLOWS:

➔ $dU_{\text{gas}}/dt = I_{\text{emecc}}$

$$V_{\text{gas}}(t) = V_{\text{gas}}(t - dt) + (dV/dt) * dt$$

$$\text{INIT } V_{\text{gas}} = V_o$$

INFLOWS:

$$dV/dt = -I_{\text{emecc}} / P_{\text{gas}}$$

$$cv = R / (\gamma - 1)$$

$$\gamma = 1.4$$

$$I_{\text{emecc}} = 5 \text{ \{W\}}$$

$$\ln P/P_o = \text{LOGN}(P_{\text{gas}}/P_o)$$

$$\ln V/V_o = \text{LOGN}(V_{\text{gas}}/V_o)$$

$$n = P_o * V_o / (R * T_o)$$

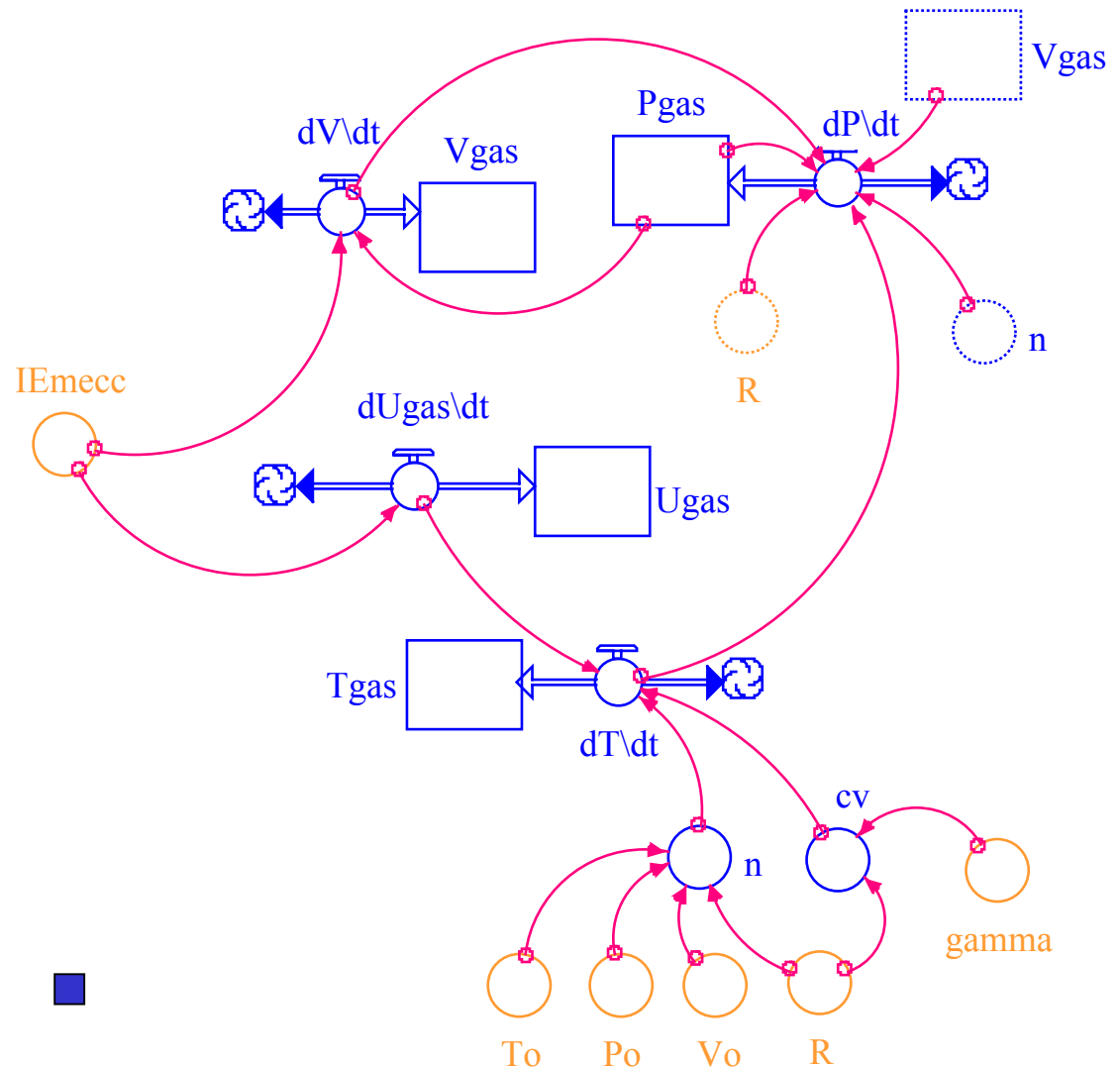
$$P_o = 0.98e5 \text{ \{Pa\}}$$

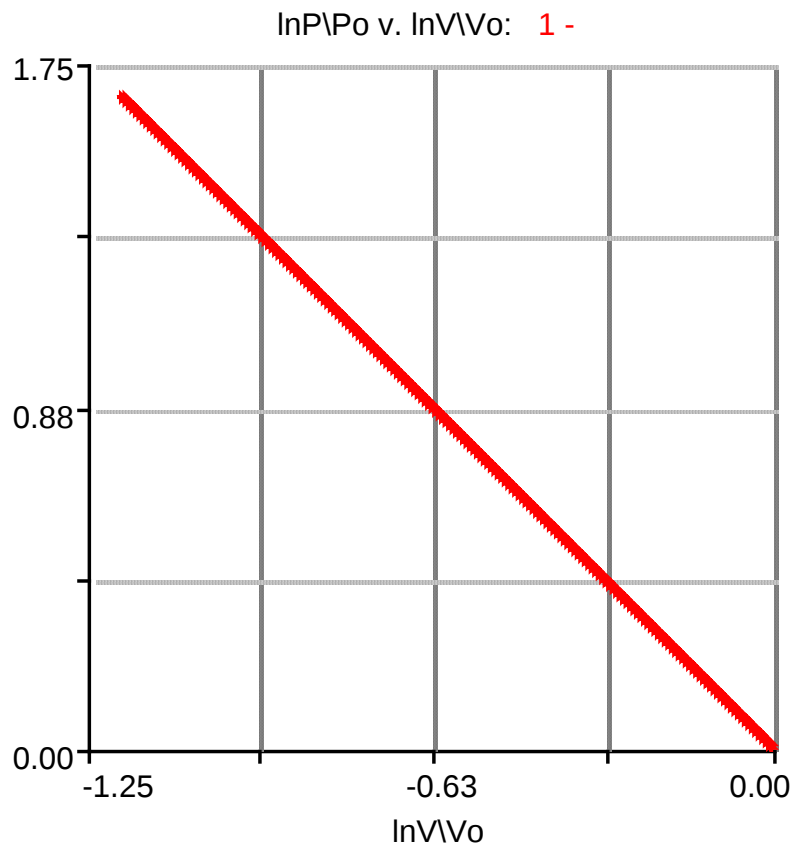
$$R = 8.31 \text{ \{J/(K.mol)\}}$$

$$T_o = 293 \text{ \{K\}}$$

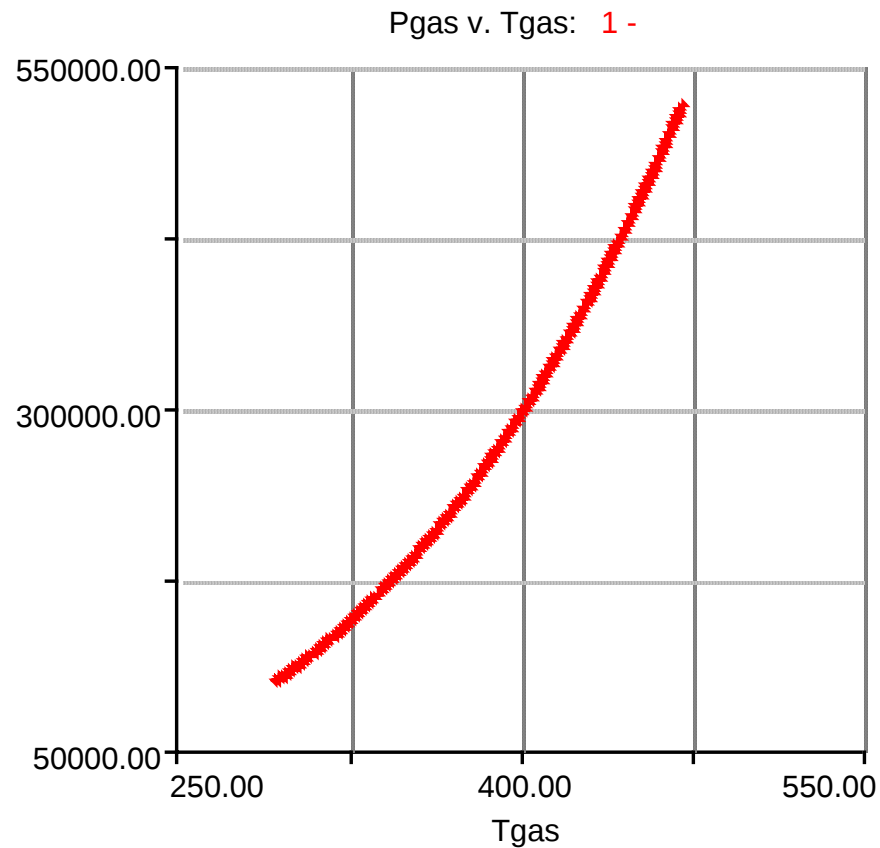
$$V_o = 100e-6 \text{ \{m}^3\}$$

Trasformazioni termodinamiche del gas ideale:
compressione adiabatica nella rappresentazione con l'energia





Pendenza $-\gamma$
ossia $P.V^\gamma = \text{cost}$



Esempio 2

Una certa quantità di gas (ideale) è racchiusa in un recipiente cilindrico, munito di pistone mobile, con **pareti perfettamente conduttrici** e posto in contatto termico con un serbatoio alla temperatura T_o ; il pistone viene mosso in modo da fornire al gas una potenza meccanica costante. Si tratta quindi di una **compressione isoterma**.

Condizioni iniziali: $T_o = 293 \text{ K}$, $V_o = 100 \text{ cm}^3$, $P_o = 0,98 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Tipo di gas: $\gamma = c_p/c_v = 1,40$ e quindi $c_v = R/(\gamma-1)$

Scambi energetici: $I_{E,mecc} = 5,0 \text{ W} = \text{cost}$

$$I_{E,term} = - I_{E,mecc}$$

Idee-guida per la modellizzazione

- 1) Come per il modello precedente, ma...
- 2) ... con un **contatto termico** tra gas e serbatoio modellizzato con una relazione del tipo

$$I_{E,term} = -\lambda \cdot (T_{gas} - T_0)$$

dove il coefficiente di **conducibilità termica** λ deve essere scelto in modo da garantire un accoppiamento termico “ideale” tra il gas e il serbatoio a temperatura T_0 .

Trasformazioni termodinamiche del gas ideale: compressione isoterma nella rappresentazione con l'energia

$$P_{\text{gas}}(t) = P_{\text{gas}}(t - dt) + (dP/dt) * dt$$

$$\text{INIT } P_{\text{gas}} = P_o$$

INFLOWS:

$$dP/dt = (n * R * dT/dt - P_{\text{gas}} * dV/dt) / V_{\text{gas}}$$

$$T_{\text{gas}}(t) = T_{\text{gas}}(t - dt) + (dT/dt) * dt$$

$$\text{INIT } T_{\text{gas}} = T_o$$

INFLOWS:

$$dT/dt = dU_{\text{gas}}/dt / (c_v * n)$$

$$U_{\text{gas}}(t) = U_{\text{gas}}(t - dt) + (dU_{\text{gas}}/dt) * dt$$

$$\text{INIT } U_{\text{gas}} = n * c_v * T_o$$

INFLOWS:

$$dU_{\text{gas}}/dt = I_{\text{Emecc}} + I_{\text{Term}}$$

$$V_{\text{gas}}(t) = V_{\text{gas}}(t - dt) + (dV/dt) * dt$$

$$\text{INIT } V_{\text{gas}} = V_o$$

INFLOWS:

$$dV/dt = -I_{\text{Emecc}} / P_{\text{gas}}$$

$$\text{coeff} = 10 \text{ \{W/K\}}$$

$$c_v = R / (\gamma - 1)$$

$$\gamma = 1.4$$

$$I_{\text{Emecc}} = 5 \text{ \{W\}}$$

$$I_{\text{Term}} = -\text{coeff} * (T_{\text{gas}} - T_{\text{serbatoio}})$$

$$n = P_o * V_o / (R * T_o)$$

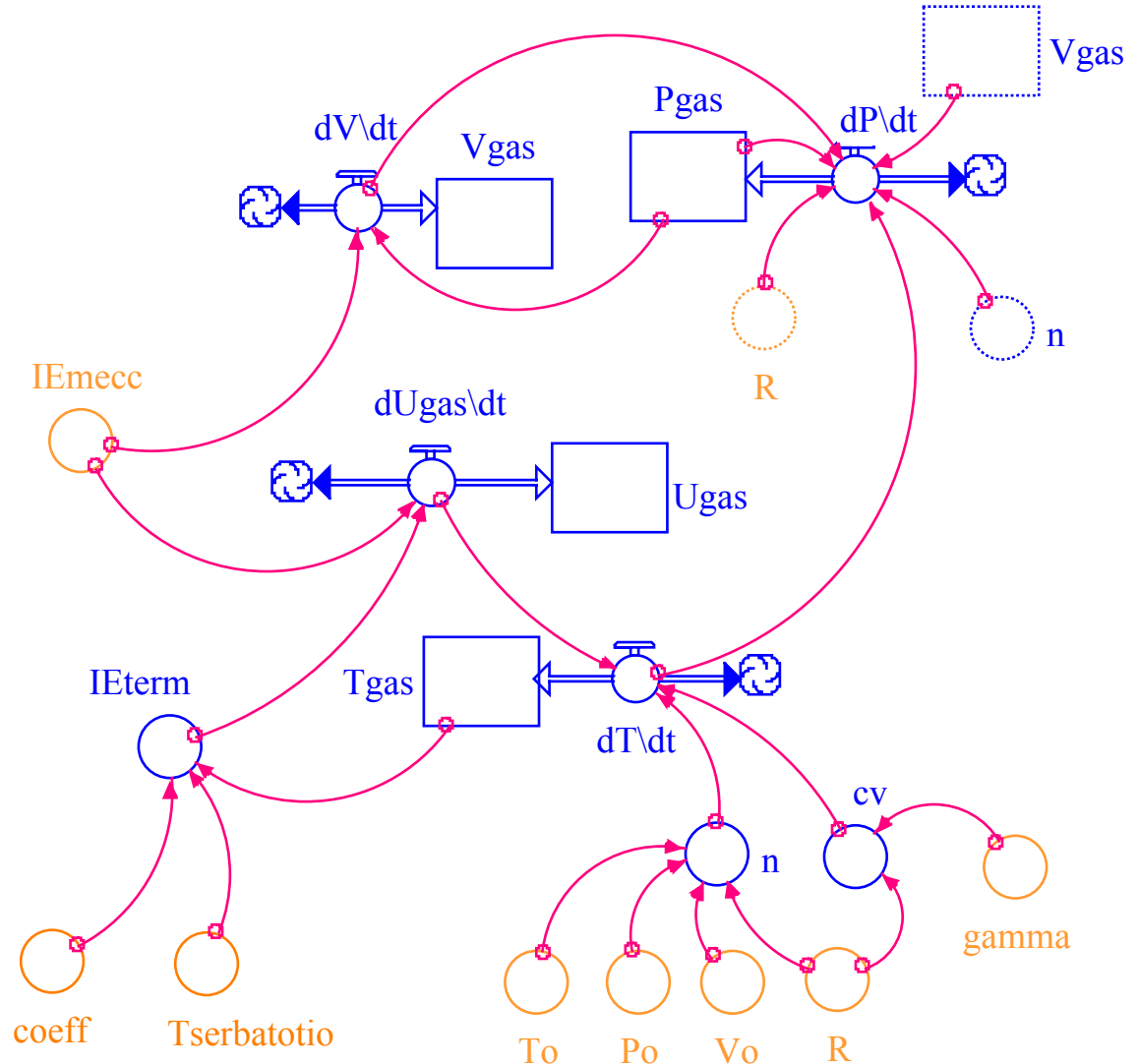
$$P_o = 0.98e5 \text{ \{Pa\}}$$

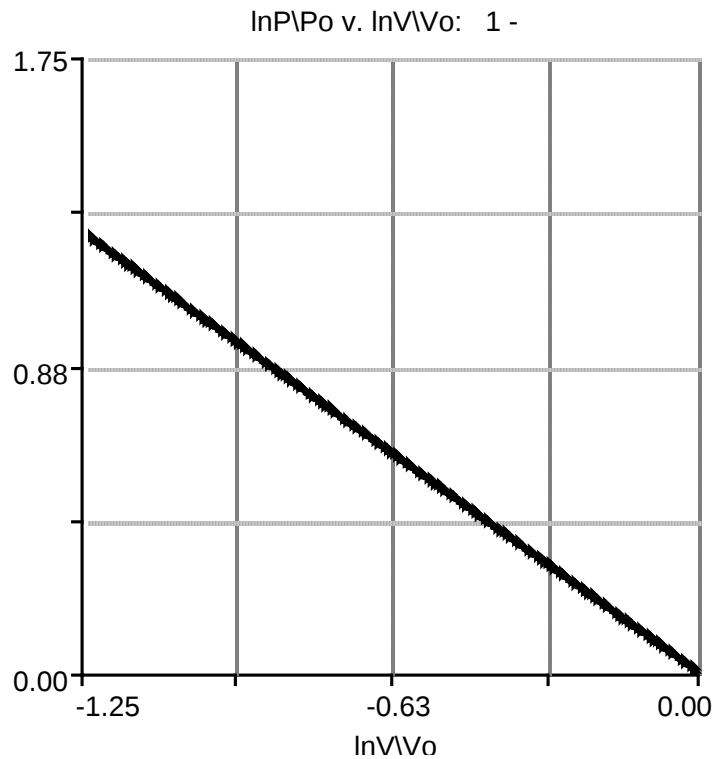
$$R = 8.31 \text{ \{J/(K.mol)\}}$$

$$T_o = 293 \text{ \{K\}}$$

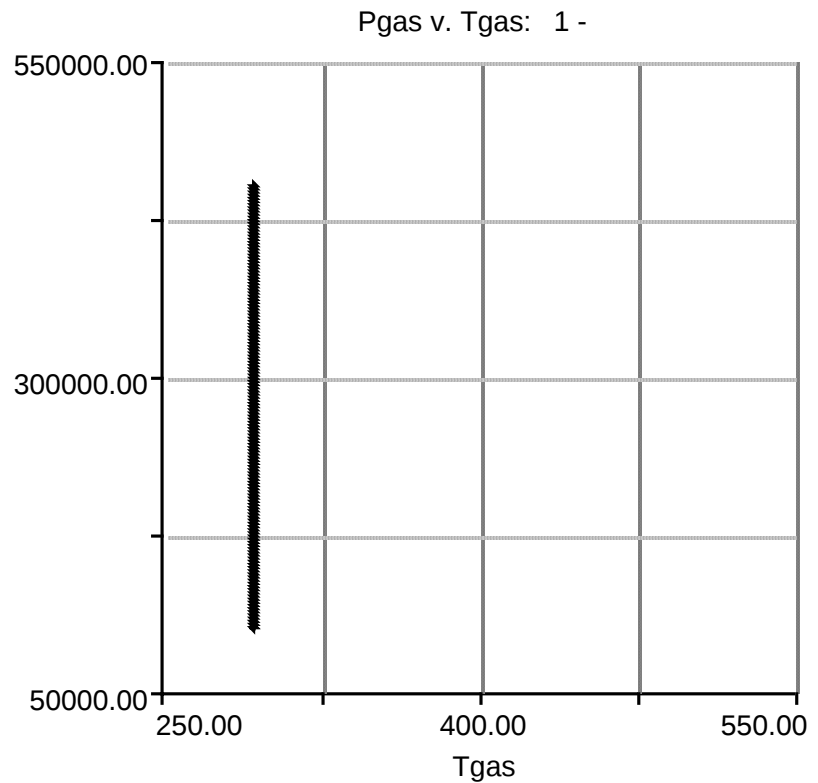
$$T_{\text{serbatoio}} = 293 \text{ \{K\}}$$

$$V_o = 100e-6 \text{ \{m}^3\}$$





Pendenza -1 ossia
 $P \cdot V = \text{cost}$
 legge di Boyle



Temperatura costante

Esempio 3

Caso generale, con **accoppiamento termico “intermedio”**:

il **coefficiente di conducibilità termica λ** assume un valore intermedio tra quello che garantisce l'isolazione perfetta ($\lambda = 0$, trasformazione adiabatica) e quello che dà le condizioni di contatto termico ideale ($\lambda = \infty$, trasformazione isoterma).

Il modello viene predisposto in modo da mostrare l'evoluzione del processo per vari valori di λ .

$P_{\text{gas}}(t) = P_{\text{gas}}(t - dt) + (dP/dt) * dt$
 INIT $P_{\text{gas}} = P_o$
 INFLOWS:
 $dP/dt = (n * R * dT/dt - P_{\text{gas}} * dV/dt) / V_{\text{gas}}$

$T_{\text{gas}}(t) = T_{\text{gas}}(t - dt) + (dT/dt) * dt$
 INIT $T_{\text{gas}} = T_o$
 INFLOWS:
 $dT/dt = dU_{\text{gas}}/dt / (cv * n)$

$U_{\text{gas}}(t) = U_{\text{gas}}(t - dt) + (dU_{\text{gas}}/dt) * dt$
 INIT $U_{\text{gas}} = n * cv * T_o$
 INFLOWS:
 $dU_{\text{gas}}/dt = I_{\text{Emecc}} + I_{\text{Term}}$

$V_{\text{gas}}(t) = V_{\text{gas}}(t - dt) + (dV/dt) * dt$
 INIT $V_{\text{gas}} = V_o$
 INFLOWS:
 $dV/dt = -I_{\text{Emecc}} / P_{\text{gas}}$

coeff = diversi valori

$cv = R / (\gamma - 1)$

$\gamma = 1.4$

$I_{\text{Emecc}} = 5 \text{ {W}}$

$I_{\text{Term}} = -\text{coeff} * (T_{\text{gas}} - T_{\text{serbatoio}})$

$n = P_o * V_o / (R * T_o)$

$P_o = 0.98e5 \text{ {Pa}}$

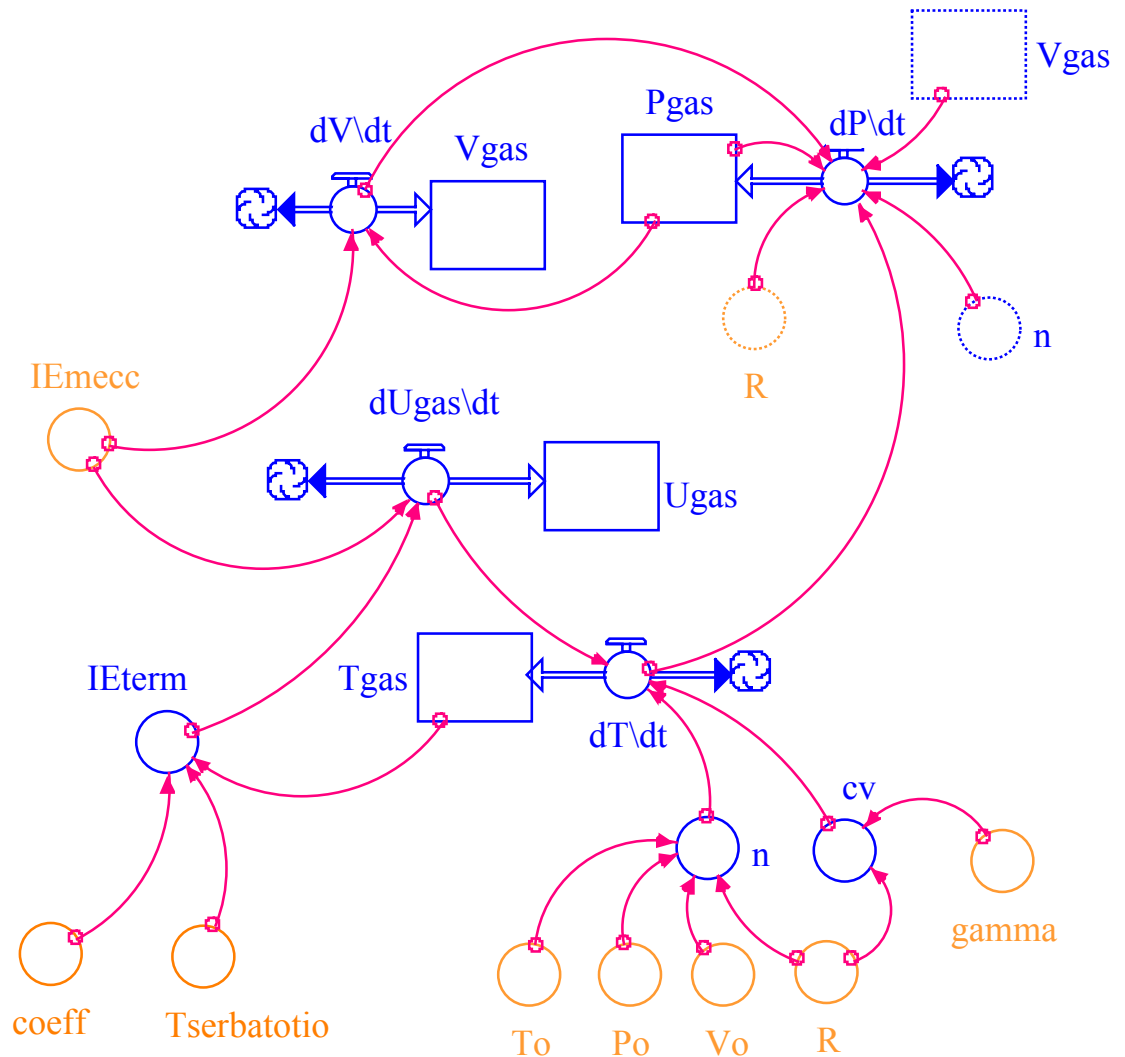
$R = 8.31 \text{ {J/(K.mol)}}$

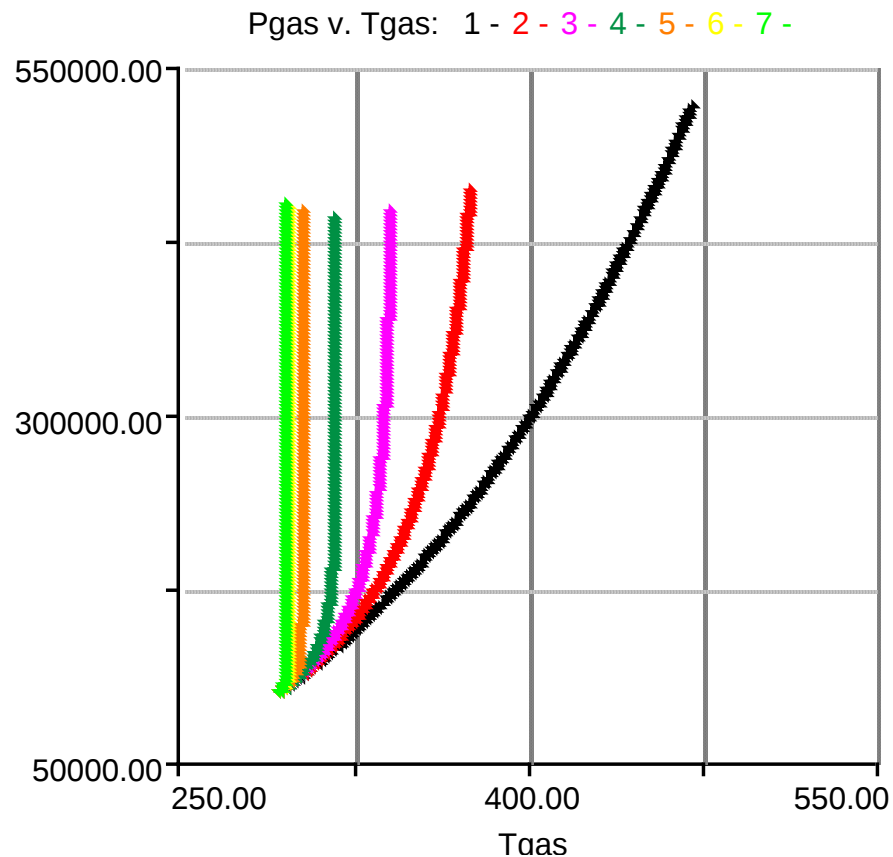
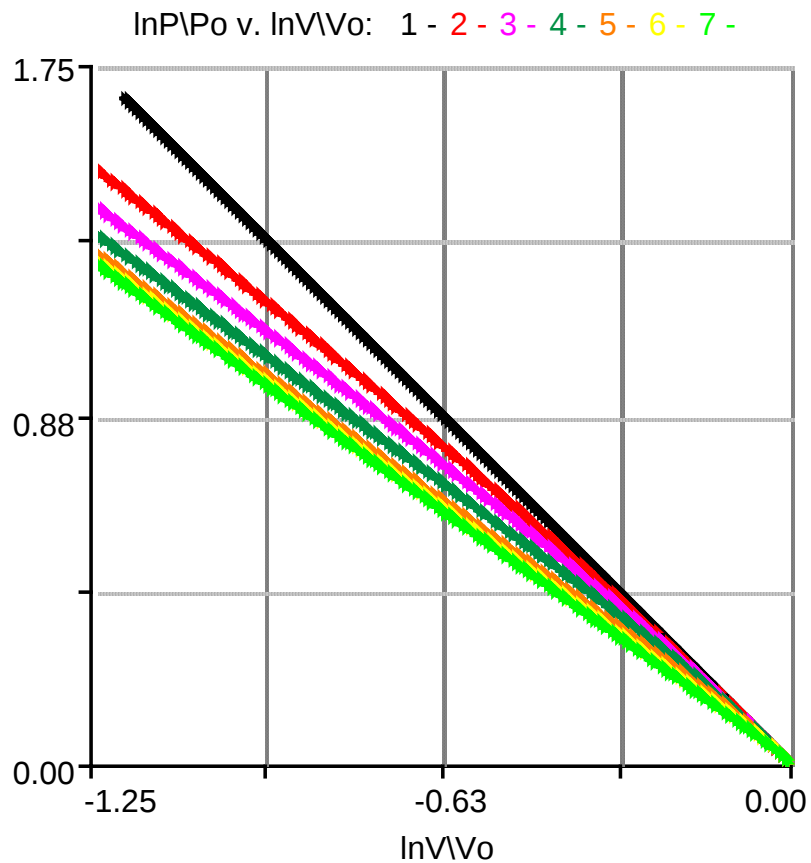
$T_o = 293 \text{ {K}}$

$T_{\text{serbatoio}} = 293 \text{ {K}}$

$V_o = 100e-6 \text{ {m}^3}$

Trasformazioni termodinamiche del gas ideale: caso generale nella rappresentazione con l'energia





dove il valore del coefficiente di conducibilità termica λ è via via dato da:

Run	1	2	3	4	5	6	7
λ (W/K)	0	0.05	0.10	0.20	0.50	1.00	2.00

L'obiettivo che ci eravamo prefissi **sembra** quindi **pienamente raggiunto**:

possediamo un modello che non dà semplicemente la rappresentazione di funzioni predefinite, ma che “determina” l'andamento nel tempo delle varie grandezze, in funzione dell'interazione del gas con l'ambiente che lo circonda (sia meccanica che termica).

Tuttavia, questi modelli basati sulla rappresentazione energetica in un certo senso “**nascondono**” un aspetto fondamentale per la termodinamica: quello legato all'**entropia**, ossia, in definitiva, le caratteristiche legate all'irreversibilità dei processi.

Infatti in modelli di questo tipo sono sì „contabilizzati“ gli scambi energetici sia meccanici che termici, ma in un modo che NON mette in evidenza le **differenze intrinseche sostanziali** fra queste due modalità di trasferimento dell'energia.

Questo punto fondamentale è stato oggetto di particolare studio e riflessione da parte di M. Planck.

Ecco alcune sue considerazioni in merito:

Io ero pienamente convinto che la mia pretesa di una differenza sostanziale fra la trasmissione di calore e lo spostamento di un peso si sarebbe alla fine dimostrata giusta.

(...)

L'accoglienza universale della mia tesi fu ottenuta in definitiva in seguito a considerazioni di carattere del tutto differente, che non avevano alcuna relazione con gli argomenti da me addotti a difesa della mia tesi, e cioè dalla teoria atomica di Boltzmann.

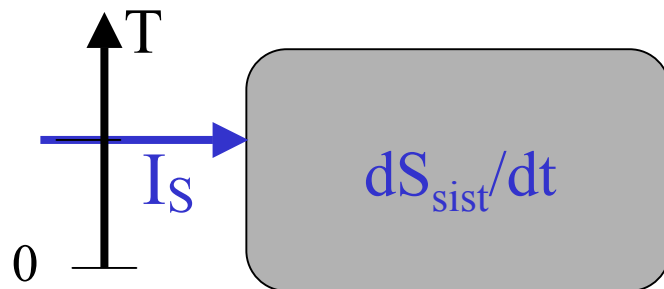
(...)

Boltzmann alla fine trionfò nella lotta contro Ostwald e i sostenitori dell'energetica, come pensavo che sarebbe dovuto accadere. La differenza sostanziale fra la conduzione del calore e un processo puramente meccanico fu universalmente riconosciuta.

Max Planck, Autobiografia scientifica (1936-1947)

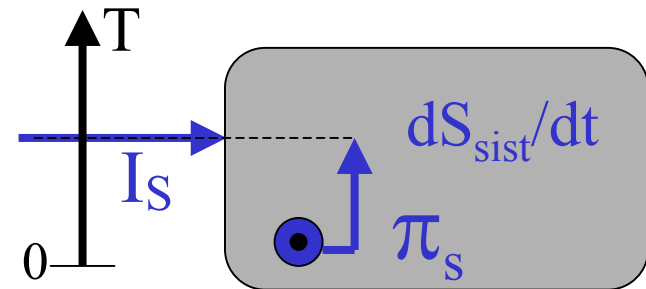
Seconda parte: utilizziamo l'entropia!

L'entropia è la grandezza estensiva che ha il ruolo di portatore dell'energia nei processi termici. Il bilancio relativo a un dato sistema per un dato processo può essere espresso nel seguente modo:



Solo scambi

$$\frac{dS_{sist}}{dt} = I_S$$



Scambi + produzione

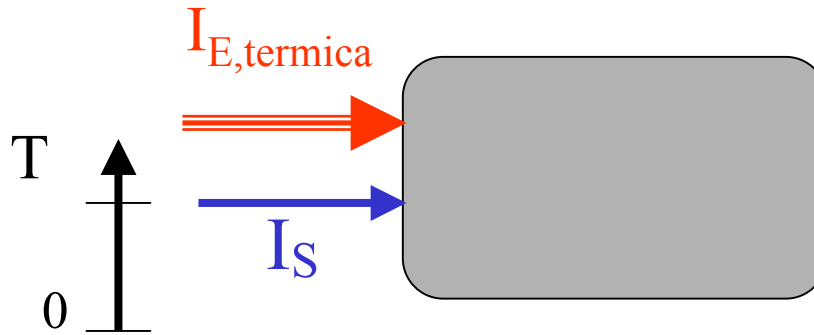
$$\frac{dS_{sist}}{dt} = I_S + \pi_S$$

dove I_S è l'entropia scambiata, π_S quella prodotta.

Quanto vale l'energia scambiata?

In generale vale la relazione

$$I_{E,term} = I_S \cdot T$$



Possiamo quindi determinare l'intensità del flusso di entropia sulla base degli scambi energetici e della temperatura del gas. Per semplicità supponiamo inoltre che ad ogni istante la temperatura del gas sia omogenea all'interno dell'intero sistema: in questo modo *non* si ha produzione di entropia all'*interno* del sistema, così che il bilancio assume la forma più semplice.

Per il gas ideale inoltre sappiamo che:

$$S(T, V) - S_0(T_0, V_0) = n \cdot c_v \cdot \ln(T / T_0) + n \cdot R \cdot \ln(V / V_0)$$

da cui ricaviamo facilmente l'espressione che lega le variazioni istantanee delle grandezze termodinamiche:

$$\frac{dS_{gas}}{dt} = \frac{n \cdot c_v}{T_{gas}} \cdot \frac{dT_{gas}}{dt} + \frac{n \cdot R}{V_{gas}} \cdot \frac{dV_{gas}}{dt}$$

Nell'esempio della *trasformazione adiabatica* (esempio 1) **NON** vi è un contatto termico con l'esterno: otteniamo quindi immediatamente la relazione che ci dice come sono legate tra loro le variazioni del volume e della temperatura:

$$\frac{dS_{gas}}{dt} = 0$$

$$\frac{n \cdot c_v}{T_{gas}} \frac{dT_{gas}}{dt} + \frac{n \cdot R}{V_{gas}} \cdot \frac{dV_{gas}}{dt} = 0$$

ossia

$$\frac{dT_{gas}}{dt} = - \frac{T_{gas} \cdot R}{V_{gas} \cdot c_v} \cdot \frac{dV_{gas}}{dt}$$

trasformazione termodinamica del gas
ideale: compressione adiabatica
nella rappresentazione con l'entropia

$$T_{\text{gas}}(t) = T_{\text{gas}}(t - dt) + (dT/dt) * dt$$

$$\text{INIT } T_{\text{gas}} = T_o$$

INFLOWS:

$$dT/dt = -(n * R / V_{\text{gas}}) * dV_{\text{gas}}/dt * (T_{\text{gas}} / (n * c_v))$$

$$V_{\text{gas}}(t) = V_{\text{gas}}(t - dt) + (dV_{\text{gas}}/dt) * dt$$

$$\text{INIT } V_{\text{gas}} = V_o$$

INFLOWS:

$$dV_{\text{gas}}/dt = -I_{\text{Emecc}} / P_{\text{gas}}$$

$$c_v = R / (\gamma - 1)$$

$$\gamma = 1.4$$

$$I_{\text{Emecc}} = 5 \text{ [W]}$$

$$n = P_o * V_o / (R * T_o)$$

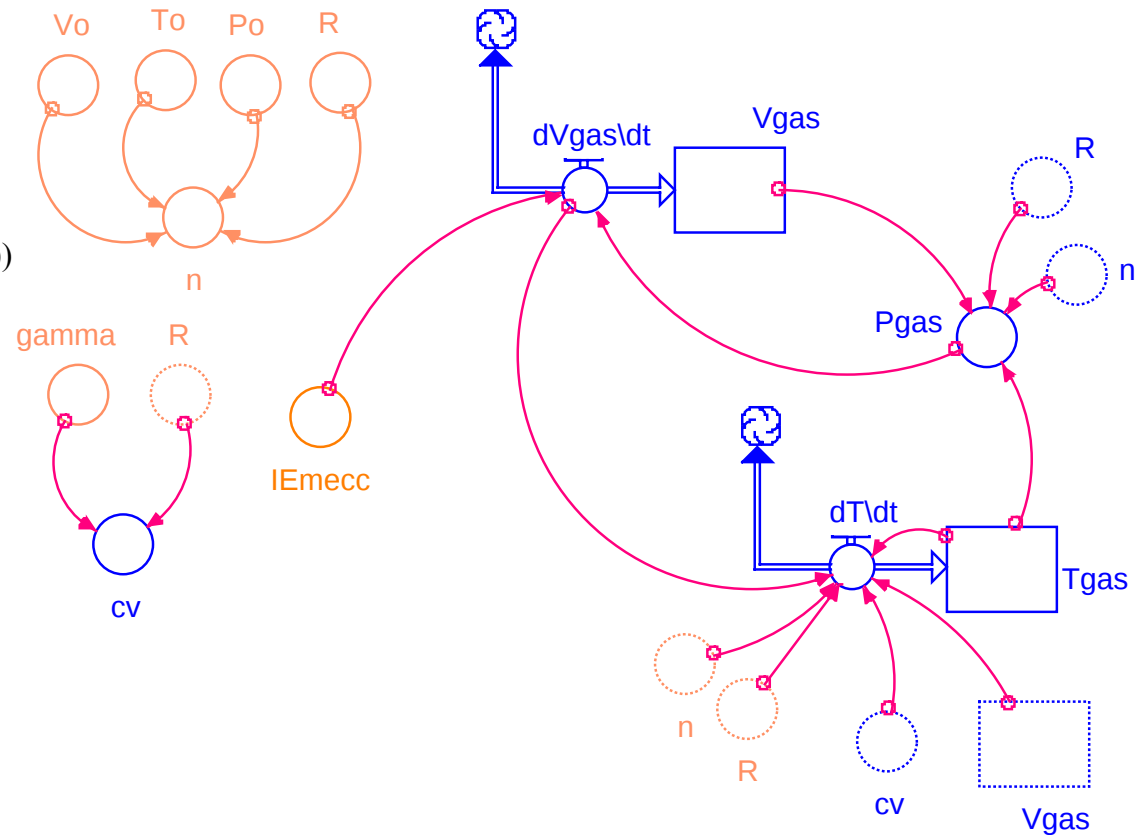
$$P_{\text{gas}} = n * R * T_{\text{gas}} / V_{\text{gas}}$$

$$P_o = 0.98e+5 \text{ [Pa]}$$

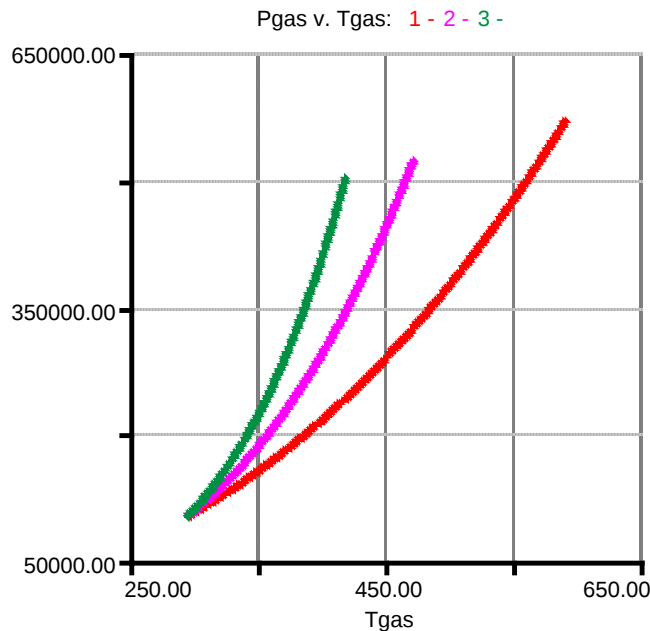
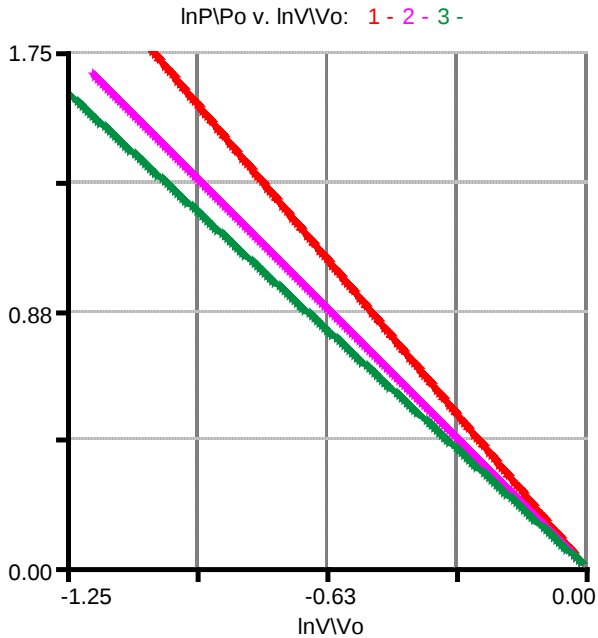
$$R = 8.31 \text{ [J/(mol.K)]}$$

$$T_o = 293 \text{ [K]}$$

$$V_o = 100e-6 \text{ [m}^3\text{]}$$



Pressione in funzione del volume e della temperatura



- come ci si attende si ha un andamento „tipo potenza“ (retta in scala log/log)
- il valore della pendenza dipende dal gas considerato
- nell'esempio:

1) $\gamma = 5/3$

2) $\gamma = 7/5$

3) $\gamma = 9/7$

Nel *caso più generale* (esempio 3) vi è un contatto termico con l'esterno: nel modello occorre esplicitare la relazione che lega la variazione del volume e della temperatura con l'intensità del flusso di entropia. Quest'ultimo è ottenuto dividendo la potenza termica per la temperatura momentanea del gas:

$$\frac{dS_{gas}}{dt} = I_S = \frac{I_E}{T_{gas}} = - \frac{\lambda \cdot (T_{gas} - T_0)}{T_{gas}}$$

$$\frac{dS_{gas}}{dt} = \frac{n \cdot c_v}{T_{gas}} \frac{dT_{gas}}{dt} + \frac{n \cdot R}{V_{gas}} \cdot \frac{dV_{gas}}{dt}$$

$$T_{\text{gas}}(t) = T_{\text{gas}}(t - dt) + (dT/dt) * dt$$

INIT $T_{\text{gas}} = T_o$

INFLOWS:

$$dT/dt = (dS/dt - (n * R / V_{\text{gas}}) * dV_{\text{gas}}/dt) * T_{\text{gas}} / (n * c_v)$$

$$\text{variaz_S_gas}(t) = \text{variaz_S_gas}(t - dt) + (I_s) * dt$$

INIT $\text{variaz_S_gas} = 0 \{J/K\}$

INFLOWS:

$$I_s = \text{coeff} * (T_o - T_{\text{gas}}) / T_o$$

$$V_{\text{gas}}(t) = V_{\text{gas}}(t - dt) + (dV_{\text{gas}}/dt) * dt$$

INIT $V_{\text{gas}} = V_o$

INFLOWS:

$$dV_{\text{gas}}/dt = -I_{\text{Emecc}} / P_{\text{gas}}$$

coeff = diversi valori

$$c_v = R / (\gamma - 1)$$

$$dS/dt = I_s$$

$$\gamma = 1.4$$

$$I_{\text{Emecc}} = 5 \{W\}$$

$$n = P_o * V_o / (R * T_o)$$

$$P_{\text{gas}} = n * R * T_{\text{gas}} / V_{\text{gas}}$$

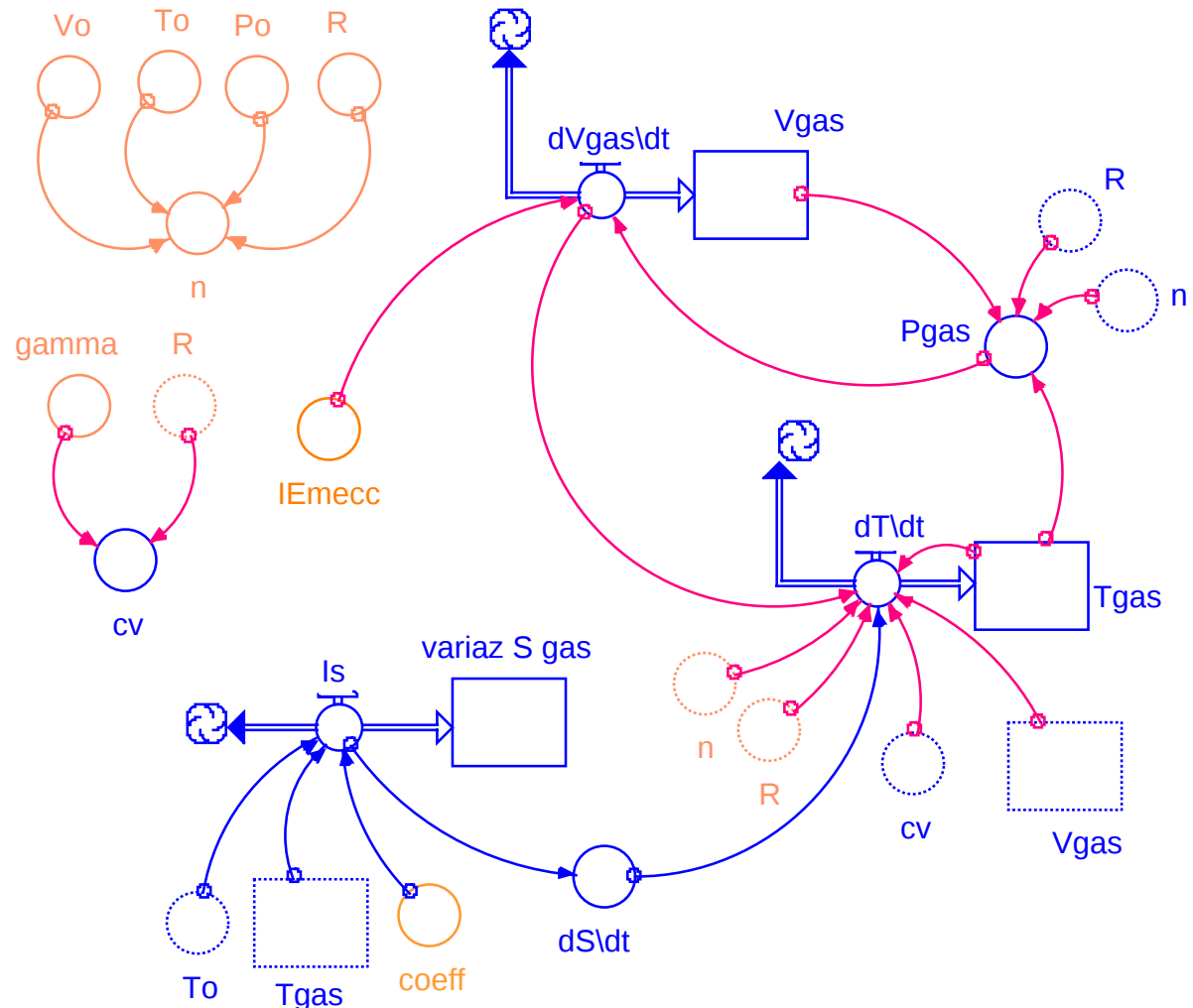
$$P_o = 0.98e5 \{Pa\}$$

$$R = 8.31 \{J/(mol.K)\}$$

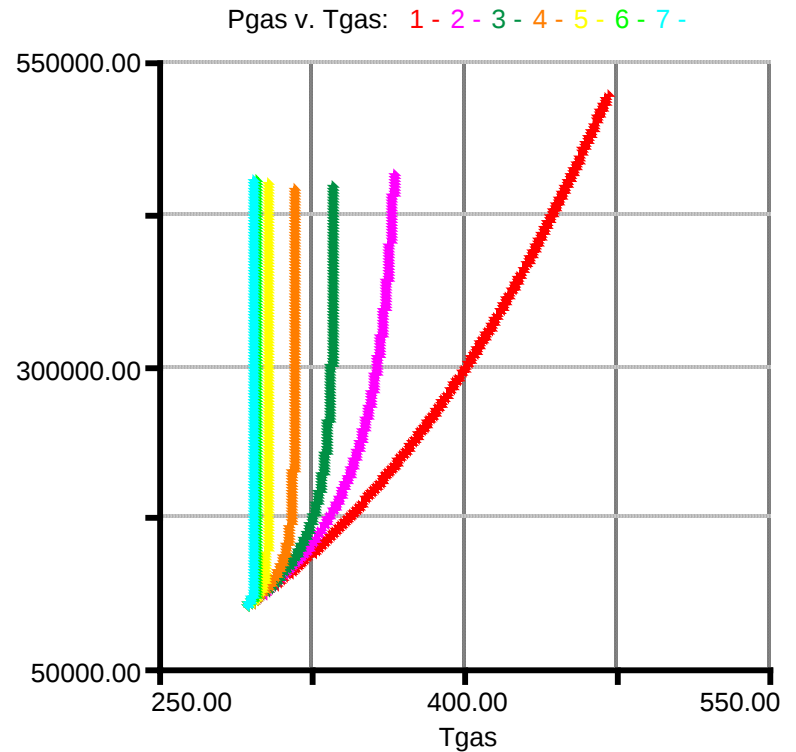
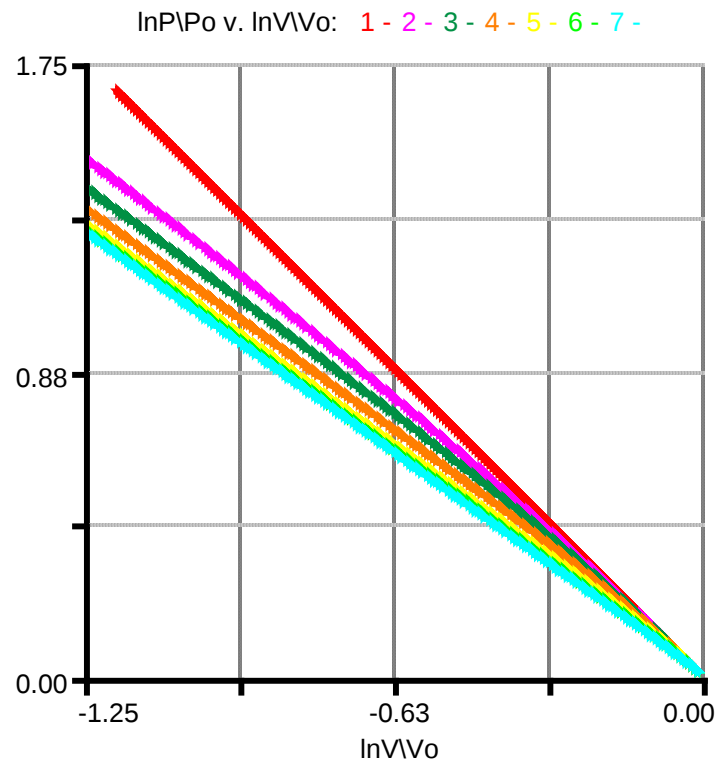
$$T_o = 293 \{K\}$$

$$V_o = 100e-6 \{m^3\}$$

trasformazione termodinamica del gas
ideale: caso generale
nella rappresentazione con l'entropia



Il „carattere“ della trasformazione dipende in modo sensibile dalla scelta del coefficiente di conduzione termica:



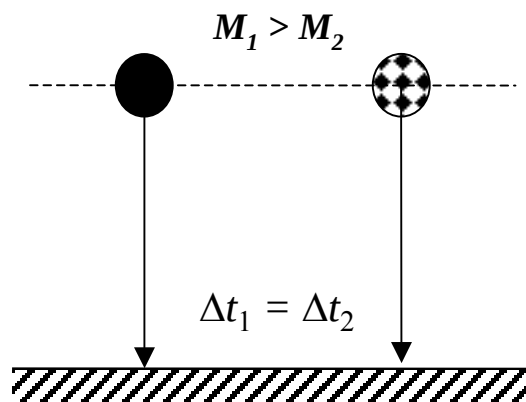
3 - Chi arriverà a terra per primo?

Modellizzare per capire l'esperimento

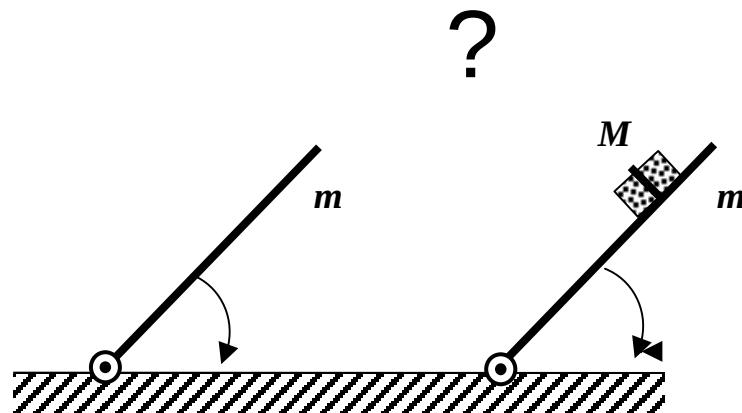
Obiiettivo

Utilizzare la modellizzazione per interpretare e verificare dei risultati sperimentali a prima vista sorprendenti e per i quali non si ha (ancora) la possibilità di un confronto diretto con le previsioni di un modello teorico.

La situazione considerata (ribaltamento assicelle) presenta una fenomenologia che non può essere interpretata in modo qualitativo con il concetto di massa inerziale, ma richiede l'elaborazione di un preciso modello meccanico per le rotazioni basato sui concetti di momento angolare, momento d'inerzia e momento meccanico di una forza.



a)



b)

a) due oggetti della medesima forma ma di massa diversa vengono lasciati cadere, ad un dato istante, da fermi e da una medesima altezza. L'esperienza mostra che essi arrivano sul pavimento contemporaneamente;

b) due assicelle hanno massa m e lunghezza d e sono imperniate ad un loro estremo. Una è caricata con un corpo aggiuntivo di massa M e fissato saldamente sull'assicella. Ad un certo istante le due assicelle vengono lasciate cadere liberamente: **quale delle due arriverà a terra per prima?**

Per rispondere a questa domanda si può senz'altro pensare di ricorrere alla **prova sperimentale**: in questo caso le osservazioni sperimentali tuttavia non forniscono una risposta immediata. La “gara” sembra infatti non avere un vincitore stabilito a priori: il risultato dipende in modo decisivo dalla posizione del carico lungo l'assicella.

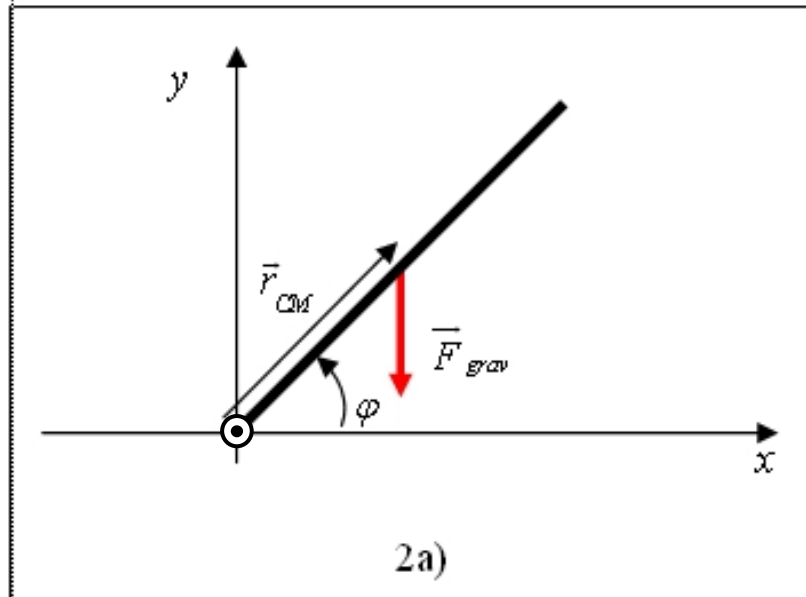
Appare quindi evidente che, nel caso in questione, una spiegazione che faccia intervenire un generico concetto qualitativo di inerzia non è sufficiente: **l'elaborazione di un preciso modello meccanico risulta essere necessaria**. In particolare occorre costruire un modello capace di descrivere la rotazione di un oggetto rigido attorno ad un asse fisso.

Piuttosto che incentrare l'approccio sugli aspetti cinematici, per descrivere la situazione vogliamo riferirci al *momento angolare* e alla relativa *legge di bilancio* che governa l'evoluzione temporale del sistema. Indicando con L e Θ rispettivamente il *momento angolare* e il *momento d'inerzia* del corpo rispetto all'asse di rotazione scelto e con $\varphi(t)$ la posizione angolare in funzione del tempo, nel caso del corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso abbiamo:

$$L(t) = \Theta \omega(t) = \Theta \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

mentre $\frac{dL(t)}{dt} = \tau(t)$

esprime l'equazione di bilancio istantaneo per il momento angolare, dove t rappresenta il momento meccanico totale agente sul corpo considerato; esso può essere interpretato come il tasso istantaneo di variazione del momento angolare.



$$\vec{\tau} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{grav} = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_z = -\frac{d m g}{2} \cos \varphi$$

2b)

Determinazione del momento meccanico dell'assicella: la forza peso (verso il basso) agisce in modo omogeneo in tutti i punti dell'assicella ($r_{CM} = d/2$). Nella situazione considerata, il momento meccanico rispetto all'asse di rotazione (posto alla base dell'assicella) entra nel piano del disegno e fa quindi ruotare quest'ultima in senso orario.

Per l'**assicella** di massa m , di lunghezza d e imperniata alla base (supposta omogenea e con densità lineare $\lambda = m/d$) il momento d'inerzia è rappresentato da uno scalare e, rispetto all'asse di rotazione scelto, nel caso dell'assicella assume il valore:

$$\Theta_{assicella} = \int_0^d r^2 dm = \int_0^d r^2 \lambda dr = \frac{1}{3} m d^2$$

mentre la componente del momento meccanico rispetto all'asse di rotazione è data da

$$\tau_z(t) = -\left(\frac{d}{2}\right) \cos \varphi(t) (mg)$$

L'equazione del moto risulta quindi

$$\frac{1}{3} m d^2 \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = -\left(\frac{d m g}{2}\right) \cos \varphi(t)$$

Per l'**assicella carica** abbiamo invece (trascurando l'estensione finita della massa aggiuntiva):

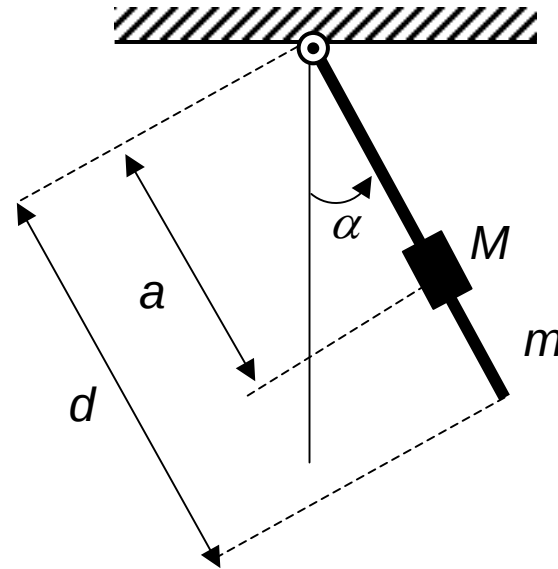
$$\Theta_{assicella+massa} = \frac{1}{3} m d^2 + M a^2$$

$$\tau_z(t) = -\left(\frac{d}{2}\right) \cos \varphi(t) m g + a \cos \varphi(t) M g = -\left(\frac{d m}{2} + a M\right) \cos \varphi(t) g$$

e quindi la nuova equazione del moto diventa

$$\left(\frac{1}{3} m d^2 + M a^2\right) \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = -\left(\frac{d m}{2} + a M\right) g \cos \varphi(t)$$

Il pendolo fisico e il pendolo composto



Dispositivo sperimentale e schematizzazione del pendolo composto. L'asta del pendolo è fissata direttamente al sensore di rotazione: in questo modo è possibile misurare la posizione angolare in funzione del tempo. Il periodo di oscillazione può essere determinato anche con l'usuale sistema a foto-traguardo.

Considerazioni dinamiche: equazione del moto

Pendolo fisico

$$\frac{1}{3} m d^2 \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} = - \left(\frac{d m g}{2} \right) \sin \alpha(t) \approx - \left(\frac{d m g}{2} \right) \alpha(t)$$

da cui si ricava il periodo d'oscillazione

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m d^2}{\frac{d m g}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2d}{3g}}$$

Analogamente per il **pendolo composto**:

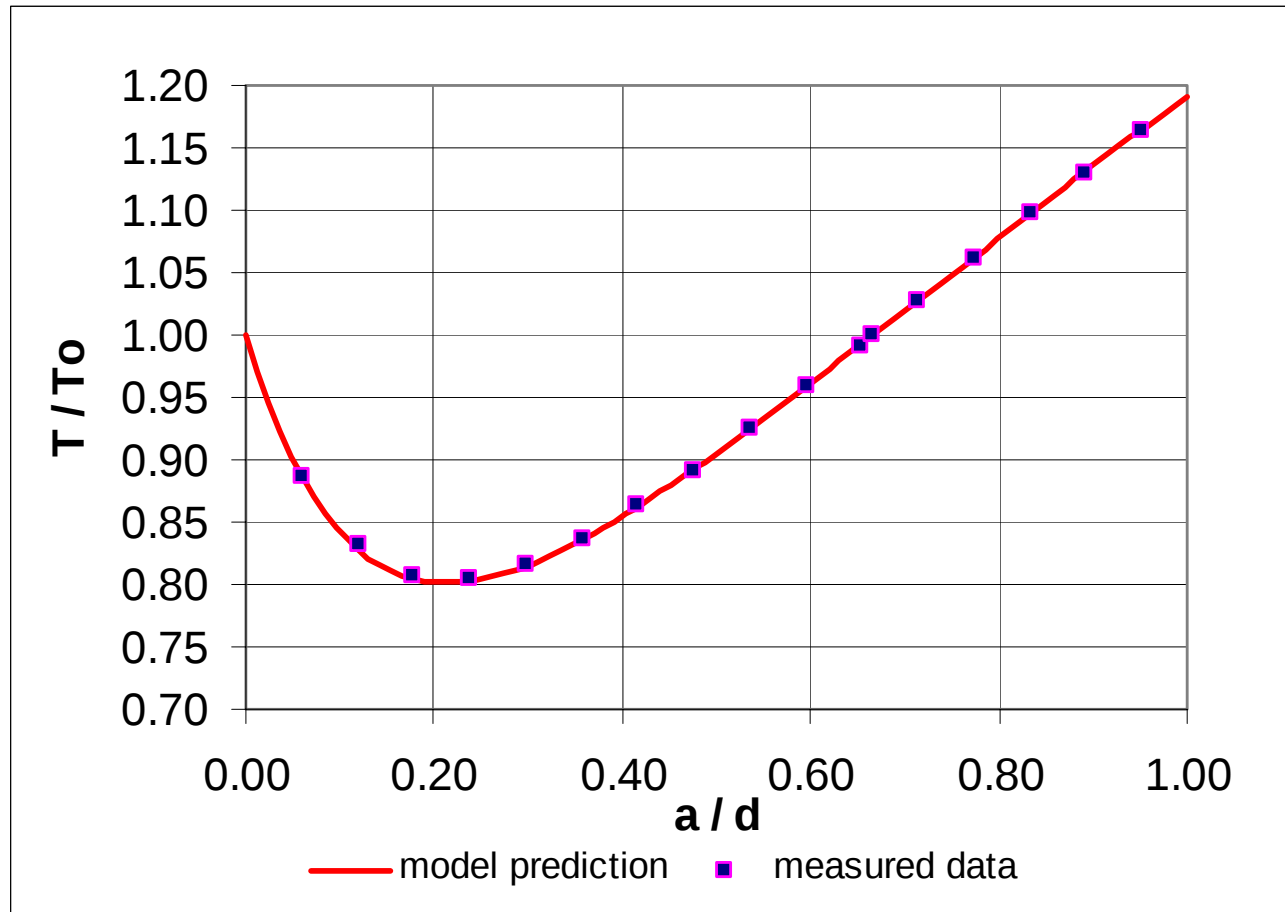
$$\left(\frac{1}{3} m d^2 + M a^2 \right) \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} = - \left(\frac{m d}{2} + a M \right) g \sin \alpha(t) \approx - \left(\frac{m d}{2} + a M \right) g \alpha(t)$$

introducendo le variabili $\mu = \frac{M}{m_{asta}}$ e $x = \frac{a}{d}$ si ottiene

$$\frac{1}{3} m d^2 (1 + 3\mu x^2) \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} = - \frac{m d}{2} (1 + 2\mu x) g \alpha(t)$$

che permette di stabilire per il periodo la relazione

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m d^2 (1 + 3\mu x^2)}{\frac{m d}{2} g (1 + 2\mu x)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2 d (1 + 3\mu x^2)}{3 g (1 + 2\mu x)}} = T_0 \sqrt{\frac{(1 + 3\mu x^2)}{(1 + 2\mu x)}}$$



Confronto tra i dati sperimentali misurati e l'andamento teorico atteso (linea continua). In corrispondenza del valore $a/d = 2/3$ il periodo di oscillazione ha il medesimo valore di quello che caratterizza l'assicella non caricata. ($m = 128.8$ g e $M = 334.6$ g)

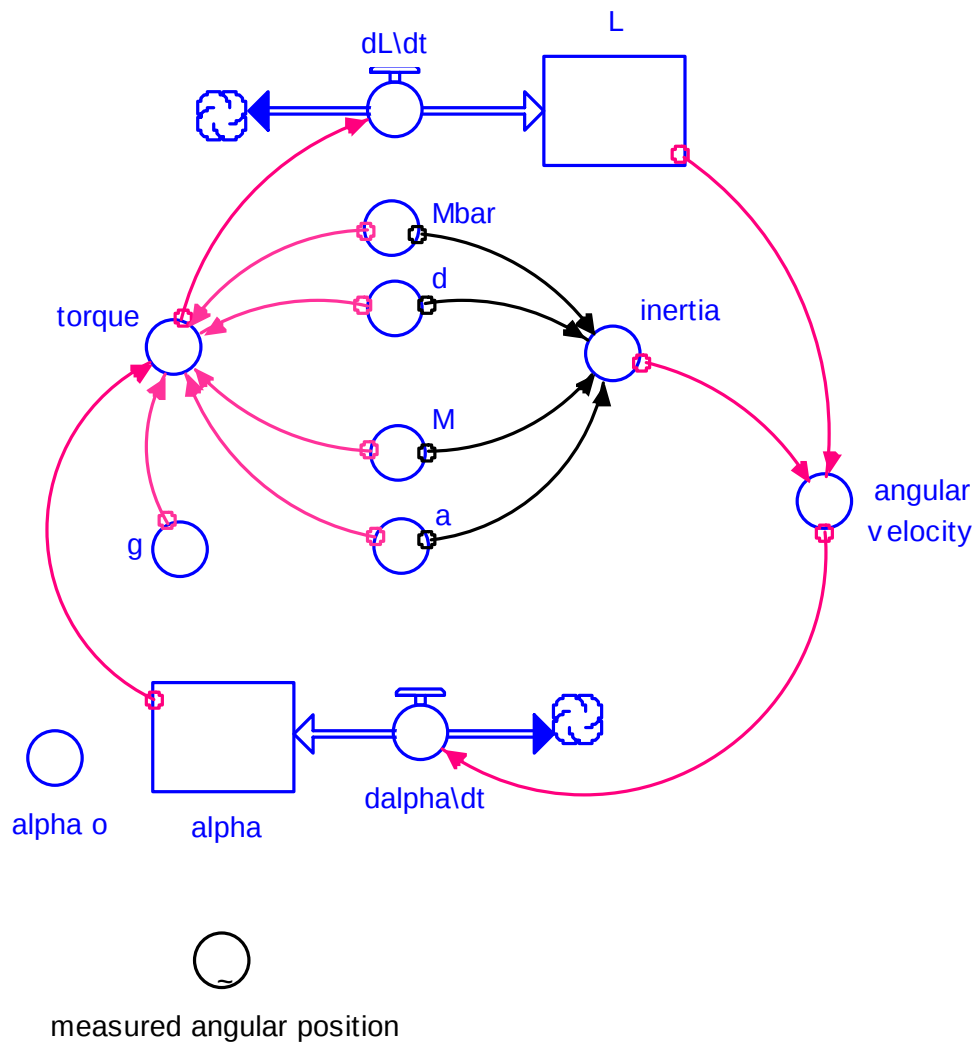
La modellizzazione

La grandezza per la quale viene allestito il *bilancio* è il momento angolare L : esso può variare nel corso del tempo in ragione del momento meccanico esterno agente sul sistema.

Quest'ultimo, oltre che dipendere dai valori delle masse in gioco e dalla loro distribuzione spaziale, dipende anche dalla posizione in cui si trova il pendolo.

La posizione, a partire dal valore iniziale, è ottenuta “integrando” passo passo la velocità angolare (intesa come tasso di variazione della posizione angolare).

A sua volta essa è esprimibile istante per istante sulla base del valore del momento angolare e del momento d'inerzia del sistema.



$$\alpha(t) = \alpha(t - dt) + (d\alpha/dt) * dt$$

$$\text{INIT } \alpha = \alpha_o$$

INFLOWS:

$$d\alpha/dt = \text{angular velocity}$$

$$L(t) = L(t - dt) + (dL/dt) * dt$$

$$\text{INIT } L = 0$$

INFLOWS:

$$dL/dt = \text{torque}$$

$$a = 0.56 \text{ \{m\}}$$

$$\alpha_o = 0.151 \text{ \{rad\}}$$

$$\text{angular velocity} = L/\text{inertia}$$

$$d = 0.843 \text{ \{m\}}$$

$$g = 9.81 \text{ \{N/kg\}}$$

$$\text{inertia} = (Mrod*d^2)/3 + M*a^2$$

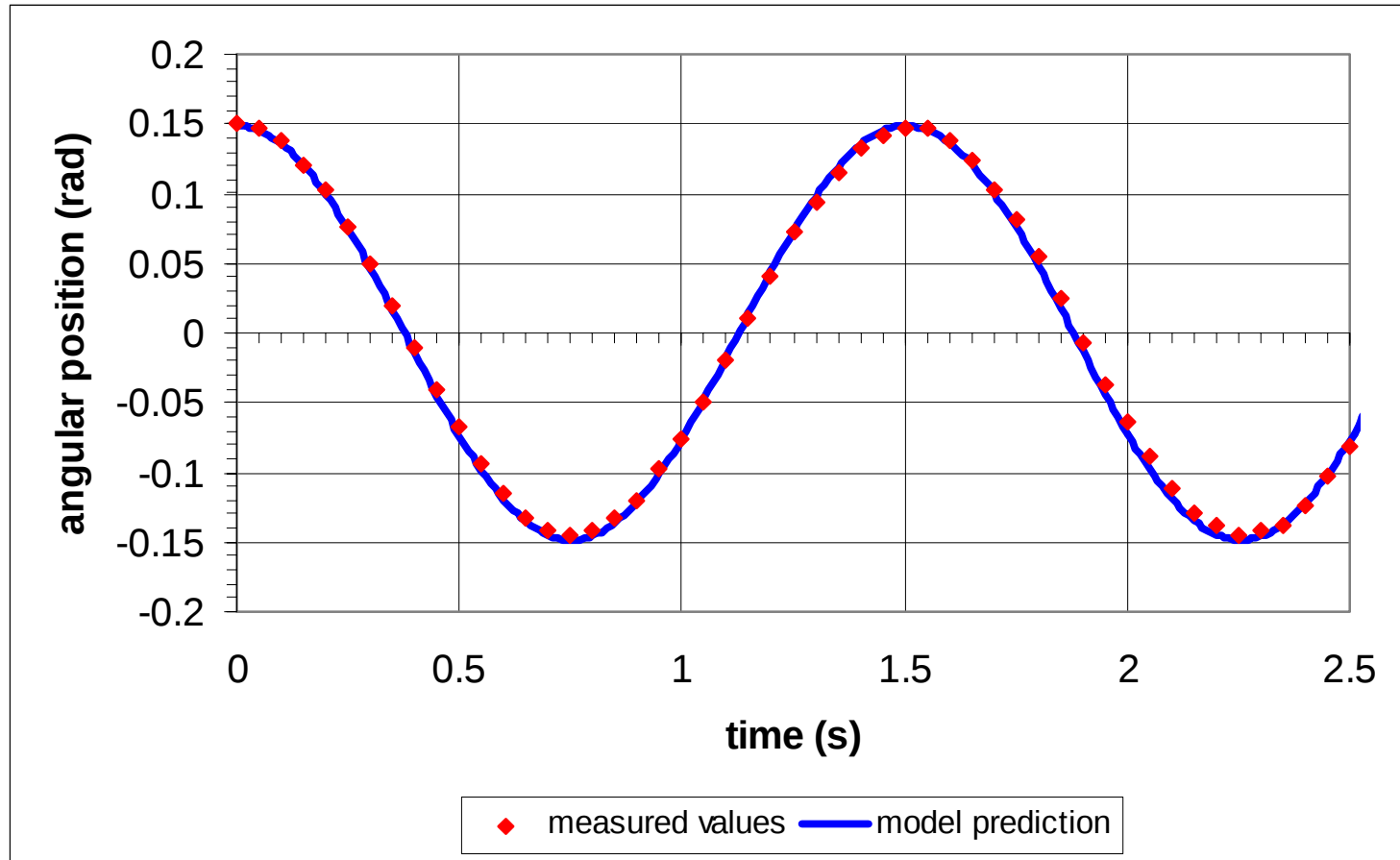
$$M = 0.2366 \text{ \{kg\}}$$

$$Mrod = 0.6932 \text{ \{kg\}}$$

$$\text{torque} = -\text{SIN}(\alpha)*g*(Mrod*d/2 + M*a)$$

$$\text{measured angular position} =$$

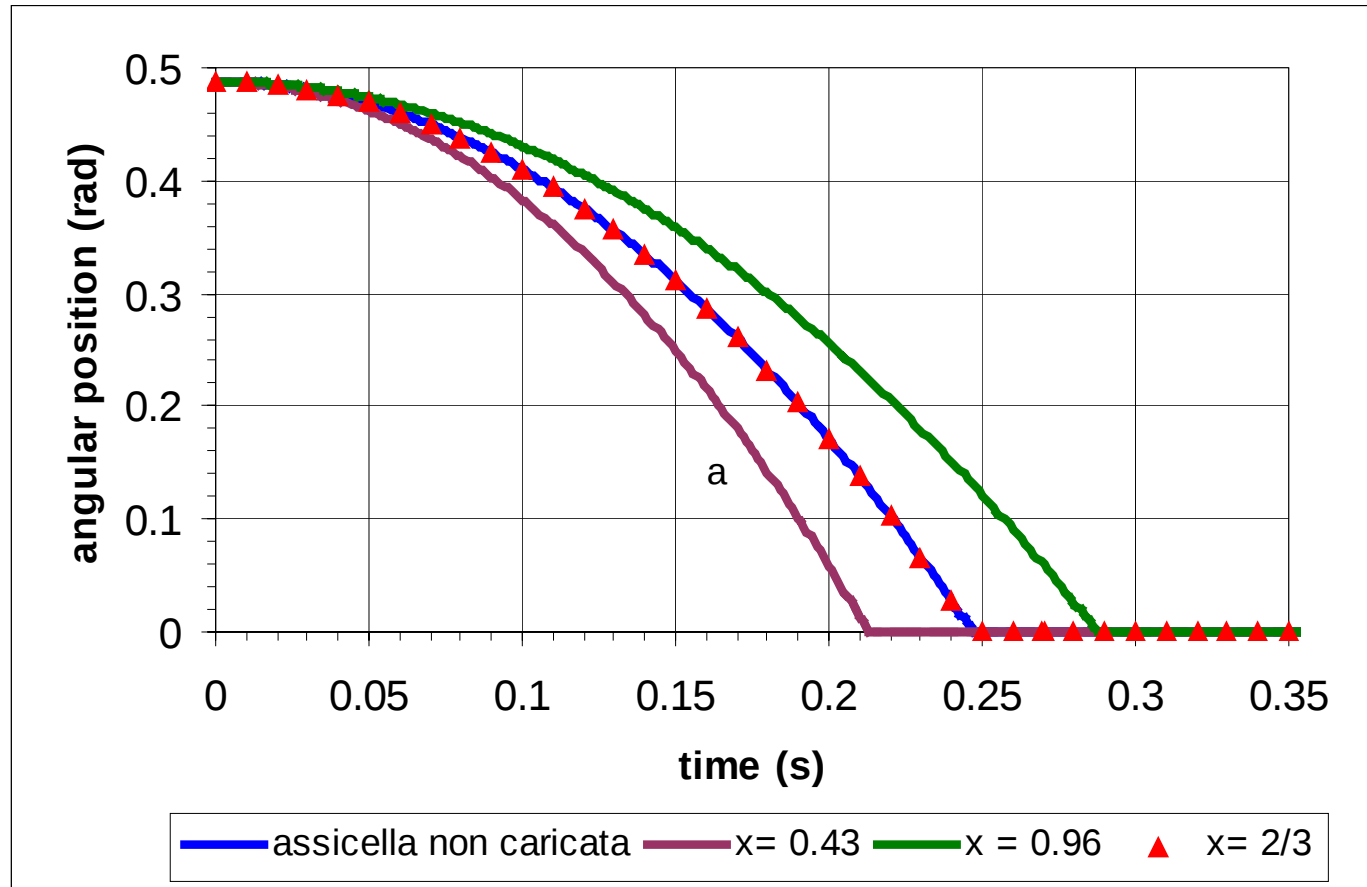
$$(0.00, 0.151), (0.002, 0.151), (0.004, 0.151), \dots, (2.80, 0.0851), (2.80, 0.0851)$$



Confronto tra la previsione del modello (linea intera) e i valori sperimentali (punti) per $x = 2/3$: si osserva un accordo più che soddisfacente.

Ribaltamento dell'assicella

Per indagare il ribaltamento dell'assicella possiamo utilizzare questo **stesso modello**, modificando unicamente la posizione iniziale: il modello utilizzato per il pendolo infatti **non** fa uso di nessuna approssimazione per piccole oscillazioni ed ha quindi validità generale.

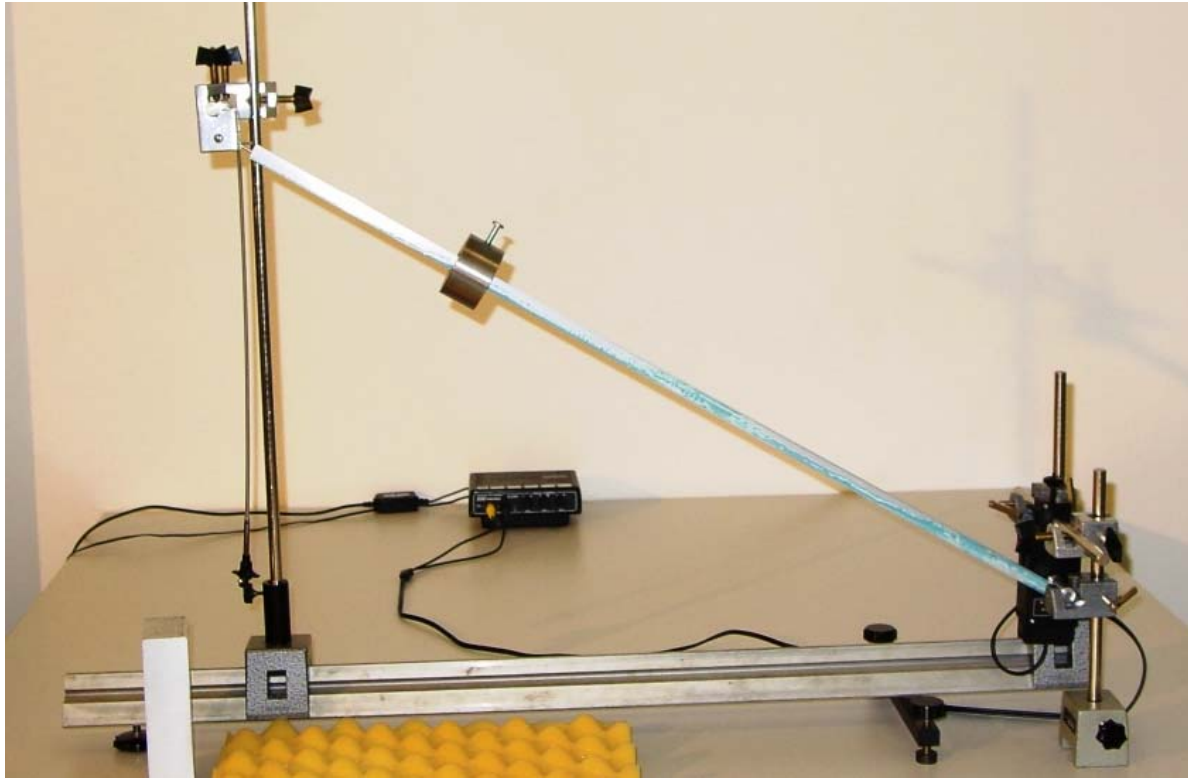


Posizione angolare in funzione del tempo: le previsioni del modello per il ribaltamento dell'assicella non caricata oppure caricata con la massa aggiuntiva, posta in $x = 0.43$, $x = 0.67 = 2/3$ e $x = 0.96$. La posizione angolare iniziale è stata arbitrariamente fissata a $\varphi_o = 28^\circ = 0,488 \text{ rad}$.

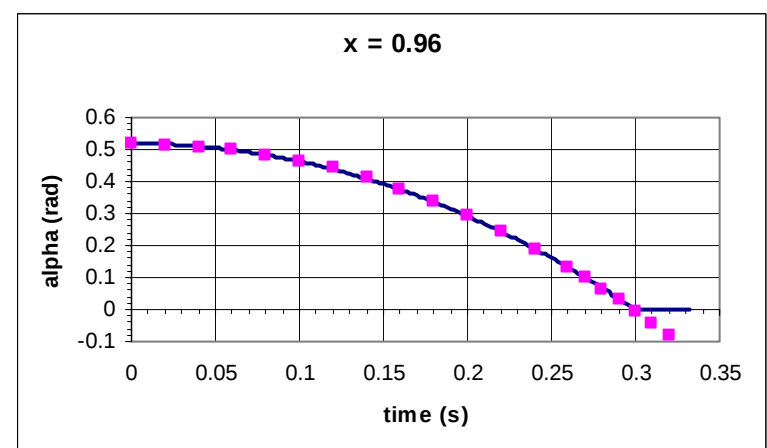
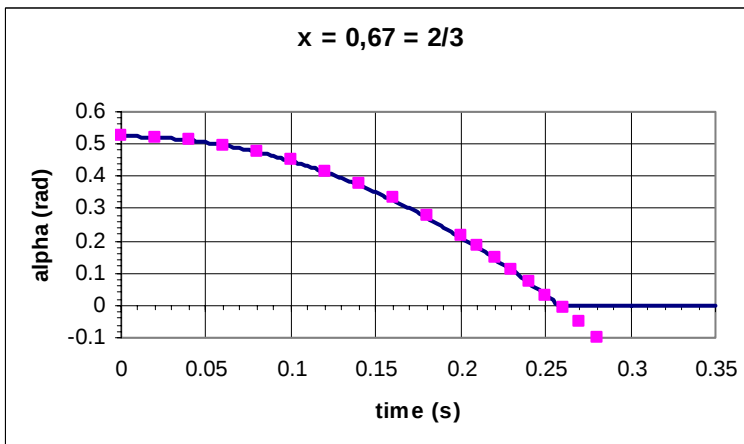
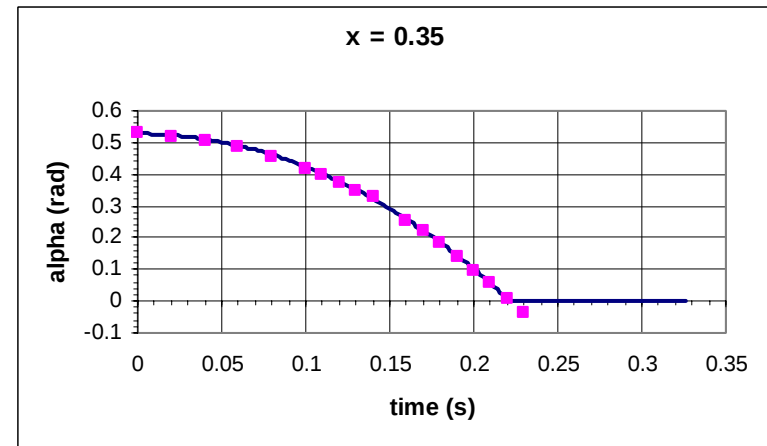
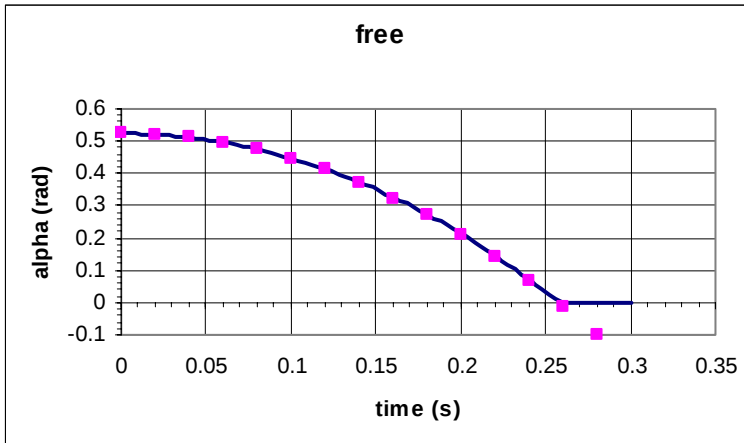
Innanzitutto possiamo verificare che anche in questa situazione l'equazione oraria dell'assicella non caricata e quella dell'assicella caricata in $x = 2/3$ risultano perfettamente sovrapposte: ciò vuol dire che in queste condizioni le due assicelle arriveranno a terra nel medesimo istante.

Inoltre la modellizzazione ci libera anche dall'imbarazzo suscitato dalle osservazioni iniziali: a seconda della posizione in cui viene collocata la massa aggiuntiva, il tempo di ribaltamento può essere sia minore (quando $x < 2/3$) che maggiore (quando $x > 2/3$) di quello che caratterizza la caduta dell'assicella non caricata.

Verifica sperimentale

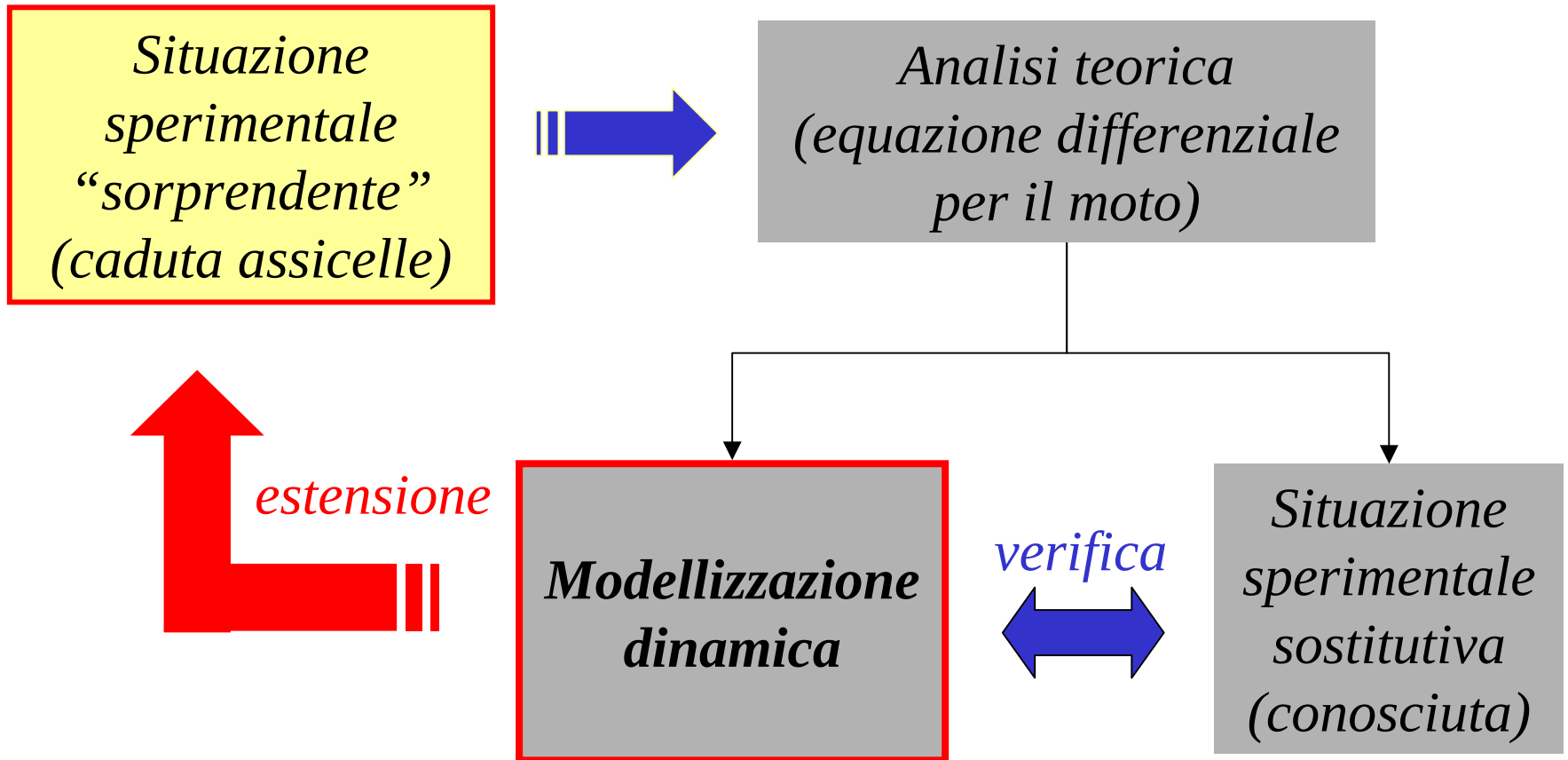


Apparecchiatura sperimentale utilizzata per il ribaltamento. La misura viene avviata con l'asta nella posizione orizzontale (linea tratteggiata); successivamente l'asta viene alloggiata nel dispositivo meccanico di sgancio (indicato dalla freccia) e in seguito rilasciata.



Posizione angolare in funzione del tempo: confronto tra i dati sperimentali (punti) e le previsioni del modello (linea continua) per l'asta non caricata e per l'asta caricata (per tre diverse posizioni della massa aggiuntiva). ■

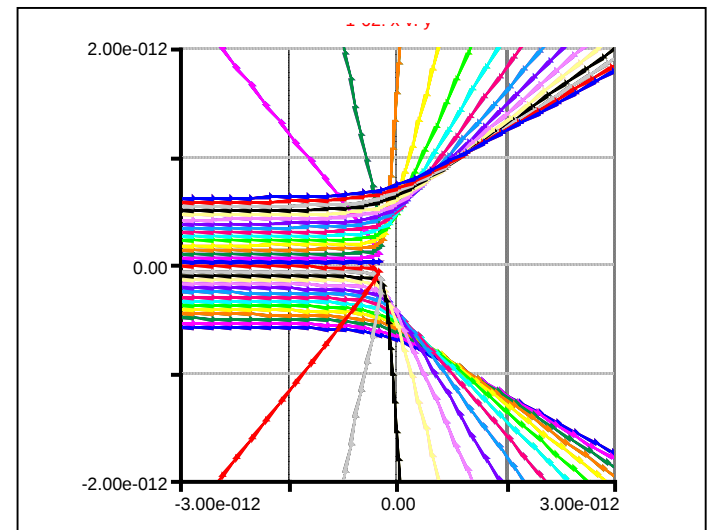
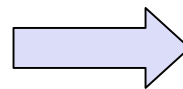
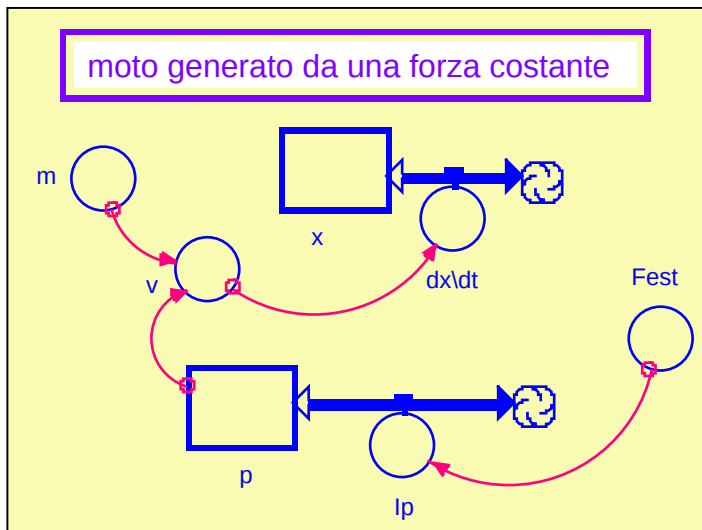
Riassumendo:



4 – Dal moto uniformemente accelerato all'esperienza di Rutherford

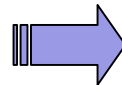
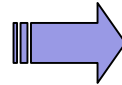
Obiettivo

attraverso una sequenza di modelli che partono da situazioni semplici e ben conosciute, si vuole mostrare come è possibile affrontare ambiti altrimenti difficilmente accessibili ad uno studente liceale con i tradizionali strumenti matematici



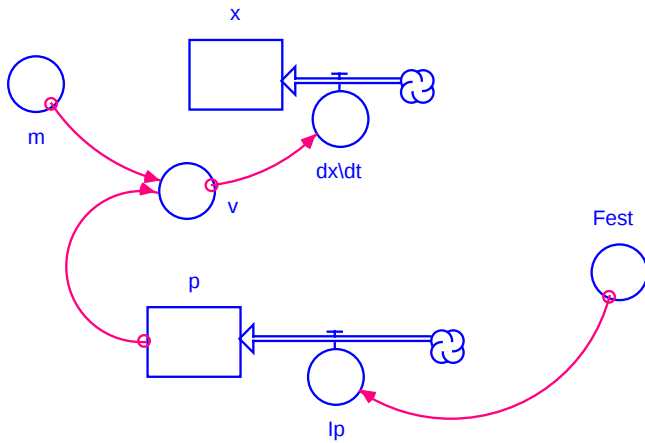
Dal moto uniformemente accelerato all'esperienza di Rutherford: sequenza didattica

- 1 moto uniformemente accelerato
(con una forza costante)
- 2 moto armonico
(forza elastica di richiamo)
- 3 lancio verticale verso l'alto
(nelle vicinanze della superficie terrestre)
- 4 lancio verticale verso l'alto
(caso generale)
- 5 repulsione coulombiana



- 3a lancio obliquo in due dimensioni
(nelle vicinanze della superficie terrestre)
- 5a esperienza di Rutherford
(diffusione di particelle alfa su nuclei d'oro)

moto generato da una forza costante



$$p(t) = p(t - dt) + (Ip) * dt$$

INIT p = 0 {N.sec}

INFLOWS:

$$Ip = Fest$$

$$x(t) = x(t - dt) + (dx/dt) * dt$$

INIT x = 3 {m}

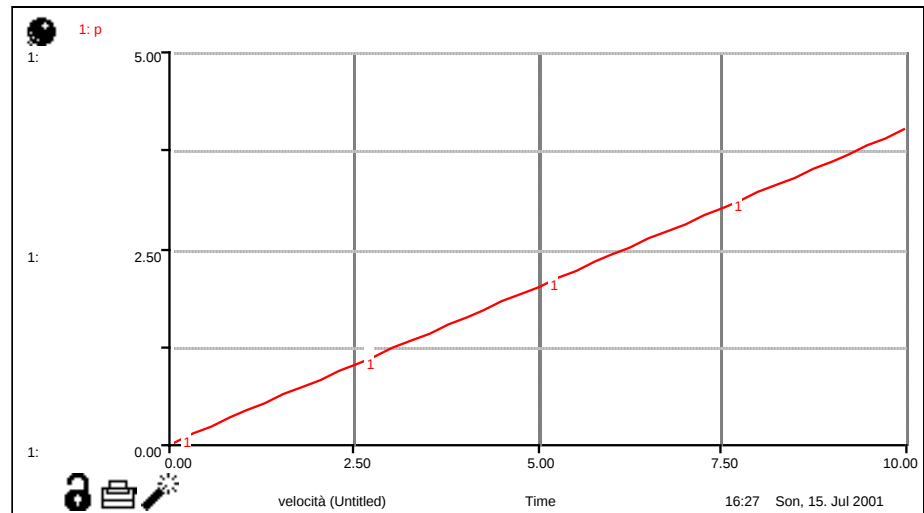
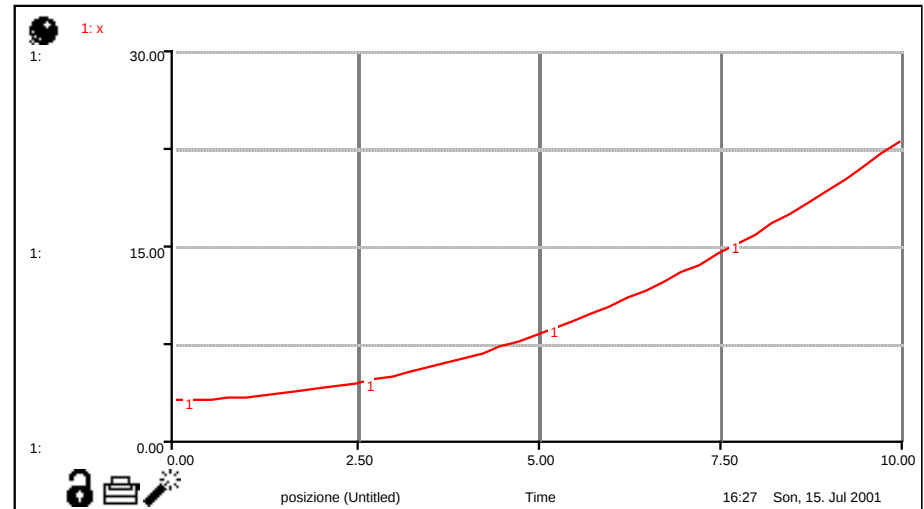
INFLOWS:

$$dx/dt = v$$

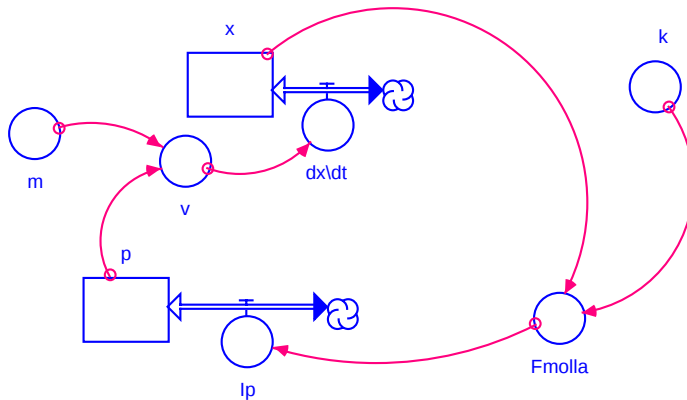
$$Fest = 0.4 \{N\}$$

$$m = 1 \{kg\}$$

$$v = p/m$$



moto generato da una forza elastica



$$p(t) = p(t - dt) + (I_p) * dt$$

INIT $p = 0.32 \{N \cdot sec\}$

INFLOWS:

$$I_p = F_{molla}$$

$$x(t) = x(t - dt) + (dx/dt) * dt$$

INIT $x = 0.06 \{m\}$

INFLOWS:

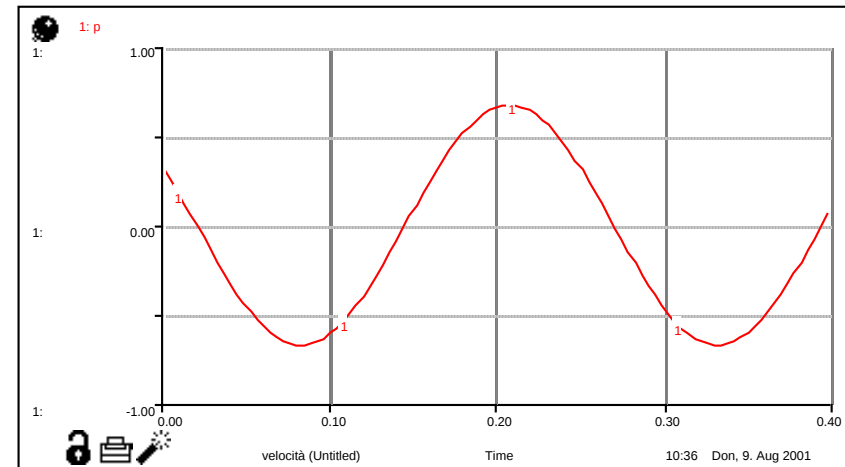
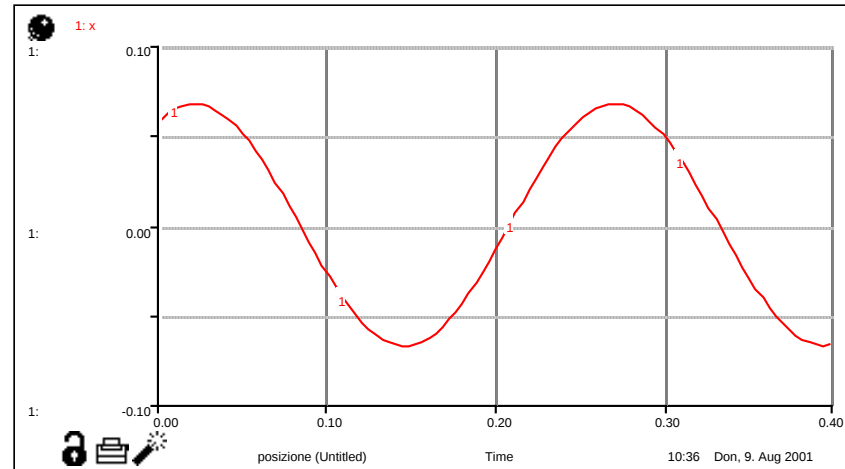
$$dx/dt = v$$

$$F_{molla} = -k * x$$

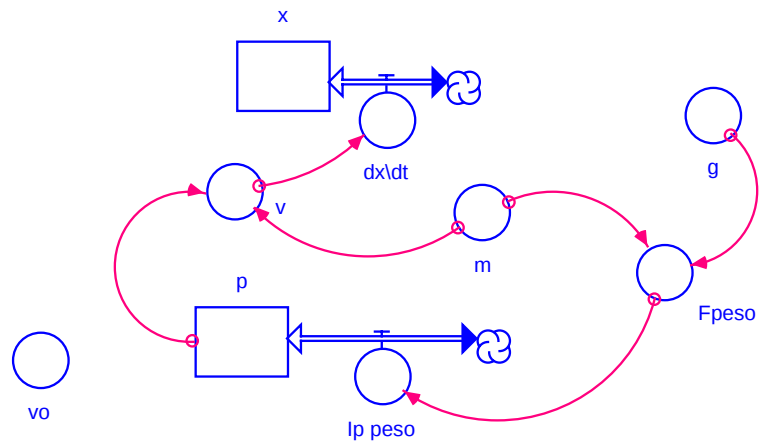
$$k = 250 \{N/m\}$$

$$m = 0.4 \{kg\}$$

$$v = p/m$$



lancio verticale verso l'alto
nelle vicinanze della superficie terrestre
(e del bordo del Gran Canyon,
trascurando la resistenza dell'aria)



$$p(t) = p(t - dt) + (Ip_peso) * dt$$

$$\text{INIT } p = vo * m$$

INFLOWS:

$$Ip_peso = Fpeso$$

$$x(t) = x(t - dt) + (dx/dt) * dt$$

$$\text{INIT } x = 0 \{m\}$$

INFLOWS:

$$dx/dt = v$$

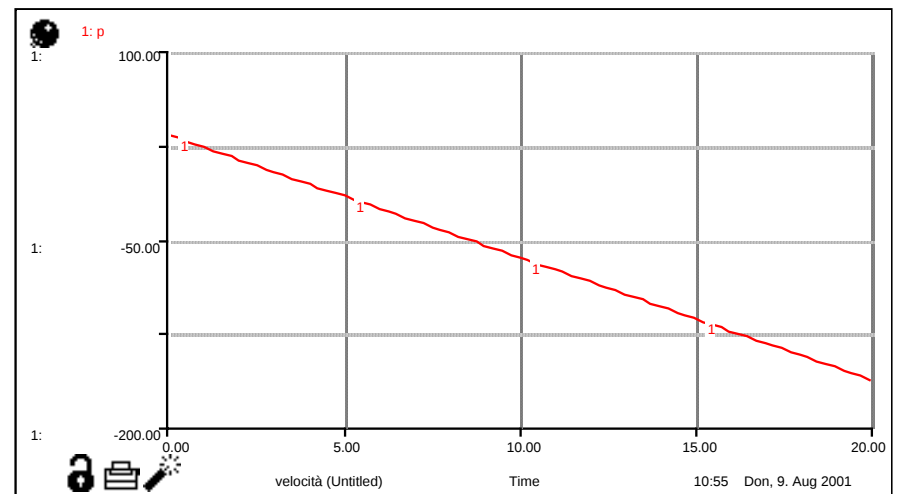
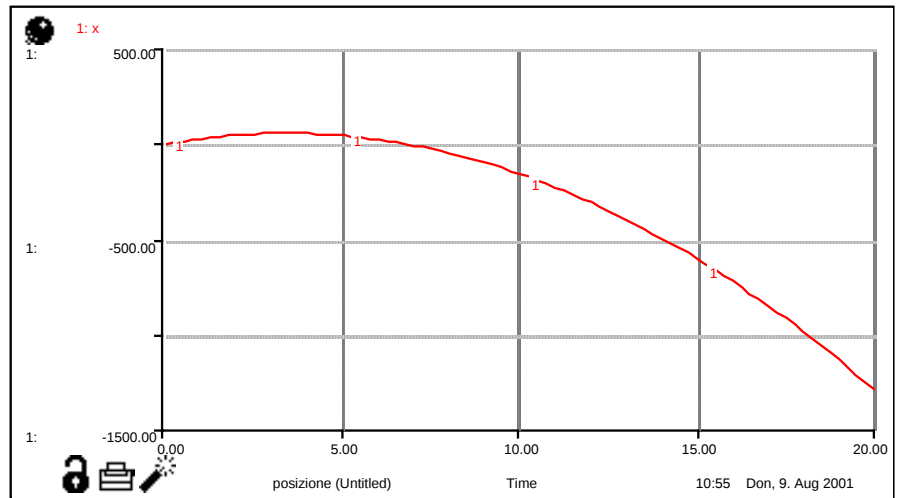
$$Fpeso = m * g$$

$$g = -9.81 \{m/sec^2\}$$

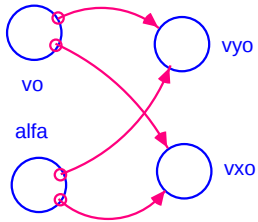
$$m = 1 \{kg\}$$

$$v = p/m$$

$$vo = 33 \{m/sec\}$$



lancio obliquo



$px(t) = px(t - dt) + (Ip_x) * dt$
 INIT $px = m * vx0$

INFLOWS:

$Ip_x = 0 \{N\}$

$py(t) = py(t - dt) + (Ip_y) * dt$

INIT $py = v_{y0} * m$

INFLOWS:

$Ip_y = F_{peso}$

$x(t) = x(t - dt) + (dx/dt) * dt$

INIT $x = 0 \{m\}$

INFLOWS:

$dx/dt = vx$

$y(t) = y(t - dt) + (dy/dt) * dt$

INIT $y = 0 \{m\}$

INFLOWS:

$dy/dt = v$

$\alpha = 30 * \pi / 180 \{rad\}$

$F_{peso} = m * g$

$g = -9.81 \{m/sec^2\}$

$m = 1 \{kg\}$

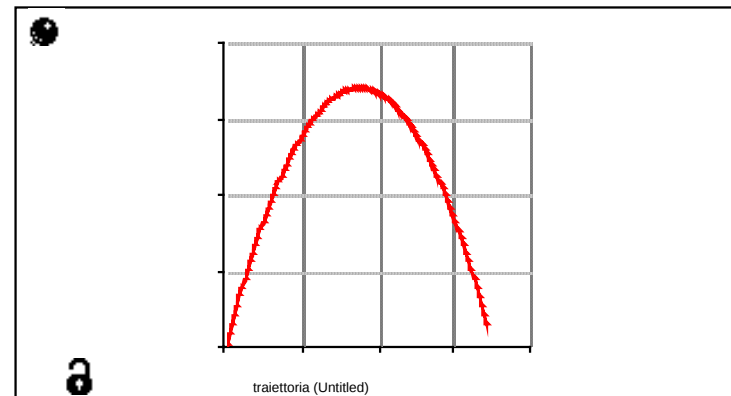
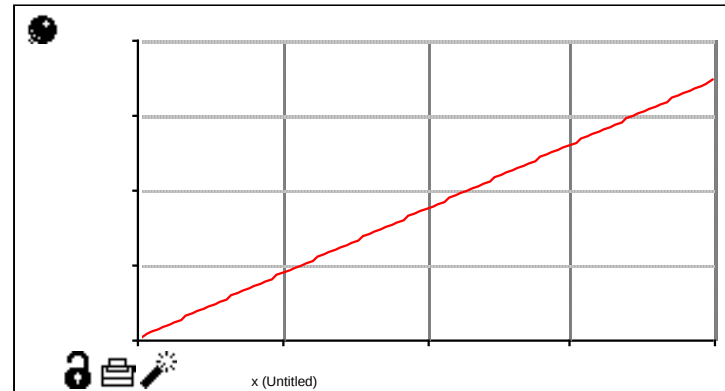
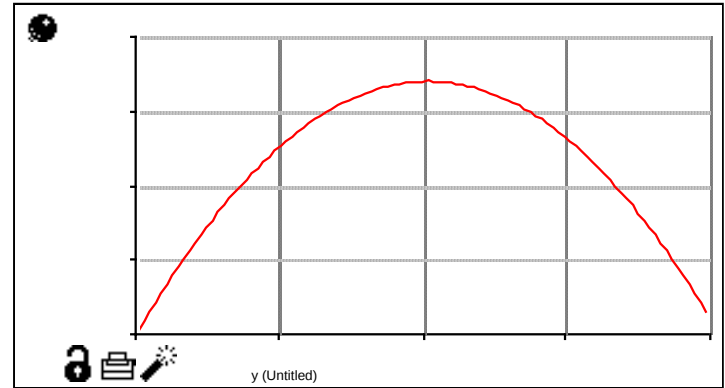
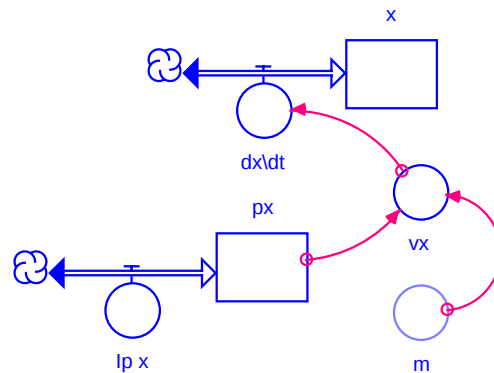
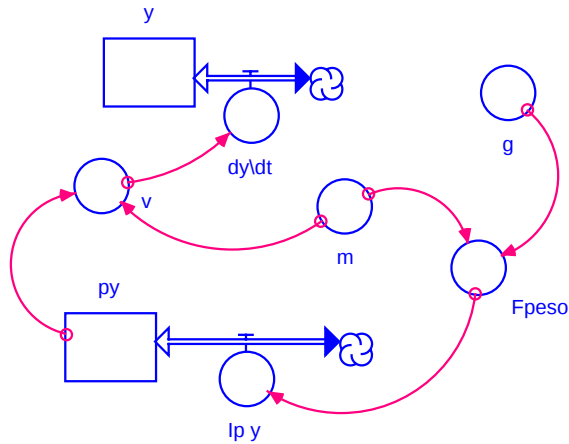
$v = py / m$

$v_o = 20 \{m/sec\}$

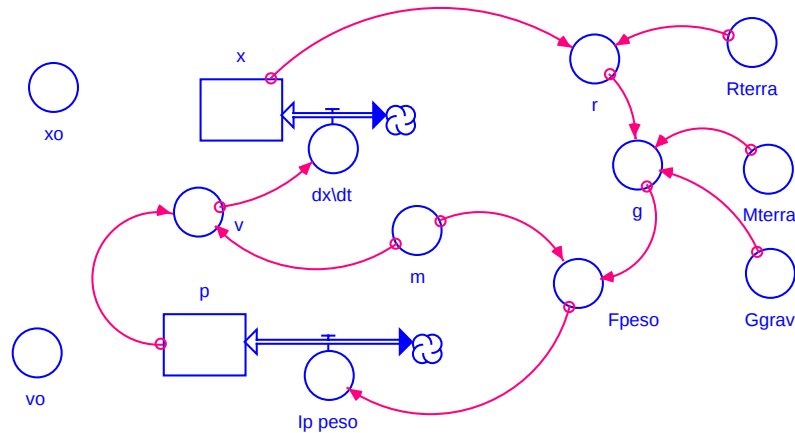
$vx = px / m$

$vx0 = v_o * \cos(\alpha)$

$vy0 = v_o * \sin(\alpha)$



lancio verticale verso l'alto
in generale (senza attrito con l'aria)



$$p(t) = p(t - dt) + (Ip_peso) * dt$$

$$\text{INIT } p = vo * m$$

INFLOWS:

$$Ip_peso = Fpeso$$

$$x(t) = x(t - dt) + (dx/dt) * dt$$

$$\text{INIT } x = 0 \{m\}$$

INFLOWS:

$$dx/dt = v$$

$$Fpeso = m * g$$

$$g = -Ggrav * Mterra / r^2$$

$$Ggrav = 6.67e-11 \{N.m^2/kg^2\}$$

$$m = 1 \{kg\}$$

$$Mterra = 5.98e24 \{kg\}$$

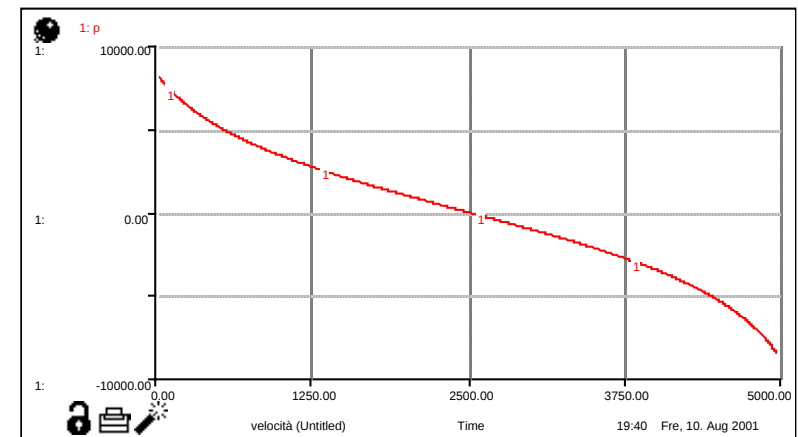
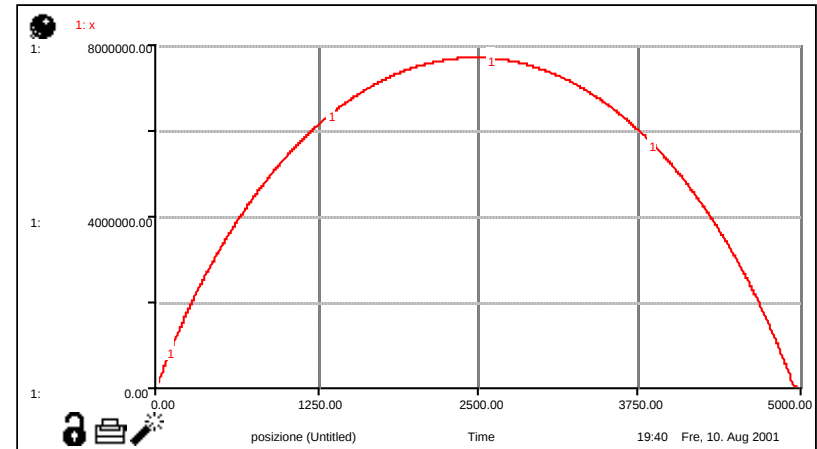
$$r = Rterra + x$$

$$Rterra = 6.37e6 \{m\}$$

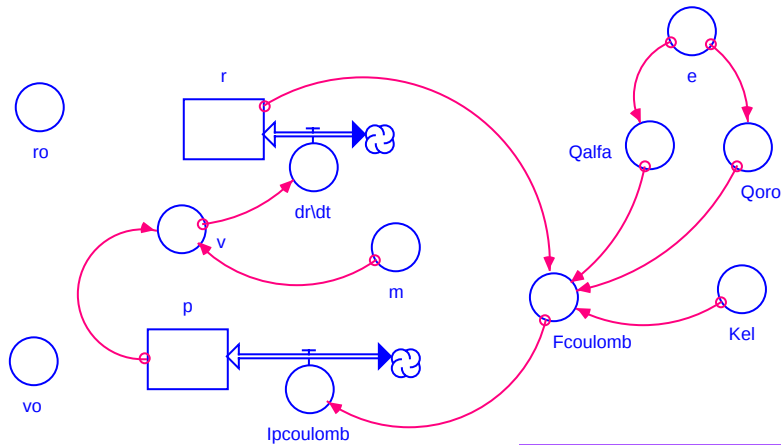
$$v = p / m$$

$$vo = 8.28e3 \{m/sec\}$$

$$xo = 0 \{m\}$$



particella alfa contro nucleo di oro



$$p(t) = p(t - dt) + (Ip coulomb) * dt$$

$$\text{INIT } p = vo * m$$

INFLOWS:

$$Ip coulomb = F coulomb$$

$$r(t) = r(t - dt) + (dr/dt) * dt$$

$$\text{INIT } r = ro$$

INFLOWS:

$$dr/dt = v$$

nel modello si
assume un nucleo di
oro
di massa "infinita"
che resta fermo nella
posizione iniziale
(scelta: origine)

$$e = 1.6e-19 \{Clb\}$$

$$F coulomb = -Kel * Qalfa * Qoro / (r * r)$$

$$Kel = 9e9 \{N.m^2 / Clb^2\}$$

$$m = 1.67 * 4e-27 \{kg\}$$

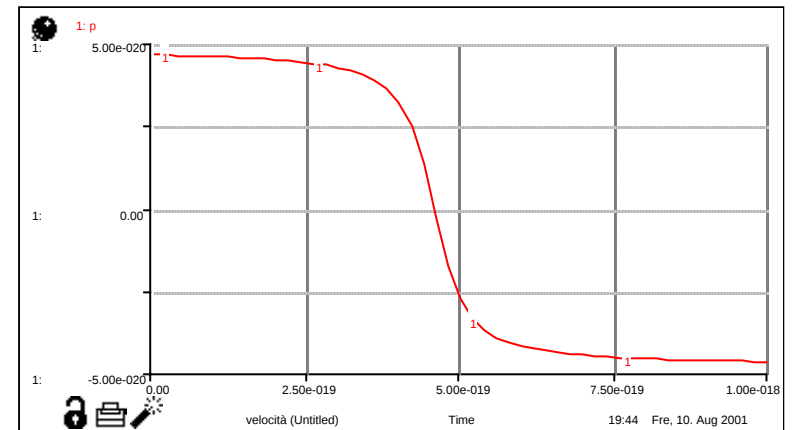
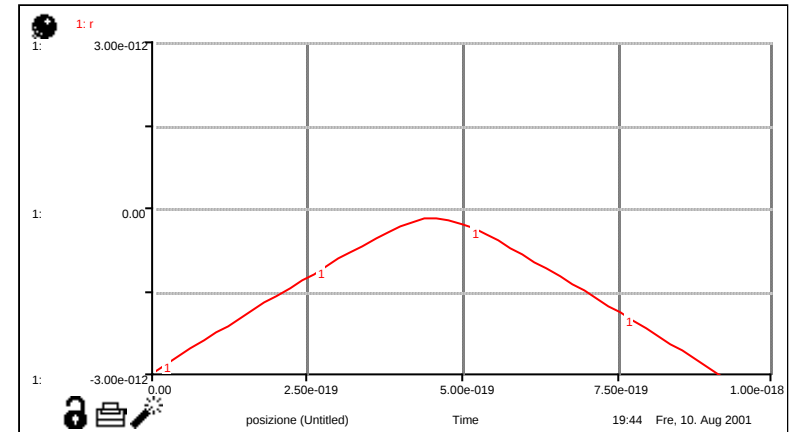
$$Qalfa = 2 * e$$

$$Qoro = 79 * e$$

$$ro = -3e-12 \{m\}$$

$$v = p/m$$

$$vo = 0.7e7 \{m/sec\}$$



5.a Diffusione coulombiana (esperienza di Rutherford)

$$px(t) = px(t - dt) + (I_{px}) * dt$$

$$\text{INIT } px = vx0 * malfa$$

INFLOWS:

$$I_{px} = fx$$

$$py(t) = py(t - dt) + (I_{py}) * dt$$

$$\text{INIT } py = vyo * malfa$$

INFLOWS:

$$I_{py} = fy$$

$$x(t) = x(t - dt) + (dx/dt) * dt$$

$$\text{INIT } x = x0$$

INFLOWS:

$$dx/dt = px/malfa$$

$$y(t) = y(t - dt) + (dy/dt) * dt$$

$$\text{INIT } y = y0$$

INFLOWS:

$$dy/dt = py/malfa$$

$$d = \text{SQRT}(x*x + y*y)$$

$$e = 1.602\text{E-}19 \{ \text{Clb} \}$$

$$\text{forza_coulomb} = Q_{\text{alfa}} * Q_{\text{Au}} / (d*d*4*PI*8.854\text{e-}12)$$

$$fx = \text{forza_coulomb} * x/d$$

$$fy = \text{forza_coulomb} * y/d$$

$$malfa = 4 * 1.67\text{e-}27 \{ \text{kg} \}$$

$$Q_{\text{alfa}} = 2 * e$$

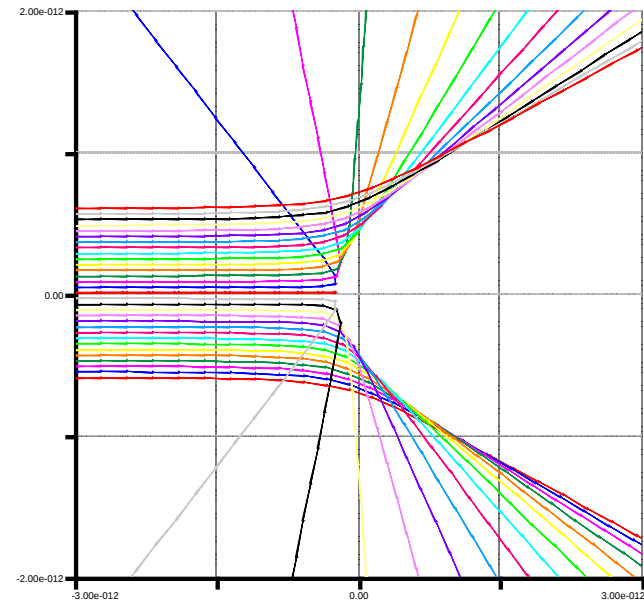
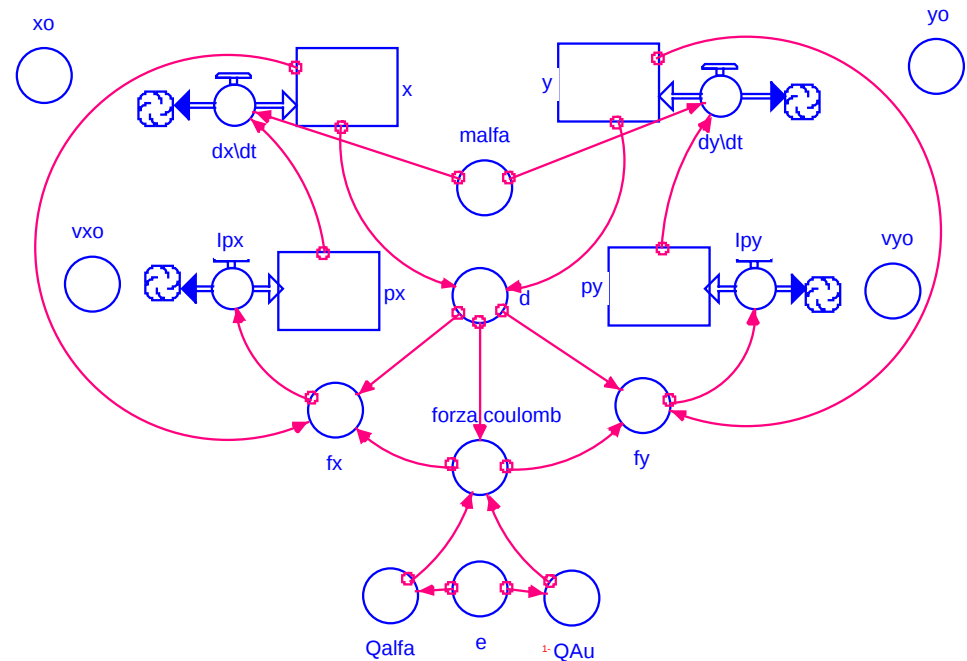
$$Q_{\text{Au}} = 79 * e$$

$$vx0 = 0.7\text{e}7 \{ \text{m/sec} \}$$

$$vy0 = 0$$

$$x0 = -3\text{E-}12 \{ \text{m} \}$$

$$y0 = 0$$



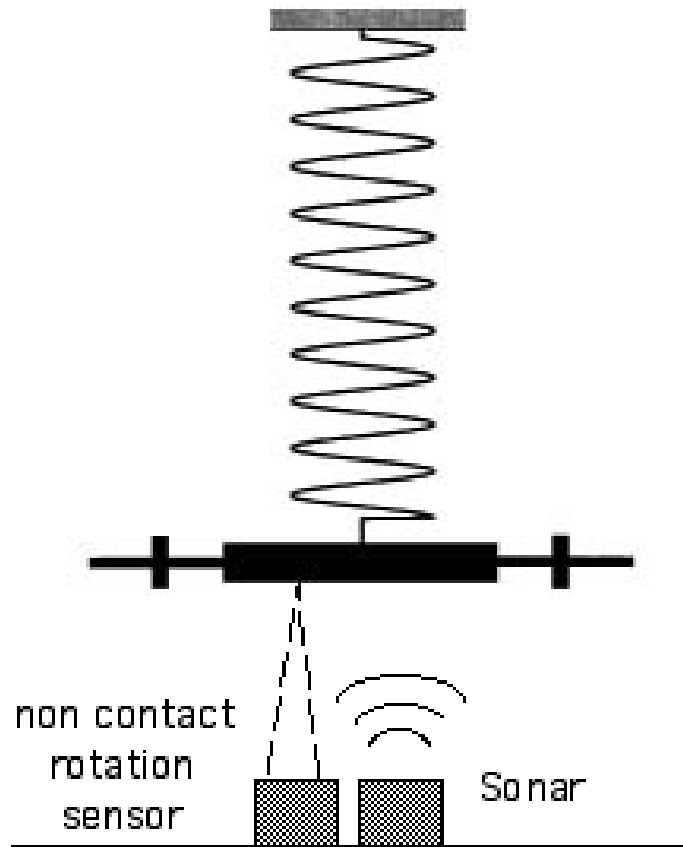
nel modello si assume un
nucleo di oro di massa
"infinita" che resta fermo
nella sua posizione iniziale

5 – Il pendolo di Wilberforce

Obiettivo

Partendo dalle osservazioni sperimentali relative a questo sistema con due gradi di libertà, attraverso la modellizzazione dinamica è possibile introdurre e illustrare alcune delle proprietà fondamentali delle soluzioni di equazioni differenziali lineari.

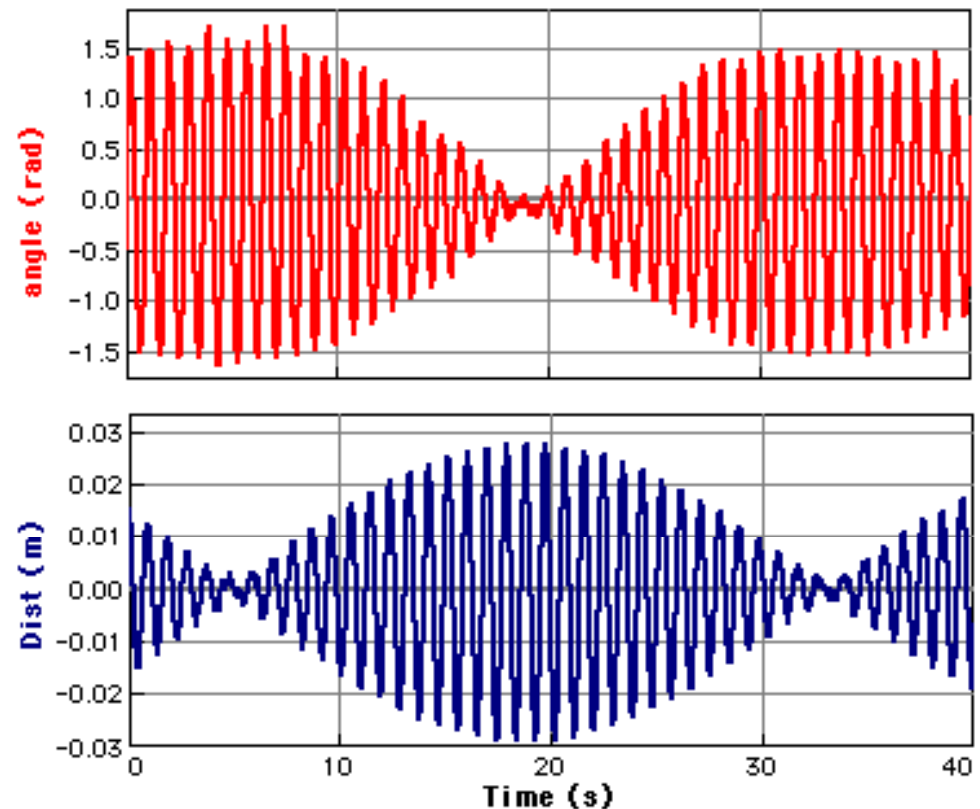
Il dispositivo sperimentale *



* Il presente lavoro è stato sviluppato in collaborazione con il prof. Giacomo Torzo (Università di Padova) cui si deve in particolare lo sviluppo dell'apparecchiatura in immagine nonché la raccolta dei dati sperimentali qui utilizzati.

Il comportamento “tipico”:

è facile mettere in moto il pendolo in modo che ad un osservatore lontano (che non nota l'oscillazione torsionale) sembri che l'oscillazione verticale dapprima si smorzi fino a cessare, poi, senza intervento esterno, prenda a **crescere nuovamente** come se il pendolo fosse spinto da una invisibile forza.



In particolare
nel caso di **BATTIMENTI** in esame si osserva:
periodo di battimento di 28.2 s,
31 oscillazioni con periodo di ca. 0.91s,
un leggero smorzamento.

Una prima interpretazione:

- oscillazioni (sincrone) accoppiate
- modi propri di oscillazione
- sensibilità alle condizioni iniziali

Sperimentalmente:

Massa* $m = 0.489 \text{ kg}$

Costante elastica molla $k = 23.5 \text{ N/m}$

Momento d'inerzia* $I = 1.52 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2/\text{rad}^2$

Costante di torsione $D = 7.30 \cdot 10^{-3} \text{ N.m/rad}^2$

* Valori corretti tenendo conto anche del contributo della molla.

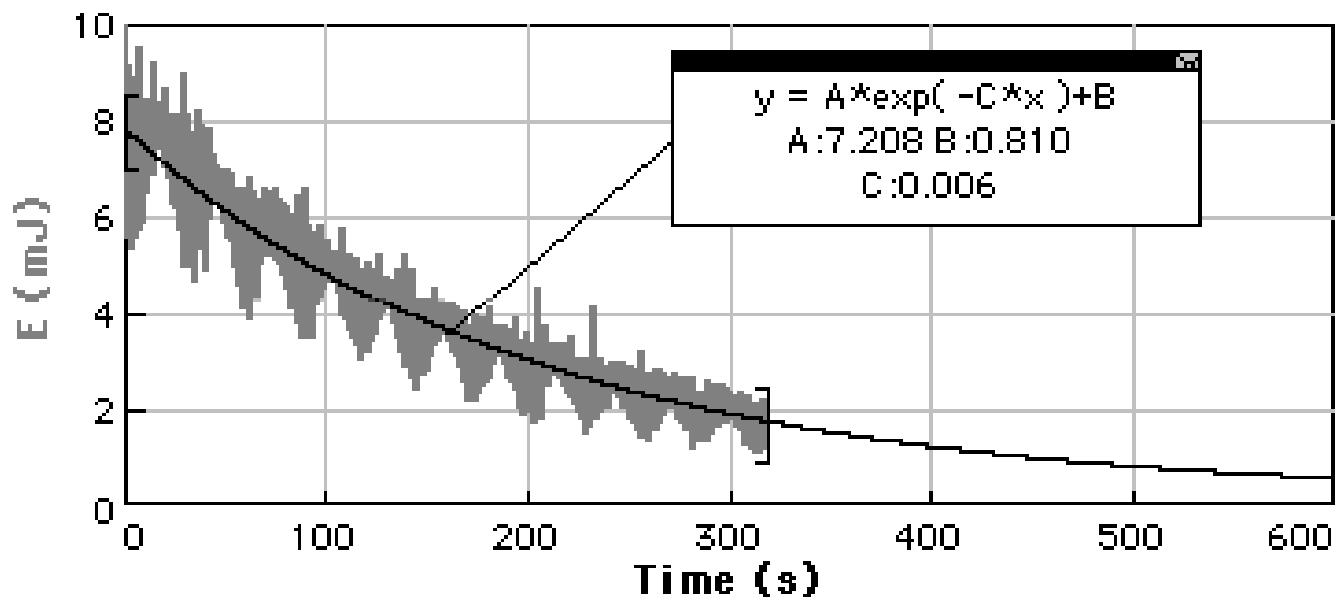
Per periodi di oscillazione si hanno i seguenti valori:

$$T_{traslazione} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.489 \text{ kg}}{23.5 \text{ N / m}}} = 0.906 \text{ s}$$

$$T_{torsione} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{I}{D}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1.52 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{rad}^2}{7.30 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rad}^2}} = 0.906 \text{ s}$$

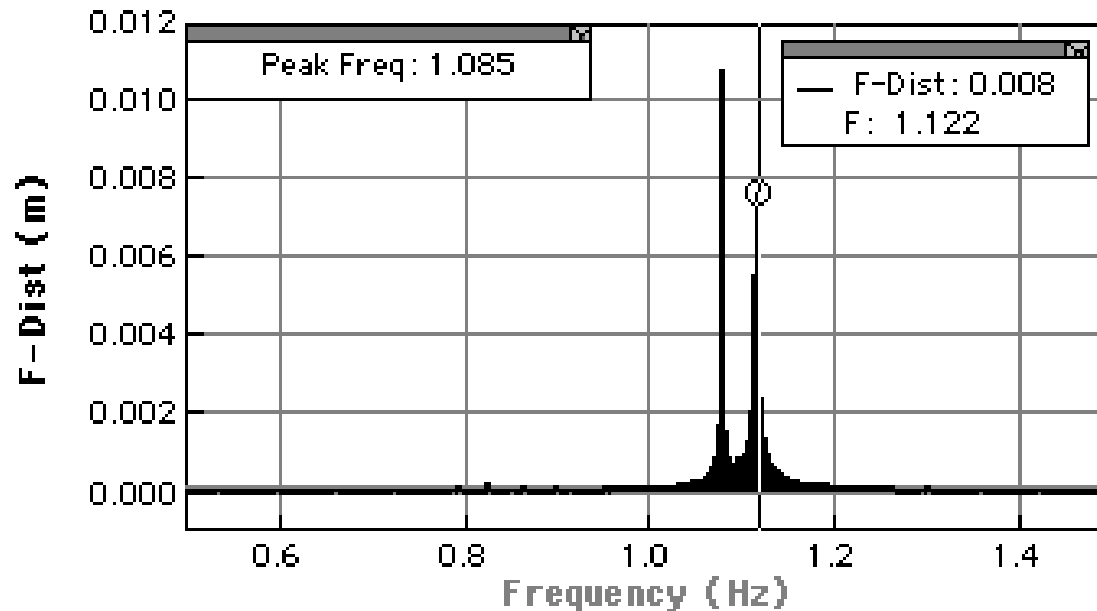
dove i parametri sperimentali sono stati scelti in modo da avere il **MEDESIMO** valore per i due periodi: questa è la condizione necessaria affinché si producano i battimenti osservati (ossia per avere un **trasferimento totale dell'energia** da un moto all'altro).

Per quanto riguarda lo smorzamento si osserva un andamento di tipo esponenziale; qui di seguito è riportata l'energia dell'oscillazione in funzione del tempo:



Il tempo caratteristico risulta essere di ca. 170 s.

L'analisi di Fourier per l'oscillazione di battimento:



sono chiaramente riconoscibili due picchi per $\nu_1 = 1.122 \text{ Hz}$ e $\nu_2 = 1.085 \text{ Hz}$ che vengono interpretati come frequenze proprie associate ai **modi normali** del sistema.

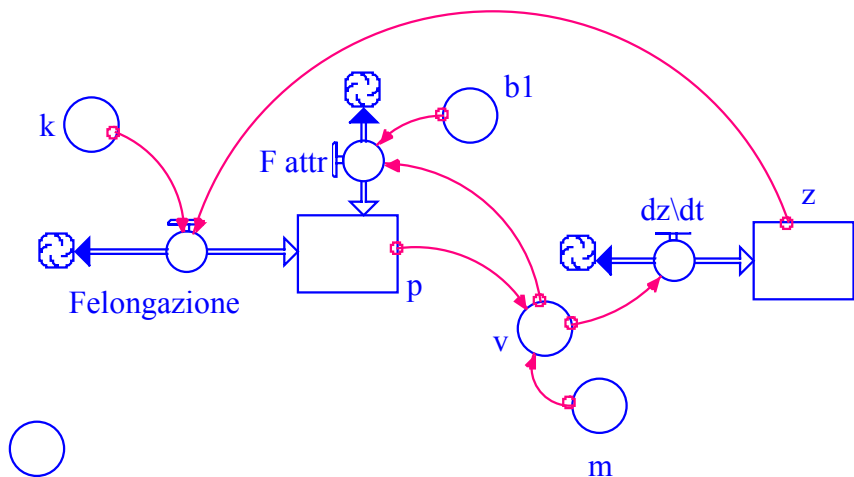
La modellizzazione:

analisi delle forze e dei momenti meccanici agenti
e integrazione delle equazioni del moto risultanti:

- 1- l'oscillazione traslazionale
- 2- l'oscillazione torsionale
- 3- l'interazione
- 4- aspetti energetici

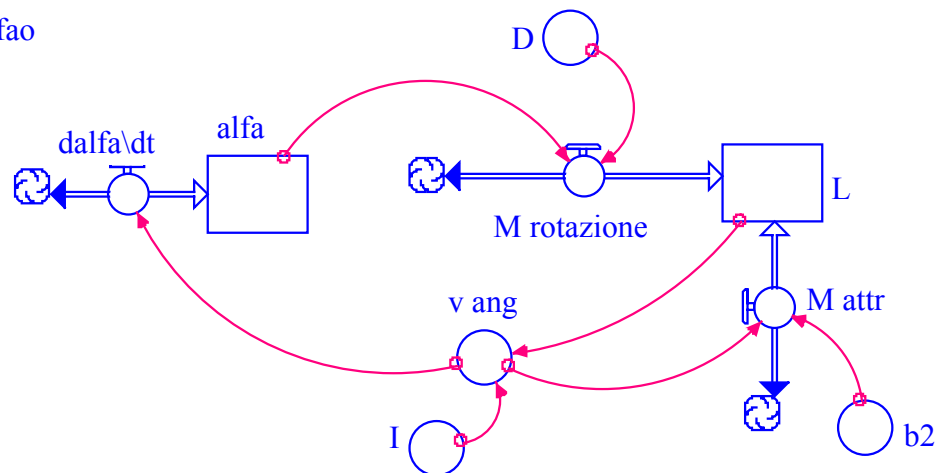
Referenza:

R.E. Berg, T.S. Marshall, *Wilberforce pendulum oscillations and normal modes*, Am.J.Phys, 59 (1) January 1991



zo

alfao



$$z(t) = z(t - dt) + (dz/dt) * dt$$

$$\text{INIT } z = z_0$$

$$dz/dt = v$$

$$p(t) = p(t - dt) + (F_{\text{elongazione}} + F_{\text{attr}}) * dt$$

$$\text{INIT } p = 0$$

$$F_{\text{elongazione}} = -k * z$$

$$F_{\text{attr}} = -b1 * v$$

$$k = 23.5 \text{ \{N/m\}}$$

$$b1 = 3.3e-3 \text{ \{N.s/m\}}$$

$$m = 0.489 \text{ \{kg\}}$$

$$v = p/M_{\text{tot}}$$

$$z_0 = 0.05 \text{ \{m\}}$$

$$\alpha(t) = \alpha(t - dt) + (d\alpha/dt) * dt$$

$$\text{INIT } \alpha = \alpha_{\text{ao}}$$

$$d\alpha/dt = v_{\text{ang}}$$

$$L(t) = L(t - dt) + (M_{\text{rotazione}} + M_{\text{attr}}) * dt$$

$$\text{INIT } L = 0$$

$$M_{\text{rotazione}} = -D * \alpha$$

$$M_{\text{attr}} = -b2 * v_{\text{ang}}$$

$$b2 = 0.95e-6 \text{ \{N.m:s/rad\}}$$

$$D = 7.305e-3 \text{ \{N.m/rad\}}$$

$$I = 1.52e-4 \text{ \{kg.m}^2\text{/rad}^2\}}$$

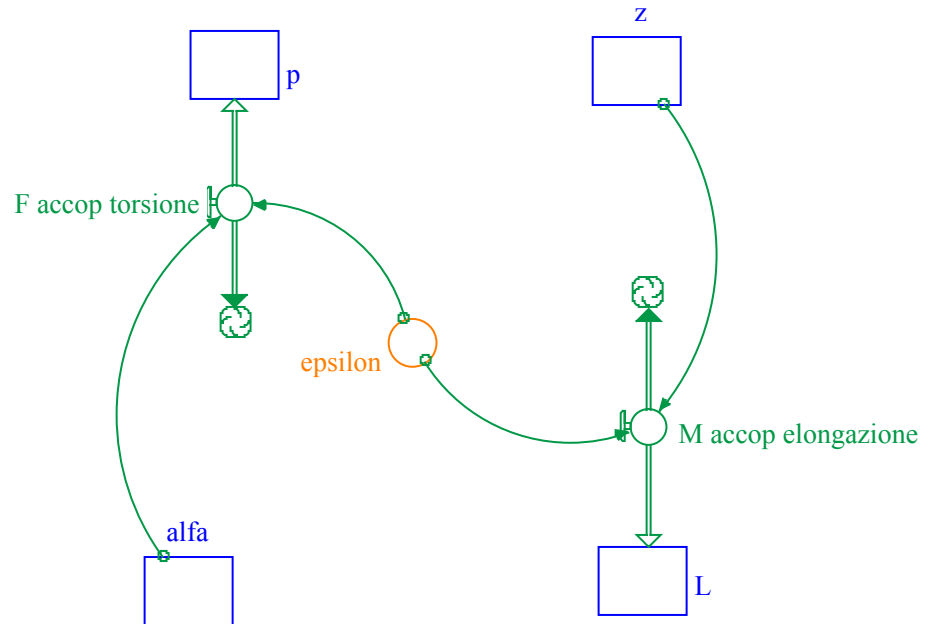
$$v_{\text{ang}} = L/I$$

$$\alpha_{\text{ao}} = 3 \text{ \{rad\}}$$

L'interazione:

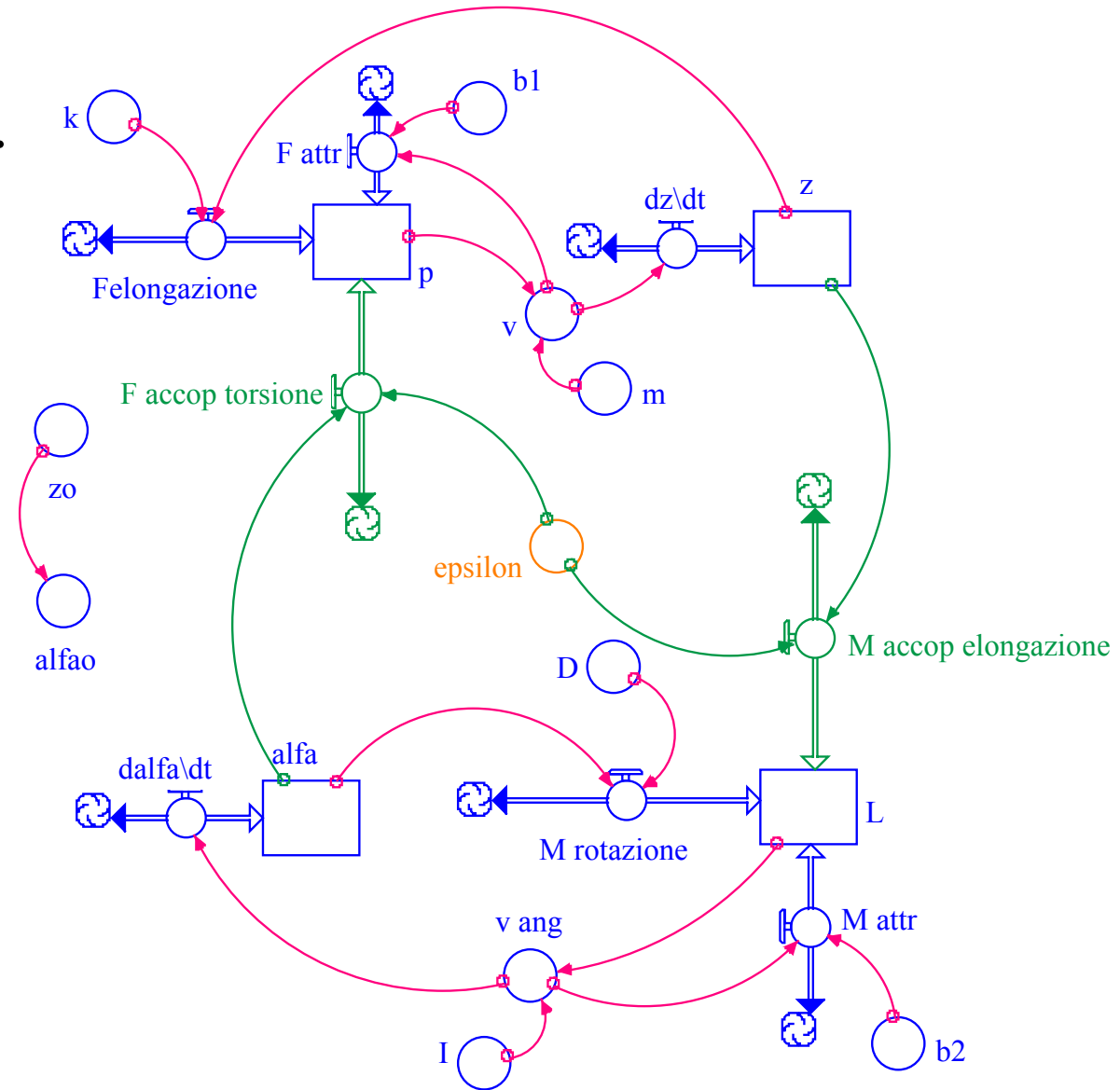
$$p(t) = p(t - dt) + (F \text{ elongazione} + \text{F accop torsione} + F \text{ attr}) * dt$$

$$\begin{aligned} F \text{ accop torsione} &= -\epsilon * \alpha \\ M \text{ accop elongazione} &= -\epsilon * z \\ \epsilon &= 13.4e-3 \text{ \{N/rad\}} \end{aligned}$$



$$L(t) = L(t - dt) + (\text{M accop elongazione} + M \text{ rotazione} + M \text{ attr}) * dt$$

Il modello completo ...



Oscillazioni libera
(SENZA accoppiamento)

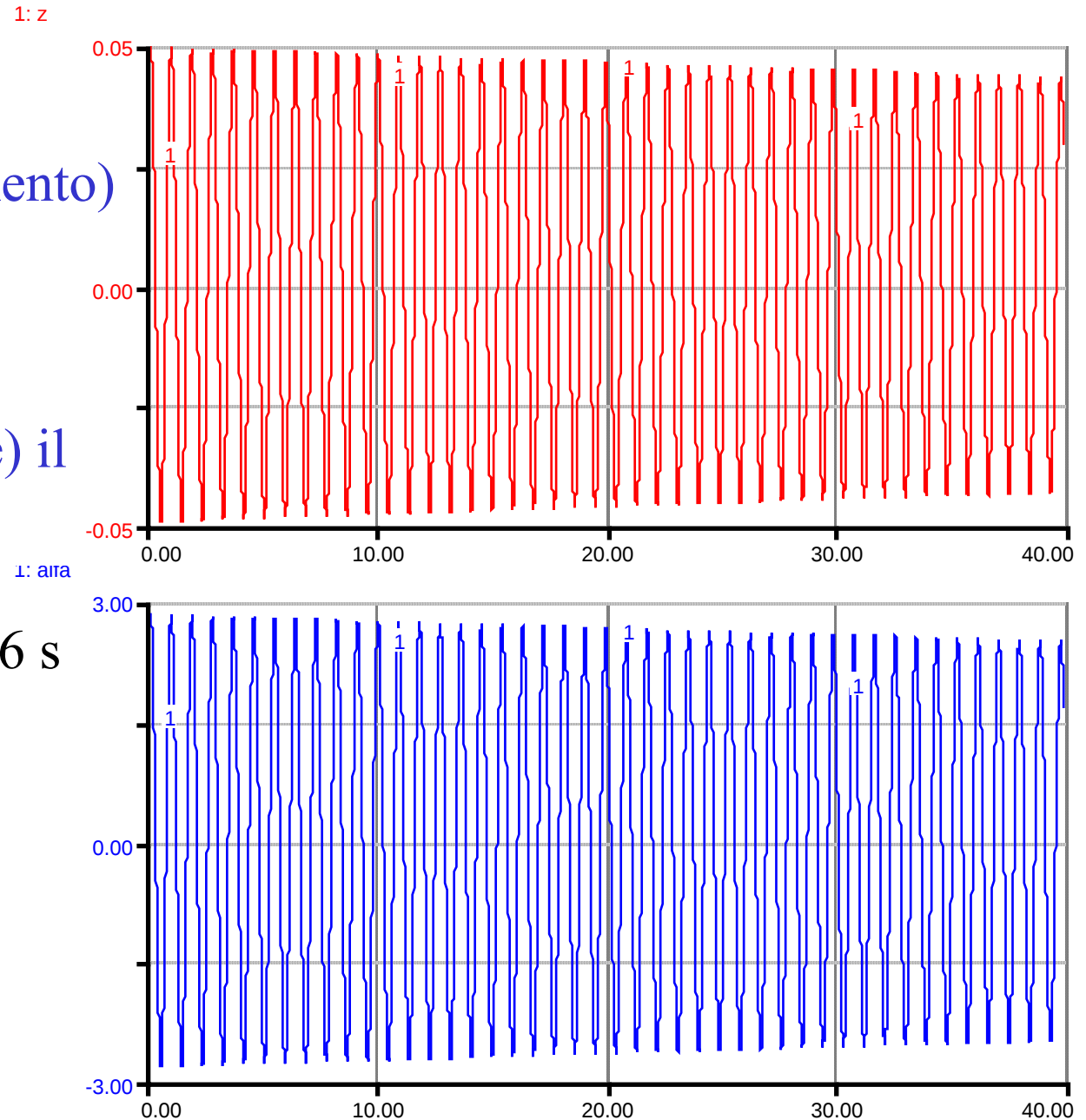
$$\varepsilon = 0$$

Le due oscillazioni
hanno (praticamente) il
medesimo periodo:

$$T_z = T_{\text{alfa}} = T_0 = 0.906 \text{ s}$$

Ossia:

$$v_z = v_{\text{alfa}} = v_0$$



BATTIMENTO

Condizioni iniziali

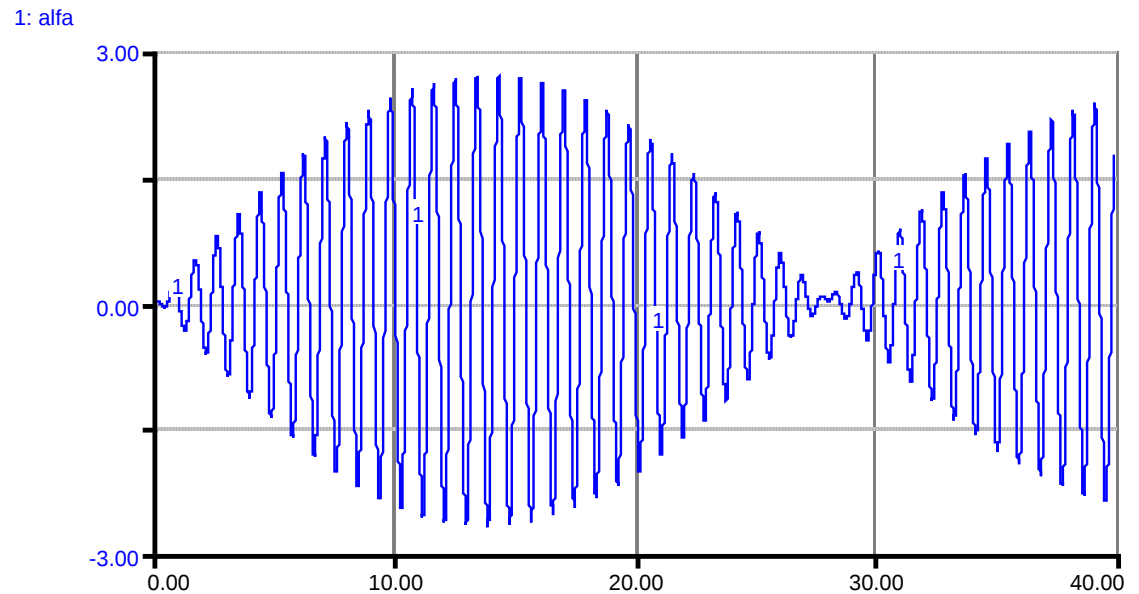
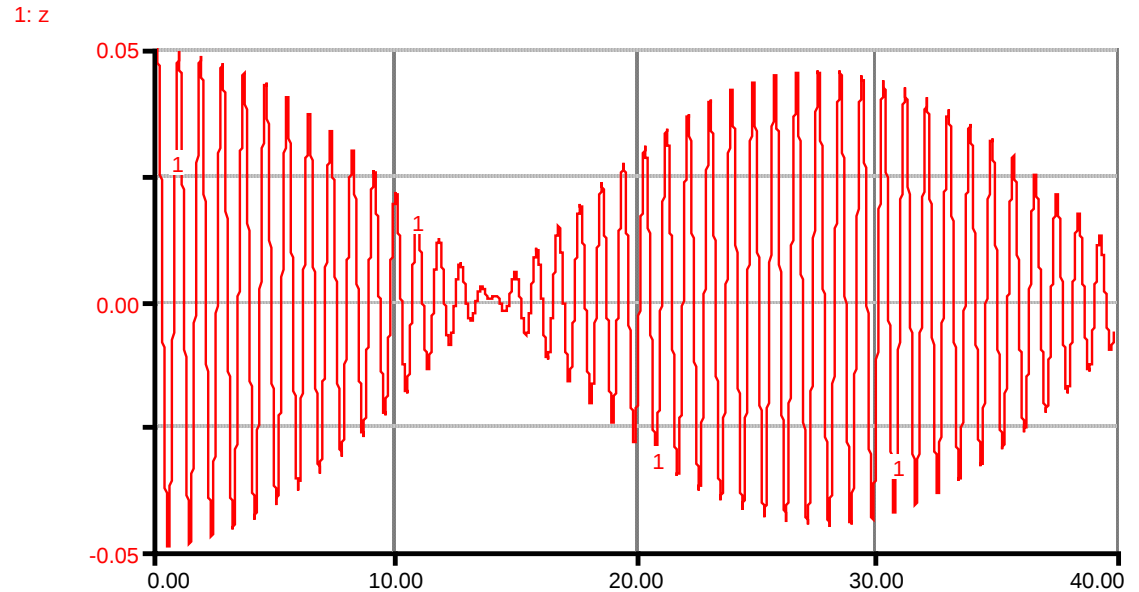
$$z_0 = 5 \text{ cm} \quad \alpha_0 = 0$$

Traslazione

Rotazione

$$T_{\text{batt}} = 28.2 \text{ s}$$

$$N = 31 \text{ oscillazioni}$$



OSCILLAZIONI PROPRIE (con smorzamento)

Condizioni iniziali:

$$\alpha_0 = + z_0 / \Gamma$$

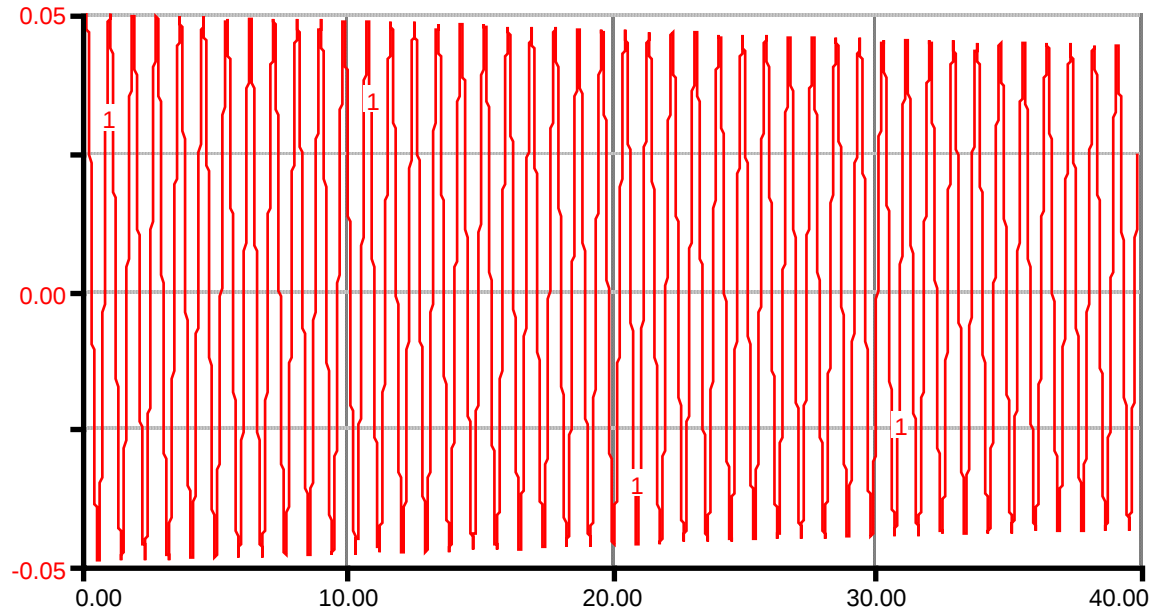
$$T_1 = 0.893 \text{ s}$$

$$\nu_1 = 1.12 \text{ Hz}$$

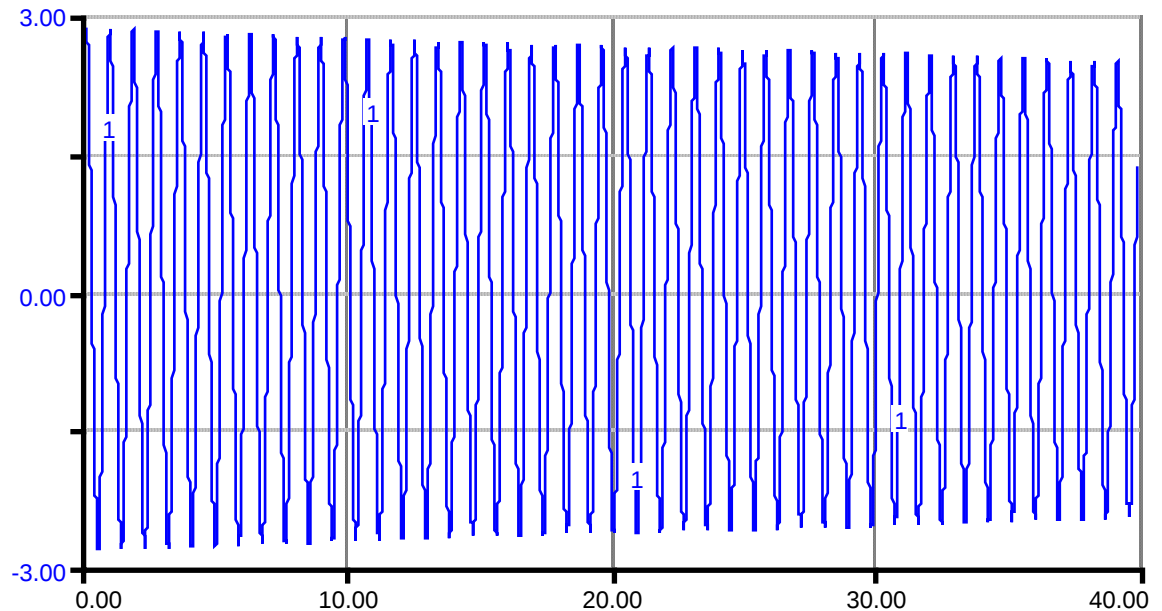
$Oss :$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{I}{m}} = 0.017494 \text{ m}$$

1: z



1: alfa



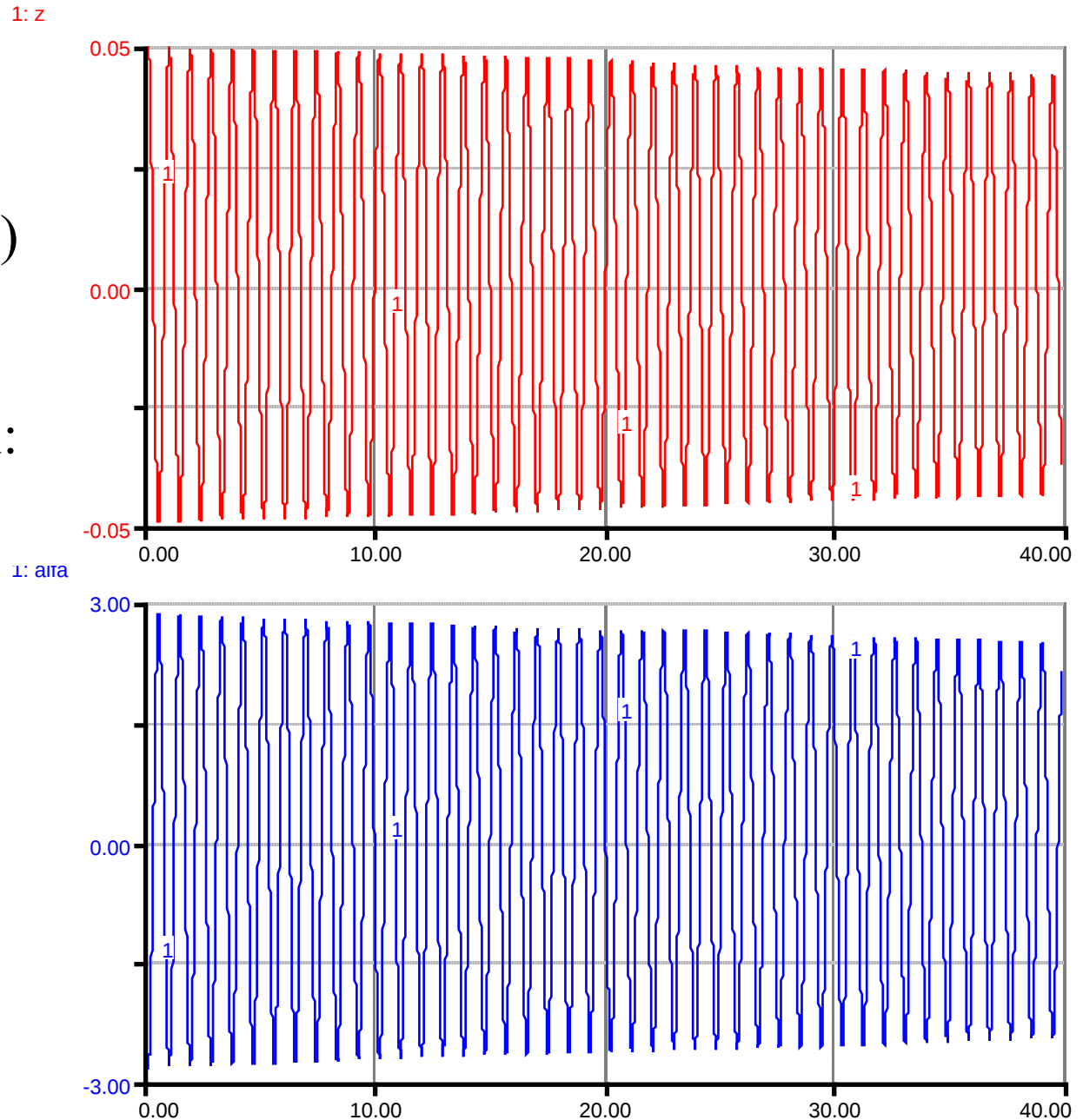
OSCILLAZIONI PROPRIE (con smorzamento)

Condizioni iniziali:

$$\alpha_0 = -z_0 / \Gamma$$

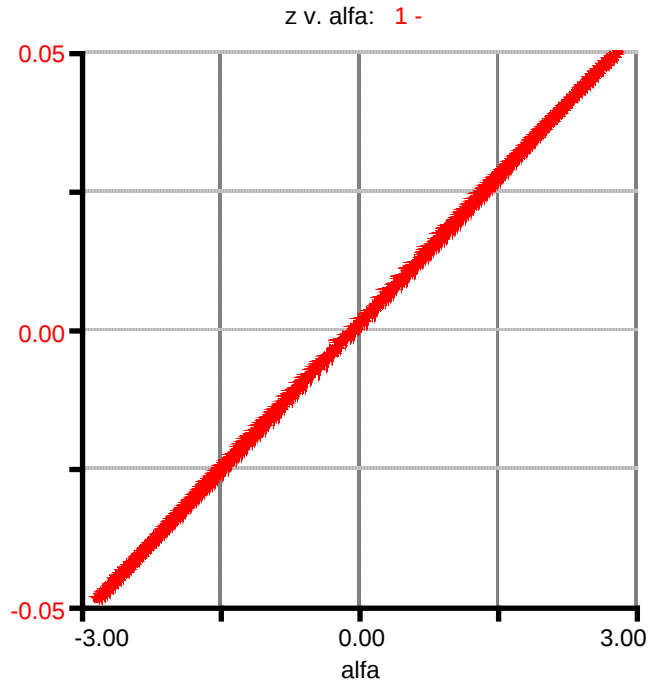
$$T_2 = 0.920 \text{ s}$$

$$\nu_2 = 1.086 \text{ Hz}$$



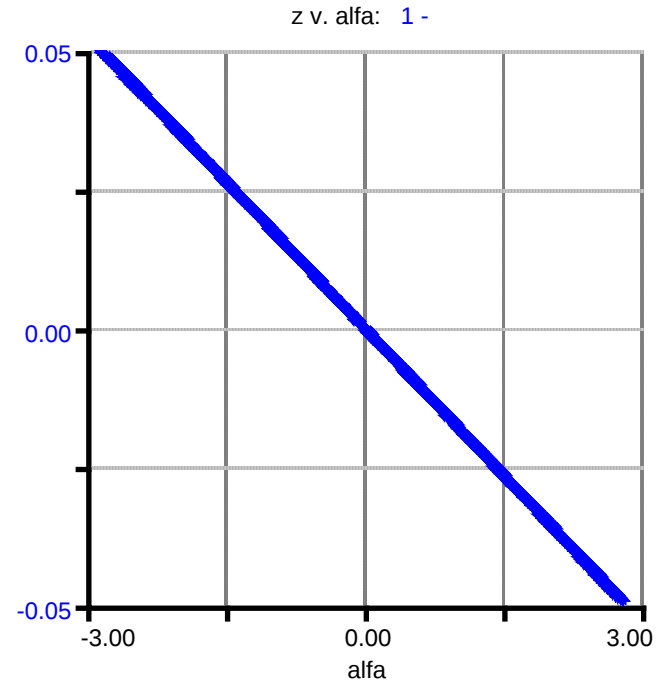
Osservazione della fase relativa (piano z-alfa)

Oscillazioni proprie



$$\alpha_o = + z_o / \Gamma$$

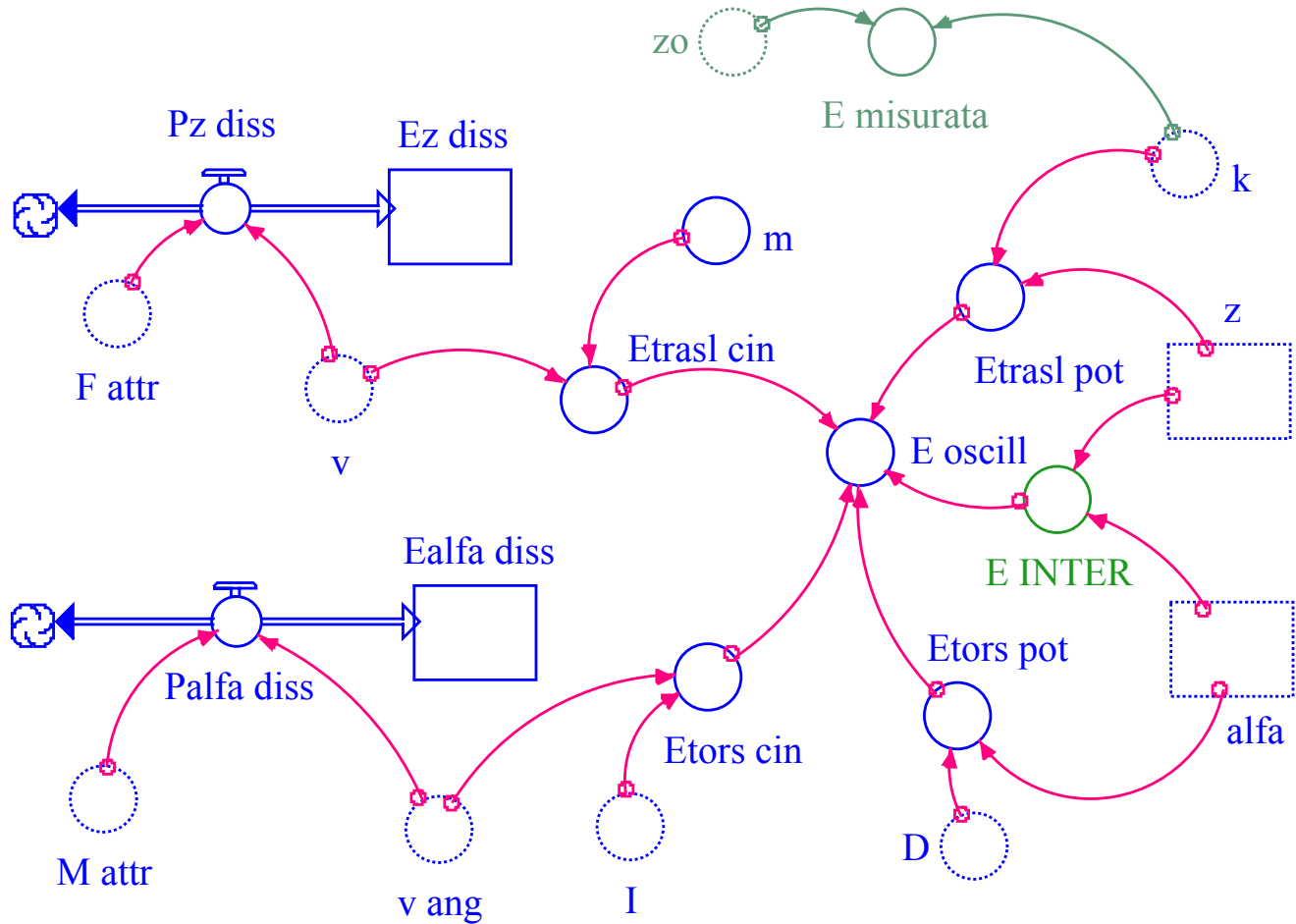
v_1



$$\alpha_o = - z_o / \Gamma$$

v_2

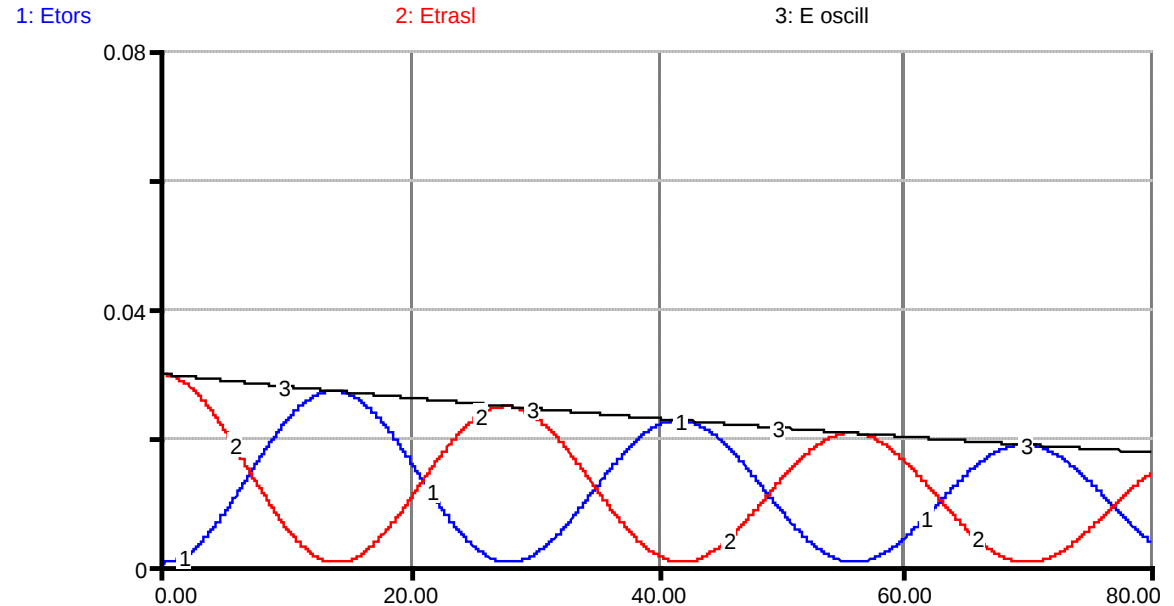
... e gli aspetti energetici



ASPETTI ENERGETICI

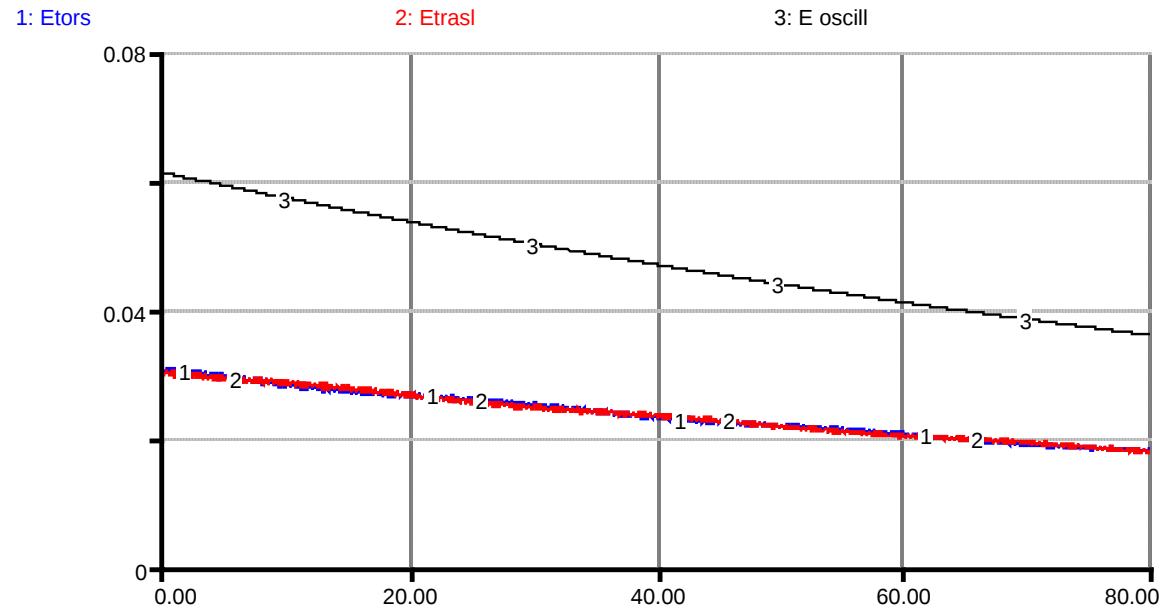
Battimento:

condizioni iniziali
 $z_0 = 5 \text{ cm}$ $\alpha_0 = 0$



Oscillazioni proprie:

condizioni iniziali
 $z_0 = 5 \text{ cm}$
 $\alpha_0 = + z_0 / \Gamma$

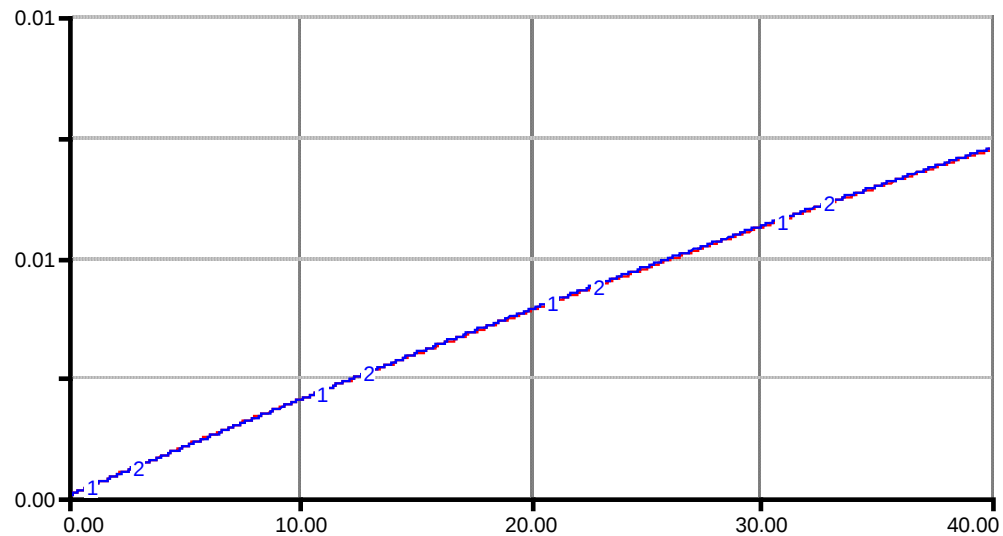


Può essere interessante notare che per le due oscillazioni normali (modi propri) le coordinate **z** e *alfa* hanno una fase relativa FISSA (rispettivamente 0 o π) SOLO quando la dissipazione dell'energia nei due modi avviene con lo stesso ritmo, ossia quando la potenza dissipata nei due modi risulta essere uguale istante per istante.

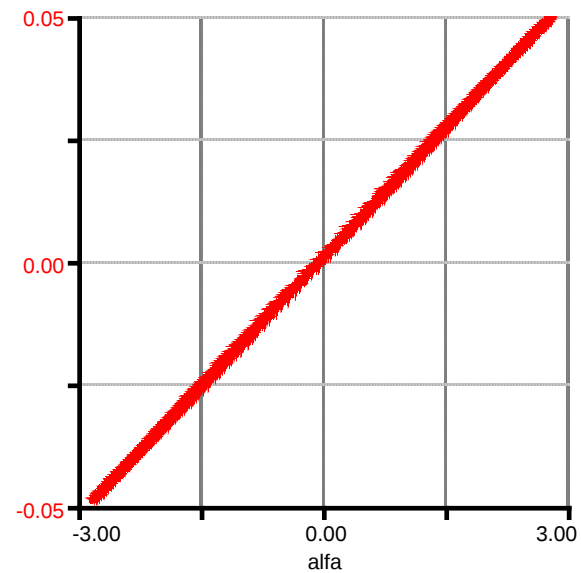
Come esempio qui di seguito è riportato il confronto tra la situazione finora considerata e quella che si ottiene aumentando di un fattore 100 la dissipazione nel moto di torsione:

1: Ealfa diss

2: Ez diss

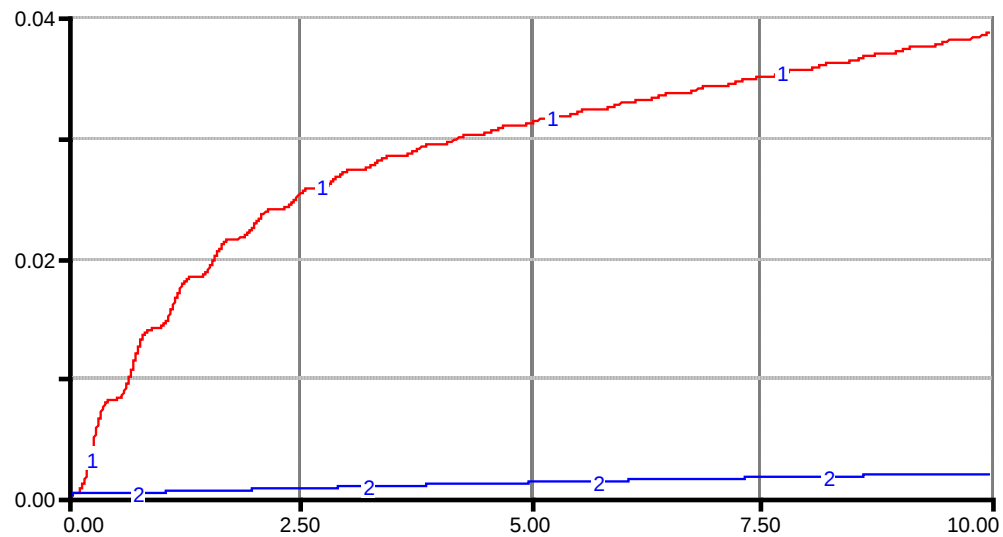


z v. alfa: 1 -

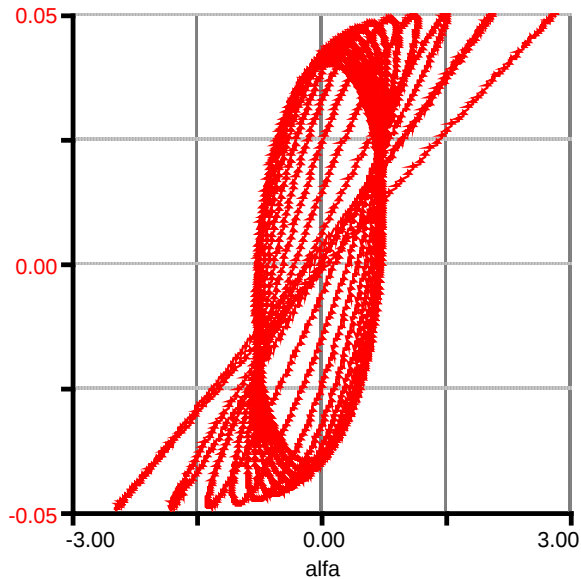


1: Ealfa diss

2: Ez diss



z v. alfa: 1 -



Pendolo di Wilberforce: riassunto dei risultati della modellizzazione

Costante accoppiamento ε (N/rad)	Periodo calcolato (misurato dal grafico) T (s)	Frequenza ν (Hz)		osservazioni
0	$39.88/44 = 0.906$	1.103	ν_0	Condizioni iniziali: z_0 e α_0 qualsiasi I parametri sperimentali sono scelti in modo che $\nu_0 = \nu_z = \nu_\alpha$
$13.4 \cdot 10^{-3}$	$39.29/44 = 0.893$	1.120	ν_1	Condizioni iniziali: $\alpha_0 = + z_0 / \Gamma$
$13.4 \cdot 10^{-3}$	$39.59/43 = 0.920$	1.086	ν_2	Condizioni iniziali: $\alpha_0 = - z_0 / \Gamma$
$13.4 \cdot 10^{-3}$	28.2	0.035	ν_{batt}	Condizioni iniziali: $\alpha_0 = 0$ z_0 qualsiasi Vale la relazione $\nu_{batt} = \nu_1 - \nu_2$

FINE

Grazie per l'attenzione!