Lezione VI

Il calcolo geometrico, in generale, consiste in un sistema di operazioni a eseguirsi su enti geometrici, analoghe a quelle che l'algebra fa sopra i numeri. Esso permette di esprimere con formule i risultati di costruzioni geometriche, di rappresentare con equazioni proposizioni di geometria e di sostituire una trasformazione di equazioni a un ragionamento.
Giuseppe Peano

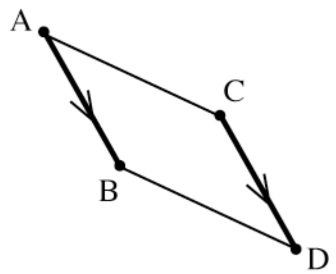
1. I vettori: estensioni di dimensione uno

La lezione inizia con la lettura della prefazione di Grassmann alla sua *Ausdehnungslehre*. che viene distribuita agli studenti.

Un punto che si muove di moto rettilineo da una posizione A a una posizione B descrive un **vettore**. Il segmento orientato AB (da A a B) si può rappresentare con una freccia che ne indica il verso di percorrenza.

In un vettore non conta il punto iniziale ciò che conta è la *direzione* del movimento il *verso* e la *lunghezza* del segmento percorso.
Nella figura seguente abbiamo diversi segmenti orientati che rappresentano lo stesso vettore

Il movimento infatti che porta dal punto iniziale al punto finale è lo stesso ciò che cambia è solo la posizione del punto iniziale.
Un vettore che porta un punto A nel punto B si indica con $\vec{AB}$. La freccia che abbiamo posto sul segmento serve a distinguere il vettore dal segmento: AB denota il segmento orientato che inizia in A e finisce in B mentre $\vec{AB}$ denota il movimento che porta A in B cioè il vettore che, se applicato nel punto A, lo porta in B.
Abbiamo che $\vec{AB} = \vec{CD}$ se e solo se i 4 punti sono vertici di un parallelogramma e i due segmenti AB e CD sono orientati nello stesso verso



Infatti il segmento orientato CD ha la stessa lunghezza di AB, perché lati opposti di un parallelogramma e la stessa direzione di AB perché le rette AB e CD sono parallele.
Questo permette di disegnare infiniti segmenti che rappresentano lo stesso vettore.

Il parallelogramma ci è anche utile per costruire, dato un vettore $\vec{v} = \vec{AB}$ e un punto O, il punto X che si ottiene applicando il vettore $\vec{v}$ ad O. Detto in altri termini abbiamo.

Dato un punto O *e un vettore* $\vec{v}$ *esiste sempre un punto* X *tale che* $\vec{v} = \vec{OX}$.
La seguente figura animata illustra dinamicamente la situazione
1.Vettore

La cosa fondamentale consiste nel fatto che i vettori possono sommarsi come i numeri.
Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori. Scegliamo un punto A dello spazio e applichiamo il vettore $\vec{v}$ ad A, otteniamo il segmento orientato AB, applichiamo ora il vettore $\vec{w}$ a B otteniamo il segmento orientato BC il movimento composto che porta A in C e si ottiene andando da A in B e poi da B in C è la somma dei due vettori. La formula seguente riassume quanto detto

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

La seguente figura animata illustra dinamicamente la situazione
2.Somma

Dato che il vettore somma è ottenuto applicando prima il movimento $\vec{v}$ e poi $\vec{w}$ il risultato non dipende dal punto iniziale A.

Introduciamo lo *zero vettore* $\vec{0}$ cioè il movimento che non muove nulla rappresentato dal segmento AA di lunghezza nulla. La formula precedente quando C=A diventa

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$$

il vettore $\vec{v} = \vec{AB}$ porta il punto A in B e il vettore $\vec{BA}$ porta B in A, ritorna indietro, ripercorre il cammino AB nella direzione opposta. Tale vettore che si chiama l'opposto di $\vec{v}$ è indicato con $-\vec{v}$ e ha la proprietà che

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

Come nell'algebra ordinaria la somma dell'opposto da luogo alla sottrazione e per semplificare le notazioni si scrive

$$\vec{v} + (-\vec{w}) = \vec{v} - \vec{w}$$

La regola dei segni significa semplicemente che se faccio un movimento e poi torno indietro e poi rivado avanti, sempre con lo stesso movimento, il risultato finale è il movimento iniziale cioè:

$$-(-\vec{v}) = \vec{v}$$

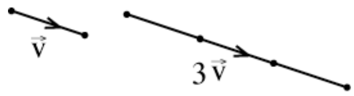
La cosa interessante dal punto di vista algebrico è che questa operazione tra vettori, tra estensioni di dimensione 1, ha le proprietà fondamentali della ordinaria somma tra i numeri relativi. Non solo esiste uno zero vettore, non solo ogni vettore ha un vettore opposto, ma anche questa operazione è associativa e commutativa.
Proprietà associativa
Dati tre vettori qualunque $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ risulta che

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

La dimostrazione di questa proprietà si ricava facilmente dalla seguente figura animata.
3.Associatività

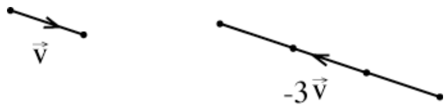
Sommando più vettori possiamo, stante vale questa proprietà, non usare le parentesi che indicano le somme parziali che via via si eseguono per ottenere il risultato finale.
In particolare la somma di un vettore per se stesso n volte sarà indicato con

$$n\vec{v} = \vec{v} + \vec{v} + \dots + \vec{v}$$

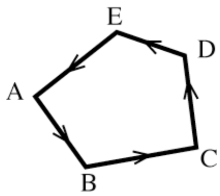


Questo vettore avrà la stessa direzione di $\vec{v}$, lo stesso verso e una lunghezza uguale a n volte la lunghezza di $\vec{v}$. Ugualmente

$$-n\vec{v} = (-\vec{v}) + (-\vec{v}) + \dots + (-\vec{v})$$



è il vettore che ha la stessa direzione di $\vec{v}$, il verso opposto e lunghezza uguale a n volte la lunghezza di $\vec{v}$.
Abbiamo che la somma di n vettori è zero se e solo se il cammino che si esegue a partire da un punto A e andando da A a B col primo movimento e poi da B a C col secondo e da C a D col terzo fino all'esaurimento dei vettori, ci riporta al punto iniziale A, cioè se e solo se la poligonale ABCD... è chiusa.



Proprietà commutativa
Dati due vettori qualunque $\vec{v}$, $\vec{w}$ risulta che

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$

Ciò significa che il risultato finale non dipende dall'ordine col quale eseguo due movimenti.
La dimostrazione di questa proprietà si ricava facilmente dalla seguente figura animata.
4.Commutatività

Usando la proprietà associativa e commutativa possiamo dimostrare che

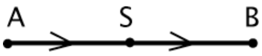
$$n(\vec{v} + \vec{w}) = n\vec{v} + n\vec{w}$$

per ogni numero intero n positivo o negativo.

Si propongono degli esercizi grafici sul concetto di vettore
Tavola 23
Le tavole seguenti chiedono di risolvere delle equazioni vettoriali
Tavola 24
Tavola 25

2. Centro di una configurazione di punti

Grassmann si serve di questa nuova algebra per studiare questioni geometriche e fisiche. Osserviamo intanto che il punto medio tra due punti A e B è quel punto S tale che $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$



e dato che $\overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{BS}$ il punto medio tra AB è quel punto S tale che

$$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} = \vec{0}$$

Viceversa un punto S che verifica la relazione precedente deve trovarsi sulla retta AB perché $\overrightarrow{SB}$ e $\overrightarrow{SA}$ hanno la stessa direzione e deve essere il punto medio perché $\overrightarrow{SB}$ e $\overrightarrow{SA}$ sono uguali ed opposti.
La proprietà di essere il punto medio di un segmento si traduce così in una equazione.
Grassmann estende il concetto di punto medio al caso di n punti A_1, A_2, ... , A_n e chiama *centro* della configurazione quel punto C tale che

$$\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{A_2C} + \ldots + \overrightarrow{A_nC} = \vec{0}$$

e indica una semplice costruzione geometrica per calcolare il punto C. Vediamo la costruzione nel caso di tre punti A_1, A_2, A_3. Grassmann dimostra usando la nuova algebra dei vettori da lui inventata, che

$$\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{A_2C} + \overrightarrow{A_3C} = \vec{0}$$

se e solo se, per ogni punto R accade che

$$\overrightarrow{RA_1} + \overrightarrow{RA_2} + \overrightarrow{RA_3} = 3\overrightarrow{RC}$$

La dimostrazione usa tutte le nuove regole di calcolo

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{RA_1} + \overrightarrow{RA_2} + \overrightarrow{RA_3} = 3\overrightarrow{RC} \Leftrightarrow \\
&\vec{0} = 3\overrightarrow{RC} - (\overrightarrow{RA_1} + \overrightarrow{RA_2} + \overrightarrow{RA_3}) \Leftrightarrow \\
&(\overrightarrow{RC} - \overrightarrow{RA_1}) + (\overrightarrow{RC} - \overrightarrow{RA_2}) + (\overrightarrow{RC} - \overrightarrow{RA_3}) = \vec{0} \Leftrightarrow \\
&(\overrightarrow{A_1R} + \overrightarrow{RC}) + (\overrightarrow{A_2R} + \overrightarrow{RC}) + (\overrightarrow{A_3R} + \overrightarrow{RC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \\
&\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{A_2C} + \overrightarrow{A_3C} = \vec{0}
\end{aligned}$$

Per trovare il punto C si deve quindi sommare i tre vettori

$$\overrightarrow{RA_1} + \overrightarrow{RA_2} + \overrightarrow{RA_3}$$

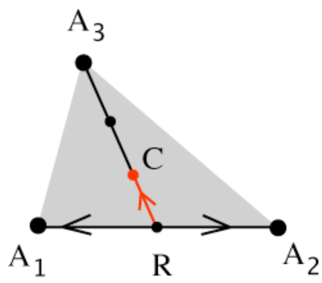
e dividere il vettore risultante in tre parti uguali.
La figura animata seguente illustra la costruzione e il fatto che il punto C non dipende dalla particolare posizione del punto iniziale R.
5.Centro3.fig
Se ad esempio prendiamo come punto iniziale R, il punto medio tra A_1, A_2 , allora

$$\overrightarrow{RA_1} + \overrightarrow{RA_2} = \vec{0}$$

e quindi, poiché questa scelta comporta che

$$\overrightarrow{RA_3} = 3\overrightarrow{RC}$$

il punto C si trova dividendo in tre parti uguali il la mediana RA_3 del triangolo A_1 , A_2 , A_3.



Abbiamo così questo fatto notevole: *il centro di tre punti è il baricentro del triangolo che ha quei punti come vertici*.
La costruzione di Grassmann può facilmente generalizzarsi al caso di 4 o più punti anche quando alcuni di questi vengono ripetuti dato che si dimostra, nello stesso modo che nel caso di 3 punti, che

$$\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{A_2C} + \ldots + \overrightarrow{A_nC} = \vec{0}$$

se e solo se, per ogni punto R accade che

$$\overrightarrow{RA_1} + \overrightarrow{RA_2} + \ldots + \overrightarrow{RA_n} = n\overrightarrow{RC}$$

Come vedremo, questo risultato, ulteriormente generalizzato, porterà alla costruzione geometrica del baricentro di una qualunque distribuzione discreta di pesi.
La tavola seguente racconta di un tesoro da scoprire usando il concetto di Grassmann di centro
Tavola 26 La mappa del tesoro

Laboratorio informatico

La lezione prosegue nel laboratorio informatico facendo costruire agli studenti, divisi in gruppi, con il software Cabri-géomètre, le seguenti figure animate:

- Il centro di a 4 punti A,B,C,D dati arbitrariamente
- Il centro della configurazione data da 4 punti di cui uno è ripetuto due volte A, A , B, C
- Il centro della configurazione di 6 punti A,A,A,B,B,C.

Si fa notare come la posizione del centro non dipenda dalla scelta iniziale del punto R col quale si costruiscono i vari vettori