Lezione V

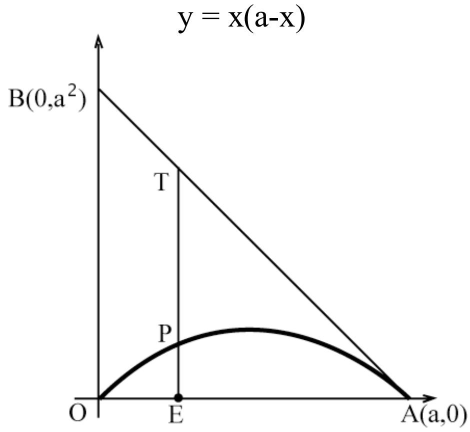
1. La quadratura della parabola

In questo paragrafo mostriamo il metodo "meccanico" di Archimede per calcolare l'area di un segmento parabolico. Di questo problema Archimede ha dato tre dimostrazioni: una di natura intuitiva basata sul teorema della leva che qua riportiamo e che serviva ad Archimede per avere una idea euristica sul risultato, e altre due assolutamente rigorose basate sul metodo di esaustione. Il "metodo" che ora esponiamo è il contenuto di una lunga lettera che Archimede indirizza ad Eratostene, suo amico e direttore della biblioteca di Alessandria, lettera ritrovata solo nel 1906. In questa lettera Archimede calcola, oltre all'area del segmento parabolico, anche numerosi altre formule che forniscono aree, volumi e baricentri di varie e complicate figure geometriche. Il metodo, che Archimede considera poco rigoroso, prefigura la teoria dell'*integrazione definita* e in ultima analisi la *teoria della misura*. Ecco come lo stesso Archimede si esprime:

Archimede ad Eratostene, prosperità!
Ti ho mandato precedentemente certi teoremi che avevo scoperto limitandomi a darti gli enunciati e invitandoti a trovare le dimostrazioni che io non avevo ancora indicato ....
sono ora le dimostrazioni di questi teoremi che io ti invio redatti in questo libro. Ma prima, come ti avevo detto, dato che tu sei uno studioso e domini in maniera ragguardevole le questioni di filosofia e sai apprezzare nel suo giusto valore la ricerca matematica sui problemi nuovi che si presentano, ho giudicato opportuno di descrivere e di sviluppare in questo stesso libro le proprietà caratteristiche di un metodo che ti permetterà di affrontare certe questioni matematiche con l'aiuto della meccanica. Ma io sono persuaso che questo strumento può servire anche per la dimostrazione dei teoremi; certe proprietà in effetti, che mi erano apparse evidenti da un punto di vista meccanico, sono state poi dimostrate geometricamente, dato che, con questo metodo, non è possibile dare una dimostrazione rigorosa. E' più facile costruire una dimostrazione conoscendo preliminarmente le proprietà che si vuole dimostrare e che si sono conosciute con questo metodo piuttosto che cercare delle dimostrazioni senza nessun riferimento.

Vediamo come si applica il metodo meccanico per calcolare l'area del segmento parabolico.
Consideriamo il segmento parabolico compreso tra l'asse delle x e la parabola di equazione

$$y = x(a-x)$$



Il punto A ha coordinate (a,0) e la retta

$$y = a(a-x)$$

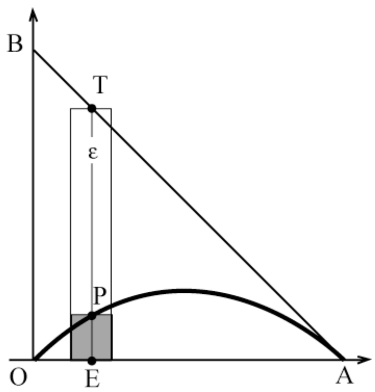
è tangente alla parabola nel punto A e passa per il punto $B=(0,a^2)$. Osserviamo che se $E=(x,0)$ è un qualsiasi punto del segmento OA e se la retta ET è parallela all'asse delle y e P il corrispondente punto della parabola, allora

$$x(a-x) : a(a-x) = x : a$$

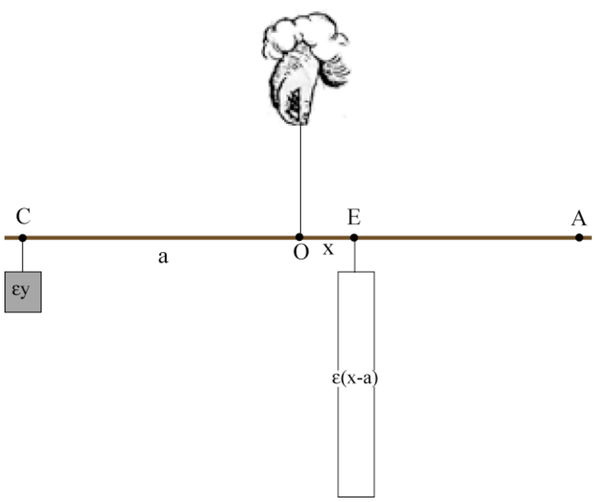
e quindi

$$EP : ET = OE : OA$$

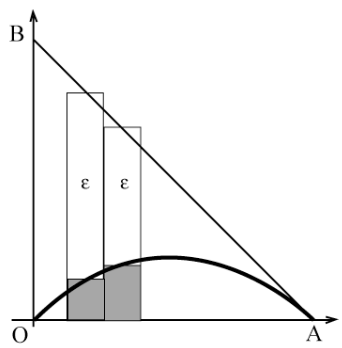
proporzione che, come vedremo, possiamo interpretare, in modo meccanico.



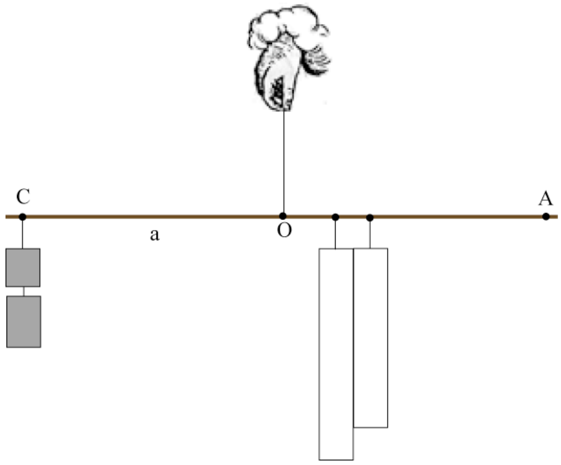
Consideriamo un rettangolino di base ε e altezza EP (E è il punto medio della base) e il reattangolino di base ε e altezza ET. La proporzione precedente ci dice che il rapporto tra le aree di questi rettangoli (uguale al rapporto EP:ET delle loro altezze) è uguale al rapporto tra la distanza x=OE e la distanza a=OA. Costruiamo ora una leva che abbia il fulcro in O un braccio OC =OA = a e pensiamo le figure geometriche come fossero formata da materiale omogeneo in modo che il loro peso sia proporzionale alle loro aree. Se spostiamo il rettangolo di altezza EP in C e lasciamo dove si trova il rettangolo di altezza OT troviamo una distribuzione di pesi che ha, per il teorema della leva, il baricentro in O



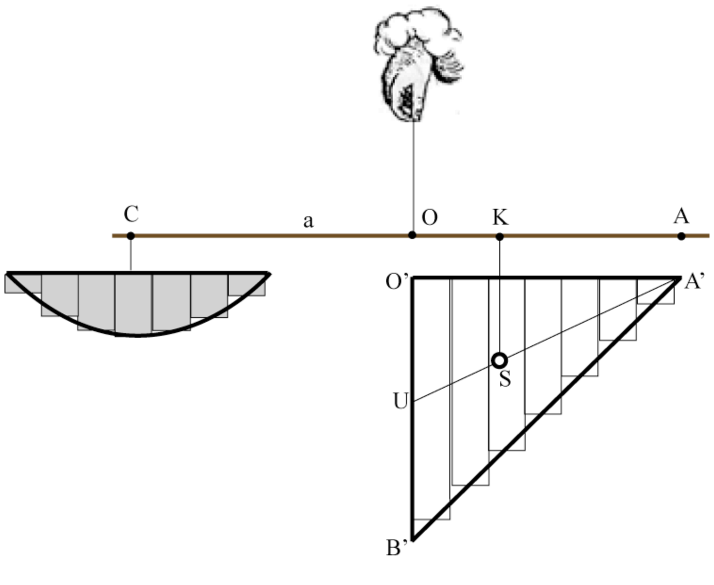
Ripetiamo la stessa operazione per il rettangolo vicino



Applicando il peso del rettangolo sotteso dalla parabola nel punto C che ha distanza fissa a dal fulcro O e lasciando nella stessa posizione il rettangolo sotteso dal triangolo AOB abbiamo ancora equilibrio. Sommando le due distribuzioni quella precedente che aveva baricentro in O e quella attuale che ha sempre baricentro in O la distribuzione somma, rappresentata nella figura seguente, ha ancora il suo baricentro in O



Si prosegue aggiungendo distribuzioni analoghe formate da un rettangolo di base ε (sotteso dalla parabola) sospeso in C e dal corrispondente rettangolo (sotteso dal triangolo OAB) sospeso nella posizione originaria. A ogni passo il baricentro resta in O. Se le basi ε dei rettangolini che abbiamo considerato diventano sempre più piccole la somma delle aree dei rettangoli grigi approssima sempre meglio l'area del segmento parabolico mentre quella dei rettangoli bianche quella del triangolo OAB. Il baricentro della somma dei rettangoli bianchi tende quindi al baricentro S del triangolo OAB mentre il baricentro della somma dei rettangolini grigi, resta nel punto C dove sono applicati tutti i pesi.



Poiché il baricentro S del triangolo O'A'B' si trova sulla mediana UA' nel rapporto US:SA' = 1: 2 abbiamo che la distribuzione di pesi definita dal triangolo OAB è equivalente alla distribuzione che ha tutto il peso concentrato nel punto K per il quale

$$OK : OA = 1 : 3$$

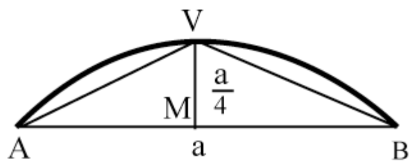
ma OA =OC = a dunque, per il teorema della leva, tutto il peso applicato in C sta al peso del triangolo applicato in K come OK sta a OC. Ma il rapporto tra i pesi è uguale al rapporto tra le aree e quindi

$$\text{Area Parabola} : \text{Area triangolo} = 1 : 3$$

Poiché il triangolo ha base a e altezza a^2 la sua area vale $a^3/2$, e dunque

$$\text{Area parabola} = a^3/6$$

In definitiva dato un segmento di parabola AVB di altezza MV e base AB

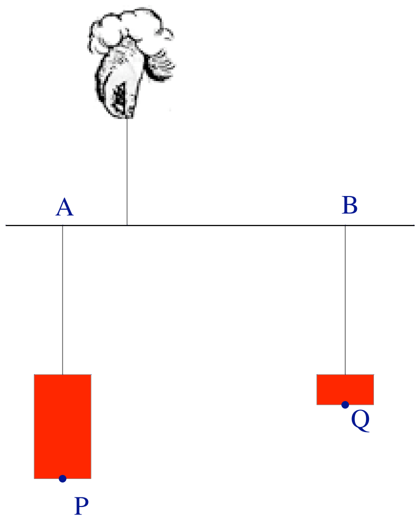


la sua area è 4/3 l'area del triangolo con la stessa base e la stessa altezza e quindi la sua area è i due terzi del prodotto della base per l'altezza. Questa formula, come Archimede dimostrerà "geometricamente" è valida per qualunque segmento parabolico. La ragione di questo sta nel fatto che ogni segmento parabolico può essere trasformato con una affinità nel segmento che abbiamo considerato e le affinità conservano rette tangenti e rapporti tra aree.

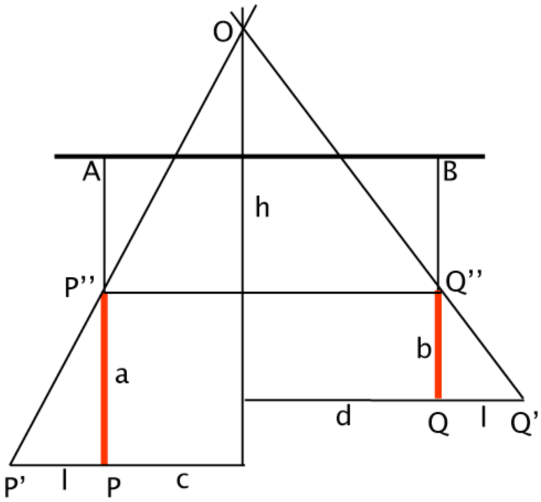
2. Il teorema della leva con Cabri

La parte successiva della lezione si svolge nel laboratorio Cabri e si fanno degli esercizi di cabri spiegando ai ragazzi che non lo sanno usare come funziona. Lo scopo è quello di costruire una figura che illustri il teorema della leva.

La costruzione richiede l’uso degli strumenti principali di Cabri: rette, rette parallele, perpendicolari, cerchi, compasso, mostra-nascondi, poligono, riempimento ecc e rappresenta un possibile esercizio per introdurre gli allievi a questo software.Si costruisce una figura dove compaiono due pesi, che possono essere modificati col mouse, e il baricentro che viene automaticamente calcolato geometricamente dal software .



Vedi l'animazione **Leva**
L'idea geometrica della costruzione



Tenendo conto delle due coppie di triangoli simili abbiamo

a : l = (a+h) : (c+l)   **b : l = (b+h) : (d+l)**

ac + al = la +lh   ,   bd + bl = lb + lh

e quindi

ac = bd .

L'inserimento della manina che solleva la bilancia si ottiene (se si vuole) copiando l'immagine (Allegata col nome di **Manina.gif**) sul computer dove si esegue il cabri.
La **scheda cabri** allegata elenca ordinatamente i vari passi della costruzione