III Lezione

1.Teorema della leva nel caso incommensurabile

Per dimostrare il teorema della leva nel caso generale Archimede usa una importante proprietà dei numeri reali che ora vogliamo discutere. Dati due numeri reali α e β con $\alpha < \beta$ esiste sempre un numero razionale m/n compreso tra α e β :

$$\alpha \leq m/n \leq \beta$$

Per dimostrare questa proprietà consideriamo gli sviluppi decimali di α e β:

$$\alpha = a,a_1a_2a_3a_4.......... = a + a_1/10 + a_2/100 + a_3/1000 + a_4/10000 + ...$$
$$\beta = b,b_1b_2b_3b_4........ = b + b_1/10 + b_2/100 + b_3/1000 + b_4/10000 +......$$

Consideriamo la parte intera dei due numeri: dato che $\alpha < \beta$ deve essere $a \leq b$. Se $a < b$ allora abbiamo

$$\alpha < b \leq \beta$$

e b è un numero razionale. Altrimenti a=b.

Se a=b consideriamo la prima cifra decimale: dato che a=b e $\alpha < \beta$ deve essere $a_1 \leq b_1$. Se $a_1 < b_1$ allora abbiamo

$$\alpha < b+b_1/10 \leq \beta$$

e $a+a_1/10$ è un numero razionale. Altrimenti $a_1 = b_1$.

Se a=b e $a_1 = b_1$ consideriamo la seconda cifra decimale: dato che a=b , $a_1= b_1$ e $\alpha < \beta$ deve essere $a_2 \leq b_2$. Se $a_2 < b_2$ allora abbiamo

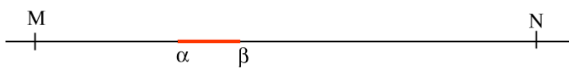
$$\alpha < b+b_1/10+b_2/100 \leq \beta$$

Il procedimento finisce appena troviamo una cifra decimale di α diversa dalla corrispondente cifra decimale di β cosa che deve accadere essendo $\alpha < \beta$.

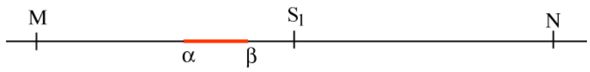
Un secondo modo di vedere questa proprietà è più geometrico e si basa, invece che sulla divisone di un intervallo in 10 parti uguali, sulla divisione in due parti uguali.

Rappresentiamo i numeri reali con punti di una retta e gli intervalli con dei segmenti.

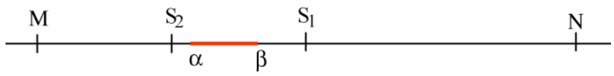
Consideriamo un numero intero N più piccolo di α e un numero intero M più grande di β.



Consideriamo il punto medio S_1 tra M ed N. Se questo punto cade nel segmento di estremi α e β abbiamo risolto il problema perché l'ascissa del punto medio di due punti di ascissa razionale ha ascissa razionale. Se invece non case in quel segmento il segmento sarà contenuto in una delle due parti nelle quali abbiamo diviso MN



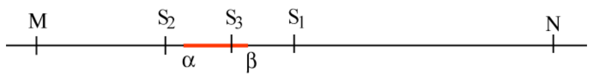
Dividiamo per due la parte che contiene il segmento e sia S_2 il nuovo punto di divisione. Se S_2 cade nel segmento di estremi α e β abbiamo risolto il problema perché l'ascissa del punto medio di due punti di ascissa razionale ha ascissa razionale. Altrimenti il segmento è contenuto in una delle due parti



Poiché la lunghezza di questi segmenti ad ogni passo dimezza, dopo abbastanza passi questa lunghezza diventerà più piccola di una qualunque grandezza data (dopo k dimezzamenti il segmento MN si divide in segmenti di lunghezza $(N\text{-}M)/2^k$), in particolare più piccola della lunghezza del segmento di estremi α e β. Dunque per k abbastanza grande

$$(N\text{-}M)/2^k < (\beta-\alpha)$$

e dunque il segmento di estremi α e β non potrà essere interamente contenuto in un suddivisione e dovrà quindi contener il punto S_k di ascissa razionale.

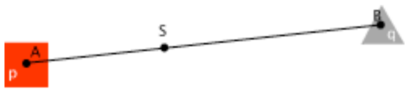


Possiamo ora dimostrare il teorema della leva nel caso generale.
Dimostrazione nel caso incommensurabile.

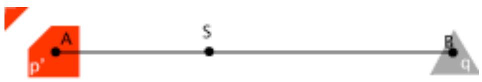
Riportiamo la dimostrazione di Archimede modificando leggermente la notazione. Sia S il punto del segmento AB tale che

$$AS : SB = q : p.$$

Supponiamo per assurdo che i due pesi non si equilibrino nel punto S e supponiamo che vi sia pendenza dalla parte di A.



Per avere equilibrio si dovrà allora togliere da p un certo peso per arrivare a un peso diciamo p' che equilibri in S il peso applicato in B (postulato 3).



Cerchiamo ora un peso p* maggiore di p' e minore di p che sia commensurabile con q. Essendo i pesi delle grandezze, tale peso esiste sempre. Infatti abbiamo p'< p e quindi

$$p'/ q < p / q$$

e *tra due numeri reali è sempre possibile inserire un numero razionale* n/m. Esistono quindi due numeri interi n ed m tali che

$$p^*/ q = n/m$$

$$p' < p^* < p$$

Sia ora $\mathcal{A}^*$ la distribuzione ottenuta levando ad $\mathcal{A}$ una parte in modo che il suo peso sia p*. Dato che p* > p' il sistema $\mathcal{A}^* + \mathcal{B}$ non si equilibra in S ma continua a pendere dalla parte di $\mathcal{A}^*$ quindi per il postulato 3 il sistema di equilibra in un punto S* più vicino ad A. Dunque AS*<AS , S*B > SB e perciò

$$AS^* : S^*B < AS : S^*B < AS : SB$$

D’altra lato, dato che il rapporto tra p* e q è commensurabile, per quanto abbiamo già dimostrato, il punto S* è individuato dal rapporto

$$AS^*: S^*B = q : p^*.$$

Dato che $p^* < p$ abbiamo

$$AS^*: S^*B = q : p^* > q : p = AS : SB$$

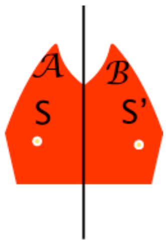
contraddicendo quello che abbiamo stabilito sopra.

2. Le distribuzioni simmetriche

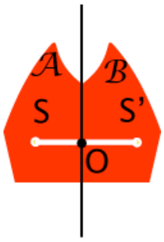
Fino ad ora non abbiamo usato il postulato 5 che si riferisce al caso di distribuzioni date da figure geometriche omogenee (ciò formate da uno stesso materiale omogeneo). Quel postulato in particolare afferma che se due figure (omogenee) sono sovrapponibili (cioè sono congruenti) allora anche i loro baricentri si sovrappongono. Da questo possiamo facilmente ottenere il seguente

Teorema 3.
Se una figura piana omogenea ha un asse di simmetria allora il suo baricentro si trova sull’asse di simmetria.

Una figura simmetrica si divide in due figure uguali, una riflesso dell’atra, tramite l’asse di simmetria.

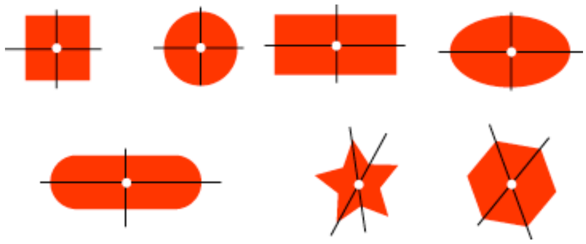


la corrispondente distribuzione possiamo allora pensarla come somma di due distribuzioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dello stesso peso totale. Poiché la simmetria rispetto all’asse fa sovrapporre le due figure, per i postulato 5, questa simmetria farà anche corrispondere i due baricentri. Quindi anche se non sappiamo dove sono i due baricentri S e S’ , sappiamo però che S’ è il simmetrico di S rispetto all’asse e quindi



il segmento SS’ è perpendicolare all’asse e OS=OS’. Per il teorema 2 allora O, che si trova sull’asse, è il baricentro di $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

In particolare, se una figura ha due assi di simmetria il suo baricentro si trova nel punto d'intersezione degli assi. Le figure seguenti hanno questa caratteristica e quindi sappiamo dove si trovano i loro baricentri



Le seguenti tavole si riferiscono ad applicazioni del teorema della leva
Tavola 9 , Tavola 10, Tavola 11.

3. L'algoritmo delle somme parziali

Il teorema della leva ci permette di calcolare il baricentro di una distribuzione $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_n$ composta da n distribuzioni, se di ognuna di loro si conosce la posizione del baricentro e il peso. Il metodo che seguiamo è identico a quello che si usa quando dobbiamo sommare n numeri e e lo facciamo cominciando a sommare i primi due, sommando il risultato al terzo e questa somma parziale al quarto e così via. In questo caso l'analogia tra le distribuzioni e i numeri funziona bene. Si comincia col trovare una distribuzione elementare $\mathcal{B}_1$ equivalente ad $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$. Il peso totale di $\mathcal{B}_1$ è la somma dei pesi di $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ mentre il baricentro viene calcolato usando il teorema della leva. La distribuzione iniziale $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_n$ è equivalente alla distribuzione $\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_3 + \ldots + \mathcal{A}_n$ infatti

$$\mathcal{B}_1 \approx \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \quad \text{implica} \quad \mathcal{A} = (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) + \mathcal{A}_3 + \ldots + \mathcal{A}_n \approx \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_3 + \ldots + \mathcal{A}_n .$$

In questo modo abbiamo ridotto di uno il numero dei fattori da sommare. Si trova ora una distribuzione elementare $\mathcal{B}_2$ equivalente a $\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_3$ cosa possibile in virtù del teorema della leva dato che conosciamo i baricentri e i pesi di $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{A}_3$. La distribuzione iniziale è ora equivalente alla distribuzione $\mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_4 + \ldots + \mathcal{A}_n$ infatti

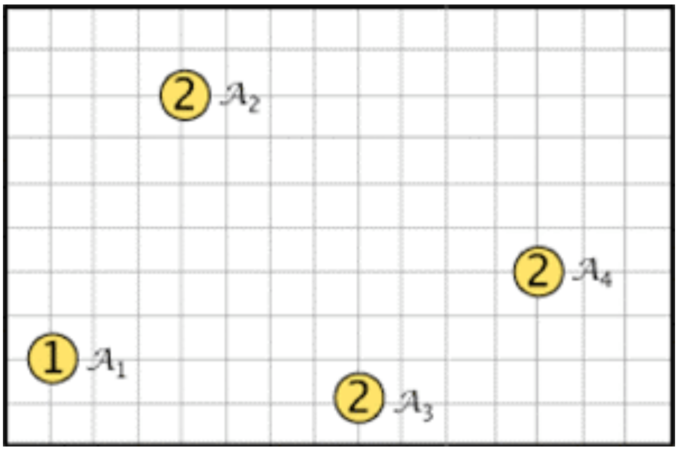
$$\mathcal{B}_2 \approx \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_3 \quad \text{implica} \quad \mathcal{A} \approx (\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_3) + \mathcal{A}_4 + \ldots + \mathcal{A}_n \approx \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_4 + \ldots + \mathcal{A}_n .$$

Ora i fattori che restano da sommare sono n-2. Proseguiamo in questo modo fino alla fine dei fattori. Alla fine esauriti i fattori troveremo nella classe di equivalenza di $\mathcal{A}$ una distribuzione elementare

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{B}_{n-1}$$

il cui baricentro è il baricentro di $\mathcal{A}$.
Abbiamo dunque un modo per calcolare il baricentro di una somma conoscendo i pesi e i baricentri singoli dei fattori.
La cosa sorprendente è che il risultato che troviamo non dipende da quale modo seguiamo nel sommare i fattori a due a due esattamente come per l'ordinaria addizione tra numeri e questo dipende dal fatto che la proprietà associativa e commutativa della somma vale nei due contesti.

La seguente figura mostra questo algoritmo, che chiamiamo *l'algoritmo delle somme parziali* all'opera su una somma di 4 fattori.



- Si calcola la somma $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$: viene il punto (3,6) con peso 3. Dunque $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \approx \mathcal{B}_1$ dove $\mathcal{B}_1$ è la distribuzione elementare di peso 3 nel punto (3,6).
- Si calcola la somma $\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_3$ viene il punto (5,4) con peso 5. Dunque $\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_3 \approx \mathcal{B}_2$ dove $\mathcal{B}_2$ è la distribuzione elementare di peso 5 nel punto (5,4).
- Si calcola la somma $\mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_4$: viene il punto (7,4) con peso 7. Dunque $\mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_4 \approx \mathcal{B}_3$ dove $\mathcal{B}_3$ è la distribuzione elementare di peso 7 nel punto (7,4).

Il baricentro è dunque nel punto (7,4)

Le tavole seguenti chiedono di applicare l'algoritmo delle somme parziali in due situazioni diverse.

Tavola 12, Tavola 13.

4. Il baricentro in una formula

Per calcolare il baricentro di una somma, anziché calcolare via via le somme parziali, possiamo dare un nuovo algoritmo che esprime, in un colpo solo, con una formula, la posizione del baricentro della distribuzione somma sapendo i baricentri e i pesi dei singoli fattori. Questo è possibile grazie alla potenza del calcolo algebrico.

Teorema 4

Se le distribuzioni $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ... , $\mathcal{A}_n$ *hanno peso* $p_1, p_2, \dots, p_n$ *rispettivamente e i loro baricentri sono allineati su una retta nei punti di ascissa* $x_1, x_2, \dots, x_n$, *allora il baricentro della distribuzione* $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_n$ *si trova nel punto di ascissa*

$$S_n = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_1^n p_ix_i}{\sum_1^n p_i}$$

Dimostrazione

Ripetiamo con le lettere i calcoli che abbiamo fatto con i numeri per risolvere l'esercizio proposto nella tavola 12.
Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ sono due distribuzioni con baricentro rispettivamente nei punti di ascissa x e x' e pesi p e p'
allora il baricentro della loro somma si trova, per il teorema della leva nel punto di ascissa s dato da

$$s = x + p'\frac{x' - x}{p + p'}$$

Sviluppiamo il calcolo algebrico indicato

$$s = x + p'\frac{x' - x}{p + p'} = \frac{(p + p')x + p'(x' - x)}{p + p'} = \frac{xp + x'p'}{p + p'}$$

Questa formula permette la dimostrazione del teorema per induzione matematica.

Se infatti abbiamo trovato che la distribuzione $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + ... + \mathcal{A}_{n-1}$ è equivalente alla distribuzione $\mathcal{B}$ che ha peso $p_1 + p_2 + ... + p_{n-1}$ e baricentro nel punto di ascissa

$$s_{n-1} = (p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_{n-1}\,x_{n-1})/\,(p_1 + p_2 + ... + p_{n-1})$$

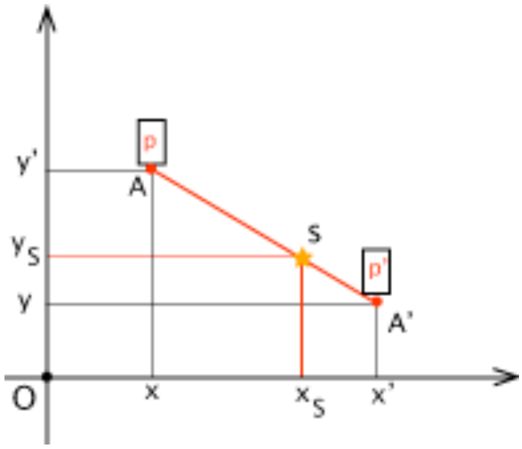
allora, usando la formula precedente, la distribuzione ottenuta aggiungendo $\mathcal{A}_n$ di peso p_n e baricentro di ascissa x_n, ha il suo baricentro nel punto di ascissa

$$s_n = \frac{(p_1 + p_2 + ... + p_{n-1})\,s_{n-1} + p_nx_n}{(p_1 + p_2 + ... + p_{n-1}) + p_n} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_{n-1}x_{n-1} + p_nx_n}{p_1 + p_2 + ... + p_{n-1} + p_n}$$

La formula precedente permette di trovare il baricentro di una qualunque distribuzione discreta.

La formula è molto utilizzata nella statistica e da luogo a quello che, in quel contesto, si chiama ***media pesata***: gli n valori delle x hanno ciascuno un "peso" e la formula sopra scritta da la loro media pesata.

Possiamo facilmente generalizzare la formula al caso in cui le distribuzioni $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ... , $\mathcal{A}_n$ abbiano i baricentri su un piano invece che su una retta. Ora i baricentri delle date distribuzioni saranno individuati da due coordinate se $A = (x_1, y_1)$ e $A' = (x'_1, y')$ sono i baricentri delle due distribuzioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ allora le coordinate del baricentro S della somma $\mathcal{A} + \mathcal{A}'$ si otterrà, per i teorema della leva, e per la similitudine dei triangoli in gioco, nella stessa maniera



$$\frac{AS}{SA'} = \frac{x_S - x}{x' - x_S} = \frac{y_S - y}{y' - y_S} = \frac{p'}{p}$$

e quindi come nel caso precedente

$$x_S = x + p'\frac{x' - x}{p + p'} \qquad \text{e} \quad y_S = y + p'\frac{y' - y}{p + p'}$$

e le coordinate del baricentro della distribuzione $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + ... + \mathcal{A}_n$ sono[1]

$$x_S = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \qquad \text{e} \qquad y_S = \frac{p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

[1] Queste formule sono oggi, nel migliore dei casi, date per definire il baricentro. L'affermarsi del formalismo in matematica ha portato sempre più a *definire* gli oggetti matematici tramite formule algebriche ad esempio la retta è *definita* dalla sua equazione, la parabola è *definita* da una funzione di secondo grado mentre del cono da cui proviene si perde ogni traccia. La genesi geometrica o fisica dei concetti viene sacrificata in nome di un presunto rigore e soprattutto di una maggiore semplicità. In un calcolo formale non vi è nulla da capire e lo sforzo che si richiede è proprio quello di eliminare ogni riferimento concreto e imparare le formule che sono quelle che definiscono gli oggetti. In questo modo i concetti si svuotano di contenuto e questo, come anche recenti studi a livello neuro-cognitivo hanno evidenziato, non facilita ne la comprensione ne il gusto allo studio.
Per approfondire da un punto di vista teorico e didattico questo punto di vista si consiglia l'articolo di L. Catastini "Concretamente astratto anzi simulabile" di prossima pubblicazione. La presentazione dei concetti che abbiamo esposto in questo Laboratorio vorrebbe invertire questa tendenza.