I Lezione

Nella scienza matematica vi
è una sorprendente immaginazione.
C'era di gran lunga più immaginazione
nella mente di Archimede che
in quella di Omero.
Voltaire

1.Distribuzioni piane di pesi

La lezione inizia con la lettura del breve racconto sulla morte di Archimede di di Karel Čapek.

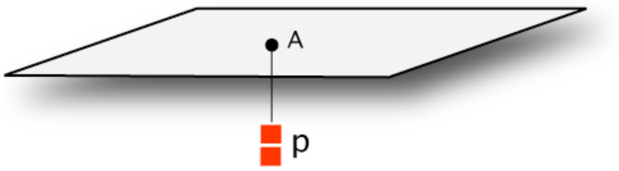
Il trattato di Archimede (287 - 212 a.C) *Sull'equilibrio delle figure piane*, tra le altre cose, risolve in modo completo, sia dal punto di vista teorico che da quello pratico, il problema di come si possano *sommar*e due o più forze parallele (nel caso del trattato archimedeo forze peso) applicate a punti di una stessa superficie piana rigida. Il termine sommare è qua particolarmente opportuno perché l'operazione che Archimede introduce ha le caratteristiche fondamentali della somma tra numeri o grandezze cioè è associativa e commutativa. Proprietà queste continuamente utilizzare nei "calcoli" che vengono realizzati. Si introduce qua, per la prima volta, una operazione algebrica, nel senso moderno del termine, tra entità che non possono essere ridotte a numeri. Il percorso che inizia ci porterà ai vettori (grandezze dotate di una inclinazione come avrà a dire Sinisgalli[1]), alle operazioni sui vettori, al concetto di spazio vettoriale e alla così detta algebra astratta contemporanea.
Il metodo seguito da Archimede è il *metodo assiomatico-deduttivo* diventato di uso comune nella matematica moderna e nelle moderne teorie scientifiche. Intendiamo per teoria scientifica ciò che Lucio Russo intende nella sua opera "*La rivoluzione dimenticata*":

> *1. Le affermazioni scientifiche non riguardano oggetti concreti, ma enti "teorici" specifici*
> *2. La teoria ha una struttura rigorosamente deduttiva; è costituita cioè da pochi enunciati fondamentali ("assiomi", "postulati", "principi") su propri enti caratteristici e da un metodo unitario universalmente accettato per dedurne un numero illimitato di conseguenze*
> *3. Le applicazioni al mondo reale sono basate su "regole di corrispondenza" tra gli enti della teoria e gli oggetti concreti.*

Gli enti teorici con i quali Archimede ci insegna a operare sono ***distribuzioni piane di pesi***, (che chiameremo brevemente distribuzioni) sono cioè delle configurazione di pesi disposti su una superficie piana considerata *rigida, inestendibile e di peso nullo*.

L'esempio più semplice di un tale oggetto è un peso p applicato a un punto A del piano una tale distribuzione sarà chiamata una ***distribuzione elementare***. Anche questo è un ente teorico perché il punto è esso stesso un ente teorico e un peso non può applicarsi ad un punto essendo il punto senza dimensione.
Possiamo far corrispondere questo ente teorico a un oggetto concreto considerando, ad esempio, un peso sospeso a un filo come nella figura

[1] L. Sinisgalli, *Furor matematicus*

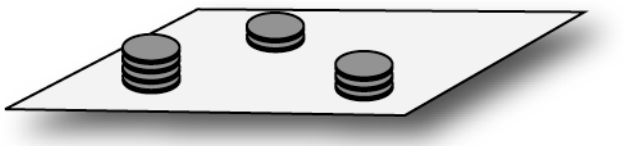


Distribuzione elementare

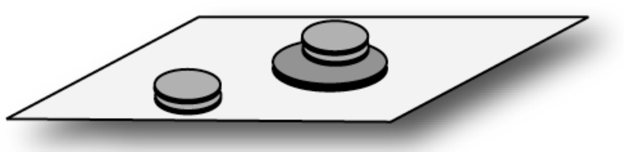
o una pila monete o di bulloni piccoli rispetto al piano appoggiati esattamente uno sull'altro in un determinato punto A di un piano sottile di peso trascurabile rispetto al peso dei bulloni.

Ulteriori esempi di distribuzioni "concrete" .
Ricordiamo che una figura piana è *omogenea* se il peso di una sua qualunque parte è proporzionale all'area di quella parte. Il rapporto tra peso e area è la *densità* del materiale.

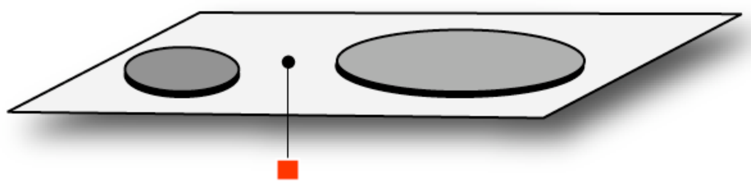
Distribuzione formata da due dischi omogenei di diametri diversi posti a una certa distanza



In questa distribuzione abbiamo delle pile di monete uguali per indicare diverse zone del piano sulle quali sono disposti pesi diversi. Se p è il peso di una moneta, in questa distribuzione abbiamo delle zone dove il peso è 2p altre dove è 3p e altre ancora dove è 4p.



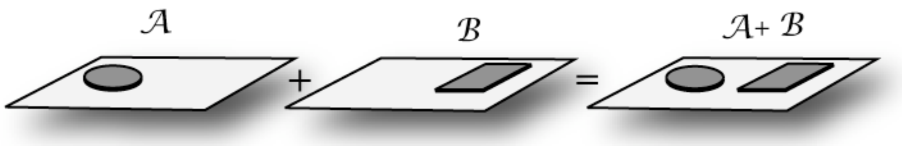
Distribuzione formata da diversi dischi anche in parte sovrapposti



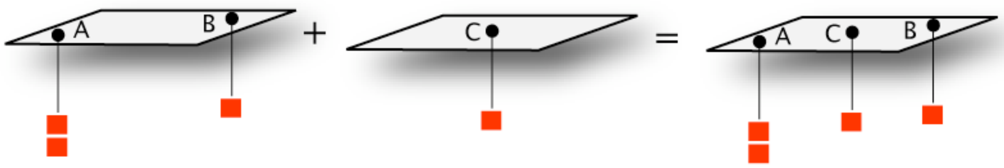
Distribuzione mista formata da due dischi di diametri diversi e da un peso concentrato in un punto

2. Somma di distribuzioni piane di pesi

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due distribuzioni piane di pesi, possiamo ***sommare*** $\mathcal{A}$ con $\mathcal{B}$ seplicemendo considerando la distribuzione formata dall'una e dall'altra distribuzione prese insieme.
Esempi di somma



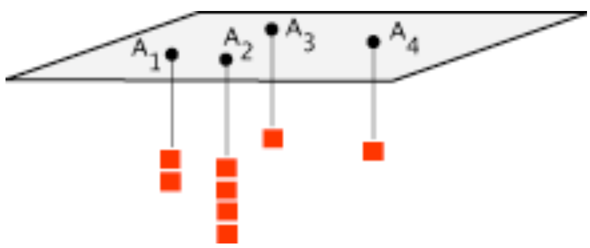
Si somma un disco in una data posizione con un rettangolo in una data posizione



Si somma una distribuzione formata da due pesi in A un peso in B con la distribuzione elementare formata da un peso in C

Se le due distribuzioni hanno zone in comune il peso in quelle zone sarà la somma dei due pesi.

Un insieme finito di distribuzioni elementari "sommate" tra loro da luogo a una ***distribuzione discreta*** . Si tratta di n pesi p_1, p_2, ... , p_n applicati a n punti A_1, A_2, ... , A_n di uno stesso piano. (Anche questo è un ente astratto della teoria che stiamo costruendo)



Distribuzione discreta formata da 4 distribuzioni elementari

E' chiaro che questa operazione di somma, come la somma tra numeri naturali o l'unione di insiemi, è associativa e commutativa:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$$
$$\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$$

Indichiamo la somma di $\mathcal{A}$ con se stessa ripetuta n volte con $n\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A}+\mathcal{A}+\ \dots+\mathcal{A}=\mathrm{n}\mathcal{A}.$$

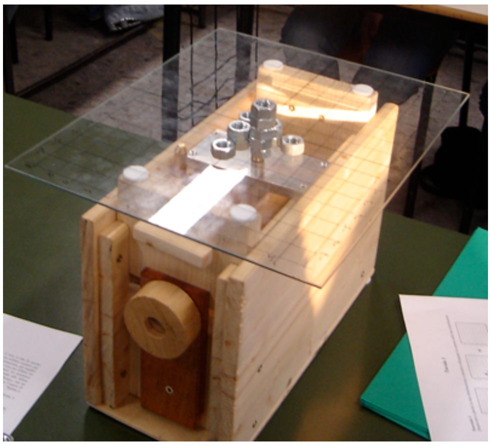
Dimostrare usando la proprietà associativa e commutativa che, se n e m sono numeri interi positivi allora

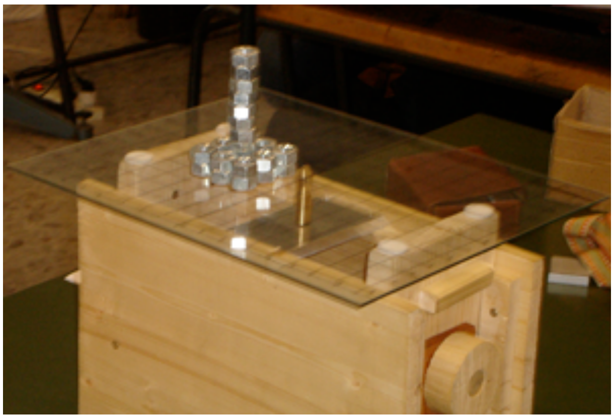
$$\mathrm{n}(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\mathrm{n}\mathcal{A}+\mathrm{n}\mathcal{B}$$
$$(\mathrm{n}+\mathrm{m})\mathcal{A} = \mathrm{n}\mathcal{A}+\mathrm{m}\mathcal{A}$$
$$\mathrm{n}(\mathrm{m}\mathcal{A}) = (\mathrm{nm})\mathcal{A}$$

Problema

Problema:
Come rappresentare con un diagramma schematico una distribuzione discreta di pesi?

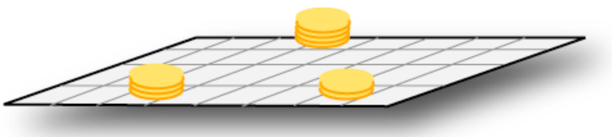
Si farà vedere agli studenti una distribuzione di bulloni diversamente impilati sullo “strumento[2]” e si chiederà di trovare una loro rappresentazione schematica, un disegno, su un foglio di carta che tenga conto della posizione dei bulloni e del peso delle singole pile.





Lo strumento

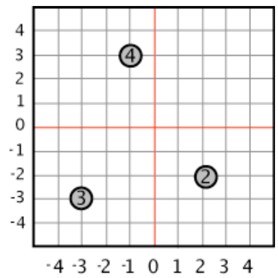
Un modo per rappresentare una distribuzione discreta di pesi piana (e che seguiremo nel corso della lezione) è il seguente: si introduce un sistema di coordinate cartesiane sul piano dove sono appoggiati i pesi e si indica con un piccolo cerchio la posizione e il peso della rispettiva pila di bulloni come se la distribuzione fosse “vista dall’alto”.
La distribuzione seguente



la rappresentiamo con la figura

---

[2] Lo “strumento” consiste in una sottile lastra di vetro quadrettata nella quale è possibile individuare i punti attraverso due coordinate cartesiane. Sulla lamina possono essere delle pile di bulloni o altri pesi. Il vetro è appoggiato a due supporti laterali che, girando una rotella, possono essere abbassati in modo che il vetro si appoggi in un unico punto.



Un peso 3 nel punto (-3,-3), un peso 4 nel punto (-1,3) e un peso 2 nel punto (2,-2)

Si deve sottolineare che questo modo di rappresentare la distribuzione non è obbligatorio è una libera scelta basata su criteri di convenienza e semplicità.

Si faranno altri esercizi di trascrizione simbolica dell'oggetto reale dato sullo "strumento" fino ad arrivare a un forma di rappresentazione da tutti condivisa.

Tavola 1
Tavola 2
Si chiede agli studenti di eseguire determinate operazioni sulle configurazioni usando la rappresentazione precedente.

Nella tavola 2 si propone il seguente problema che è stato affrontato e discusso con la partecipazione attiva di molti studenti

Problema

Data una configurazione discreta $\mathcal{A}$, una configurazione discreta $\mathcal{B}$ e un numero naturale n, in quali casi l'equazione

$$\mathcal{A} + n\mathcal{X} = \mathcal{B}$$

si può risolvere e, quando si può risolvere, quante soluzioni $\mathcal{X}$ possiamo trovare?

Il problema sarà ripreso successivamente. Tuttavia è interessante discutere la proposta

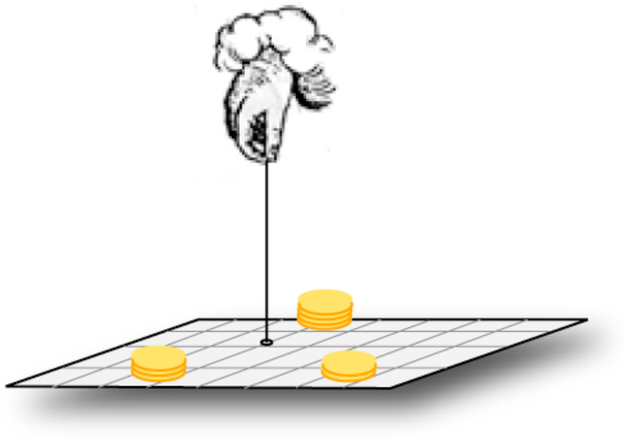
$$\mathcal{X}=(\mathcal{B} - \mathcal{A})/n$$

dando l'idea di "sottrazione" tra distribuzioni discrete e cercando di specificare quando questa è possibile: è possibile la sottrazione quando $\mathcal{B} \geq \mathcal{A}$ e questo significa per ogni punto A del piano il peso in P della distribuzione $\mathcal{B}$ (0 se in A non c'è peso) sia maggiore o uguale al peso in P della distribuzione $\mathcal{A}$. Se indichiamo con p_P il peso in P della distribuzione $\mathcal{A}$ e con q_P il peso in P della distribuzione $\mathcal{B}$ allora

$$\mathcal{B} \geq \mathcal{A} \text{ se e solo se per ogni punto P del piano risulta } q_P \geq q_P.$$

3. Il punto di equilibrio o baricentro di una distribuzione di pesi

Archimede associa a una distribuzione di pesi un punto detto ***punto di equilibrio*** o ***baricentro*** della distribuzione. Tale punto viene definito indirettamente tramite dei postulati e il trattato è dedicato al calcolo esplicito del baricentro a partire dai postulati che vengono scelti nel modo più semplice possibile e più facilmente verificabile sperimentalmente. Anche il baricentro è un ente astratto della teoria al quale possiamo far corrispondere un ente concreto quando abbiamo una concreta distribuzione di pesi: si tratta di un punto del piano che equilibra l'intera distribuzione; cioè tale che, se si appoggia o si appende, in quel punto il piano, questo resta in equilibrio, resta orizzontale, non si inclina in nessuna direzione.



La teoria archimedea pone all'inizio alcune semplicissime assunzioni, i postulati appunto, facilmente verificabili con l'esperienza, e, a partire da questi, usando il ragionamento deduttivo, si deducono diversi teoremi alcuni non facilmente prevedibili per via sperimentale la cui validità può essere in un secondo tempo confrontata con l'esperienza confermando o invalidando l'efficacia del modello teorico.

4. Equivalenza di distribuzioni

L'idea centrale nella teoria archimedea è l'introduzione di una relazione di equivalenza tra le distribuzioni piane di pesi:

Definizione

Due distribuzioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ si dicono ***equivalenti*** *se hanno lo stesso peso totale e il baricentro nello stesso punto.*

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ sono equivalenti, scriviamo

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{A}'$$

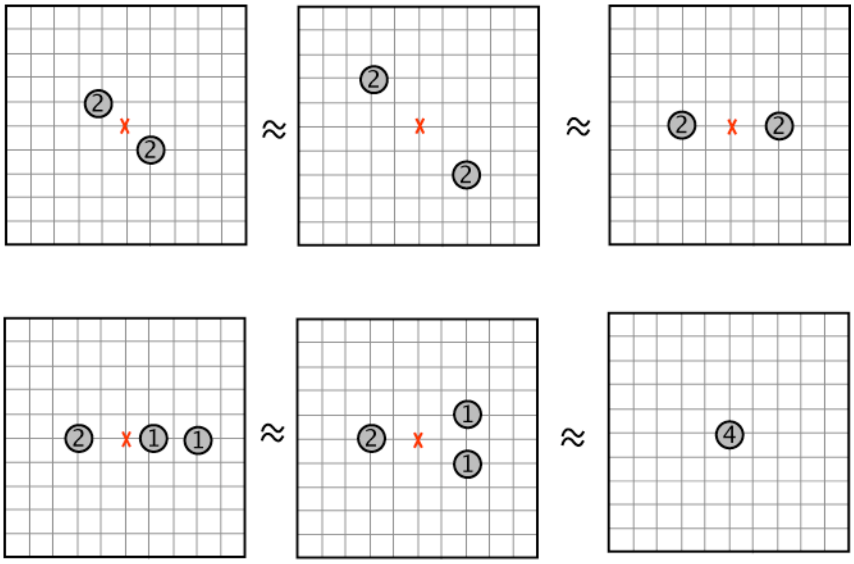
Questa relazione è riflessiva simmetrica e transitiva perché tale è l'uguaglianza di peso e baricentro

$\mathcal{A} \approx \mathcal{A}$ (riflessiva)

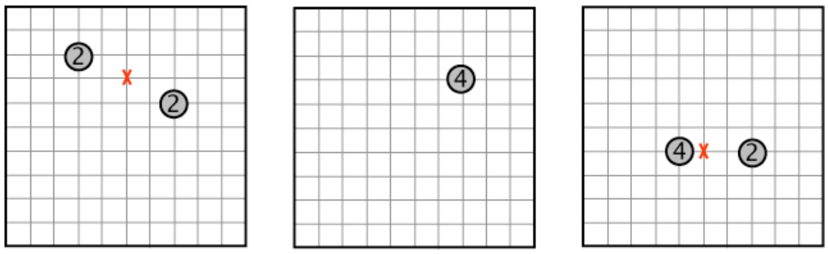
Se $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}'$ allora $\mathcal{A}' \approx \mathcal{A}$ (simmetrica)

Se $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}'$ e $\mathcal{A}' \approx \mathcal{A}''$ allora $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}''$ (transitiva)

Si verifica usando lo strumento che le seguenti distribuzioni sono tutte equivalenti tra loro.



Le seguenti distribuzioni non sono equivalenti o perché il peso totale cambia o perché cambia la posizione del baricentro.



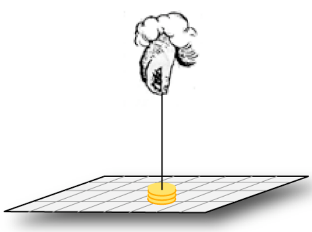
L'insieme di tutte le distribuzioni equivalenti ad una data distribuzione $\mathcal{A}$ forma ciò che nel linguaggio matematico si chiama una *classe di equivalenza*, che viene generalmente denotata scrivendo $\mathcal{A}$ tra parentesi quadre:

$$[\mathcal{A}] = \{ \text{ distribuzioni } \mathcal{A}' \text{ tali che } \mathcal{A}' \approx \mathcal{A} \}$$

5. I postulati di Archimede

Il primo postulato della nostra teoria, che in Archimede è implicito, stabilisce quale sia il baricentro di una distribuzione elementare.

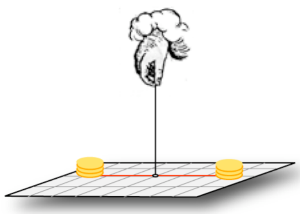
Postulato 1.
La distribuzione che ha tutto il peso concentrato in un punto ha il suo baricentro in quel punto.



Se $\mathcal{A}$ è una qualunque distribuzione di pesi e se $\mathcal{E}$ è una distribuzione elementare equivalente ad $\mathcal{A}$, allora il baricentro di $\mathcal{A}$, che è uguale a quello di $\mathcal{E}$, si trova, per questo postulato, nel punto nel quale è applicato tutto il peso di $\mathcal{E}$. Trovare il baricentro di una distribuzione equivale dunque a trovare, *nella sua classe di equivalenza*, un rappresentate elementare.

Il secondo postulato chiede di accettare che pesi *uguali* applicati in due punti A e B si equilibrano nel punto medio tra A e B. E' questo un principio base fortemente intuitivo e nell'esperienza comune di tutti: basti pensare ad esempio alla bilancia.

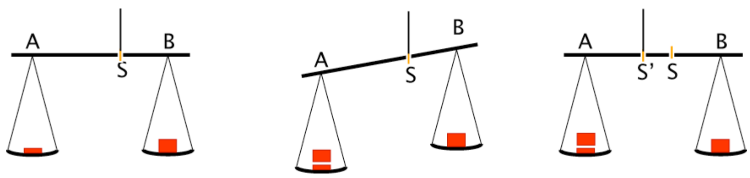
Postulato 2.
Il baricentro di due distribuzioni elementari dello stesso peso è nel loro punto medio.



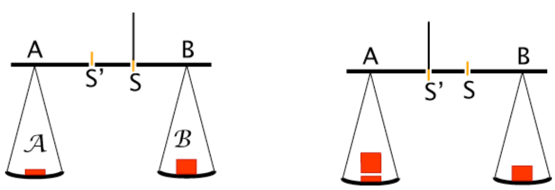
La formulazione originale di Archimede (prima premessa) afferma che

1. Supponiamo che pesi uguali si equilibrino a distanze uguali

Postulato 3.
Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due distribuzioni elementari i cui pesi sono applicati nel punti A *e* B *rispettivamente e il baricentro S di $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ è sulla segmento* AB*, allora, se si aggiunge del peso ad $\mathcal{A}$ (o si toglie a $\mathcal{B}$) il baricentro* S' *della nuova distribuzione è spostato verso $\mathcal{A}$.*



Viceversa se $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ è in equilibrio in un punto S *del segmento* AB *e se* S' *più vicino ad* A *allora posso aggiungere peso ad $\mathcal{A}$ (o toglierlo a $\mathcal{B}$) in modo che la nuova distribuzione si equilibri in* S'.



La formulazione originale di Archimede di questo postulato, corrisponde alle premesse 2 e 3, dice testualmente

2. Se dei pesi sospesi a certe distanze sono in equilibrio e si aggiunge un peso a uno dei due, i pesi non si equilibrano più, ma c'è inclinazione dal lato del quale si è aggiunto un peso.
3. Ugualmente se si leva qualcosa a uno dei due pesi i pesi non si equilibrano più ma c'è inclinazione dalla parte del peso del quale non si è tolto nulla.

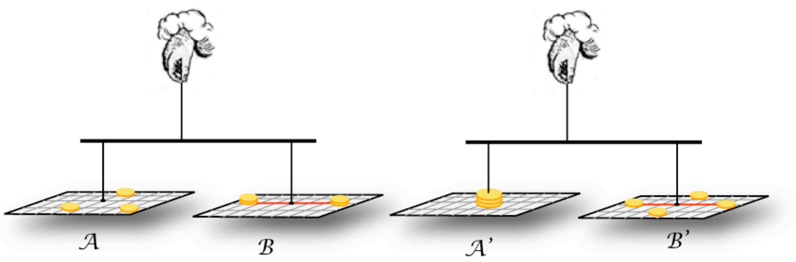
Il significato di questo postulato è qualitativo: date due distribuzioni elementari $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, aggiungendo peso ad una delle due, il centro di equilibrio si sposta verso il punto dove si è aggiunto il peso e viceversa. Il postulato non dice nulla su quanto varia lo spostamento y in funzione del peso aggiunto x: come sia esattamente la funzione y=f(x). Sarà il teorema della leva a dirci come è fatta esattamente questa funzione.

La sesta premessa di Archimede è la più importante ed espressa in modo piuttosto ambiguo. Dice testualmente Archimede

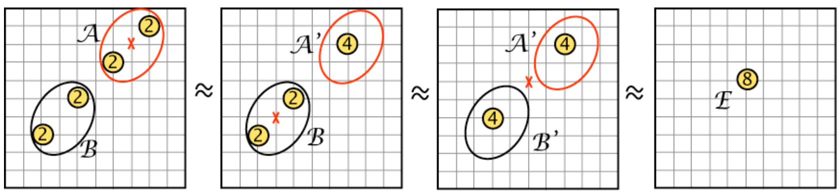
6. Se delle grandezze si equilibrano a certe distanze, grandezze equivalenti a quelle si equilibrano a loro volta alle stesse distanze.

Noi interpretiamo questa premessa dicendo che il baricentro di $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ è lo stesso del baricentro di $\mathcal{A}'+\mathcal{B}'$ se $\mathcal{A}'$ è equivalente ad $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}'$ è equivalente a $\mathcal{B}$.
Un modo formale di dire questo è il seguente

Postulato 4.
Se $\mathcal{A}'$ è equivalente ad $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}'$ è equivalente a $\mathcal{B}$ allora $\mathcal{A}'+\mathcal{B}'$ è equivalente a $\mathcal{A}+\mathcal{B}$.



Il punto in cui le due grandezze $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si equilibrano è il baricentro di $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ che si trova nella stessa posizione del punto in cui si equilibrano le due grandezze equivalenti $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$. Archimede in sostanza postula che il punto in cui si equilibra la somma di due distribuzioni debba dipendere solo dal peso e dai baricentri delle due distribuzioni ma non dalla forma particolare delle distribuzioni. Questo postulato, che alcuni autori hanno paragonato al V postulato degli elementi di Euclide per la sua minore evidenza rispetto agli altri, è alla base di tutta l'argomentazione archimedea.
In particolare il baricentro di una distribuzione non cambia se sostituisco una sua parte con una nuova distribuzione equivalente che abbia cioè lo stesso peso e lo stesso baricentro. La figura precedente illustra questa idea:

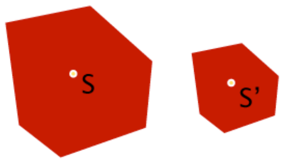


- $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}'$ infatti il baricentro di $\mathcal{A}$ è nel punto medio (postulato 2) e il baricentro di $\mathcal{A}'$ è nello stesso punto (postulato 1) il peso totale di entrambi è 4 quindi $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}'$
- ne segue che $\mathcal{A}+\mathcal{B} \approx \mathcal{A}'+\mathcal{B}$ per il postulato 4
- $\mathcal{B} \approx \mathcal{B}'$ per il postulato 2 e 1
- ne segue che $\mathcal{A}'+\mathcal{B} \approx \mathcal{A}'+\mathcal{B}'$ per il postulato 4
- $\mathcal{A}'+\mathcal{B}' \approx \mathcal{E}$ per il postulato 2 e 1

- In definitiva $\mathcal{A} + \mathcal{B} \approx \mathcal{E}$ quindi queste due distribuzioni hanno lo stesso baricentro.

L'insieme di questi postulati permette nel caso concreto di distribuzioni discrete il calcolo esplicito del baricentro riducendo la distribuzione data a distribuzioni più semplici. La strategia consiste nel modificare la data distribuzione attraverso una successione di mosse che non alterino la classe di equivalenza della data distribuzione ma che la riducano ad una forma più semplice.
Nel caso di una distribuzione di pesi non discreta ad esempio per studiare il baricentro di figure piane pesanti ma omogenee il cui peso è quindi proporzionale all'area, Archimede introduce un ulteriore postulato:

Postulato 5
Figure piane omogenee e simili hanno il baricentro similmente posizionato.



In particolare figure congruenti cioè sovrapponibili hanno il baricentro nello stesso punto.
Due figure piane sono simili se esiste una similitudine del piano (cioè una trasformazione geometrica del piano in se stesso che conserva allineamento e angoli) che trasforma una figura nell'altra. Si postula che una tale similitudine trasforma il baricentro della figura iniziale nel baricentro della figura corrispondente.
Archimede esprime questi postulati dicendo

5. Figure simili hanno il baricentro similmente situato

Usando solo i postulati che abbiamo ammesso possiamo calcolare il baricentro di semplici distribuzioni di pesi e trovare distribuzioni equivalenti
Si parte da situazioni molto semplici con pochi pesi e si chiede di trovare, usando i postulati di Archimede, delle distribuzioni equivalenti a quelle assegnate.
Tavola 3 (figure equivalenti di due o tre distribuzioni elementari)

Nella tavola seguente si cercano distribuzioni equivalenti nel caso non discreto mostrando come i procedimenti siano gli stessi nel caso discreto e in quello continuo.
Tavola 4 (figure equivalenti a 4 quadrati uguali)