

La storia del signor Tau

Il signor Tau è un topologo. Essere un topologo è una cosa ben strana e bizzarra che comunque, diciamolo subito, non ha nulla a che fare con i topi, quelle bestioline che hanno la fama di terrorizzare le signore dall'animo gentile. Anzi, a dire la verità, il signor Tau non ha molta simpatia per i topi poiché ogni volta che un conoscente occasionale gli chiede:

-Lei, signor Tau, di cosa si interessa?

e lui risponde con una punta di orgoglio:

- Di Topologia, perbacco, sono un topologo!

l'altro non manca di aggiungere:

- Ah, uno studioso di topi.

Quando il conoscente occasionale è una signora dall'animo gentile, questa frase si accompagna sempre con una certa espressione di schifo che neanche gli sforzi più tenaci del signor Tau, le spiegazioni più convincenti, riescono ad eliminare completamente.

Lo stesso aspetto fisico contribuisce a circondare il signor Tau di un'aria di stranezza indecifrabile. È molto piccolo ed esile, vestito in modo dimesso (forse ha un unico vestito), ma soprattutto gli occhi, grandi e chiari, gli conferiscono quell'aria un po' misteriosa. A ben guardare ci si accorge che uno dei due occhi è più grande dell'altro e viene spontaneo di chiedersi se le cose, gli oggetti, le case, gli alberi il signor Tau le veda proprio come noi le vediamo.

In realtà, il signor Tau, il topologo, è interessato solo alle proprietà più semplici delle figure nello spazio, come l'essere o meno connesse, tutte di un pezzo, avere o meno dei buchi, dei manici. Non ha, il nostro topologo, nessuna simpatia per gli angoli, le linee spezzate che con tutta tranquillità preferisce immaginare lisce. Non ha ancora imparato bene a distinguere la destra dalla sinistra, l'alto dal basso; la stessa grandezza o piccolezza di una figura ha per lui ben poco interesse, tutto concentrato com'è nella ricerca delle proprietà «essenziali» che caratterizzano una figura. Di questo ne ha

fatto, anzi, un vero punto di orgoglio. Rifiuta tutto ciò che ha imparato a scuola sui triangoli, sui cerchi, sui solidi poiché tutte quelle proprietà che ha studiato sui libri di geometria, secondo lui, nascondono l'essenziale, la natura più intima e distintiva delle forme nello spazio.

Anche la casa dove il signor Tau abita è molto strana. È un po' ai bordi della città, con la campagna alle spalle e lo spazio infinito del cielo ben visibile. Vista da fuori, ha un aspetto apparentemente simile a tutte le altre case. Il signor Tau non ama fare l'eccentrico ed essere additato da tutti. Ma forse, guardando più da vicino, si intravede qualcosa di insolito già nelle sue finestre. Non sono esattamente rettangolari, come tutte le altre finestre, gli angoli non ci sono e al loro posto dei piccoli archetti, discreti e quasi invisibili ad un occhio disattento. Anche le persiane, in legno, non sono come le altre. Sono sì verdi come è nella tradizione, ma il disegno pare una specie di curioso labirinto, del quale è difficile immaginare l'ombra lasciata dal sole sul pavimento.

Ma la grande meraviglia si prova quando si entra nella casa del signor Tau. Pare improvvisamente di essere entrati in un luogo magico e fantasioso, in un altro mondo, come quando al luna park, seduti sul carrellino, entriamo, pieni di stupore e paura, nella casa buia della strega e là dentro, nel buio, tutto è cambiato, e il nostro cuore batte più forte. Ecco, anche se la casa del signor Tau è bianca e piena di luce, anche se le cose che ci sono non fanno paura, pure la sensazione è la medesima, di un'altra realtà, e il cuore batte più forte.

Le pareti, come era con le finestre, non arrivano dritte al pavimento formando il solito angolo, ma si incurvano sia quando si uniscono tra di loro, sia quando raggiungono il soffitto o il pavimento. In questo modo si perde la sensazione che ci sia un pavimento, delle pareti e un soffitto, tutto si unisce armonicamente. Tutto ha lo stesso colore: bianco.

Solo vicino alla finestra più grande il pavimento è nero, anzi è fatto di pietra lavagna. È la lavagna del signor Tau, dove lui disegna le forme più strane, le tracce dei suoi studi, e dove il sole, filtrando dalla persiana-labirinto, lascia la sua luminosa impronta.

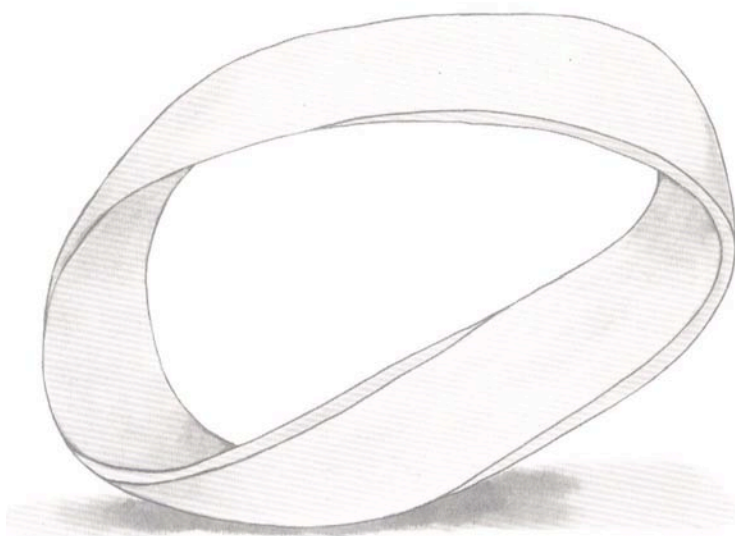
Le porte non ci sono. Al loro posto passaggi tondi, ad arco, non regolari, uniscono le varie stanze dando l'idea di un unico ambiente.

Nessun mobile nella casa del signor Tau, niente letti, sedie, armadi, frigoriferi, televisori, tavoli. Al loro posto degli oggetti, delle sculture, dei quadri, che rappresentano strane forme. Sotto ognuna è scritto qualcosa. Non tutto si capisce.

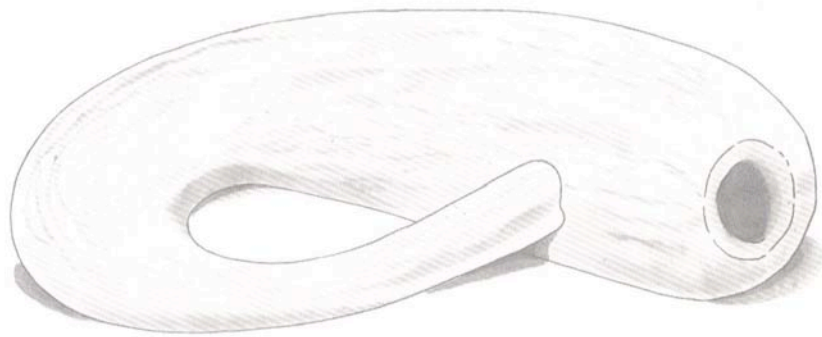
Sotto una «scultura» bianca, forse di gesso, c'è scritto: «Il nastro di Möbius è l'esempio più semplice di superficie non orientabile».

E vicino una stampa senza cornice, su uno sfondo bianco come il muro, di modo che la figura si sperda nel bianco della parete.

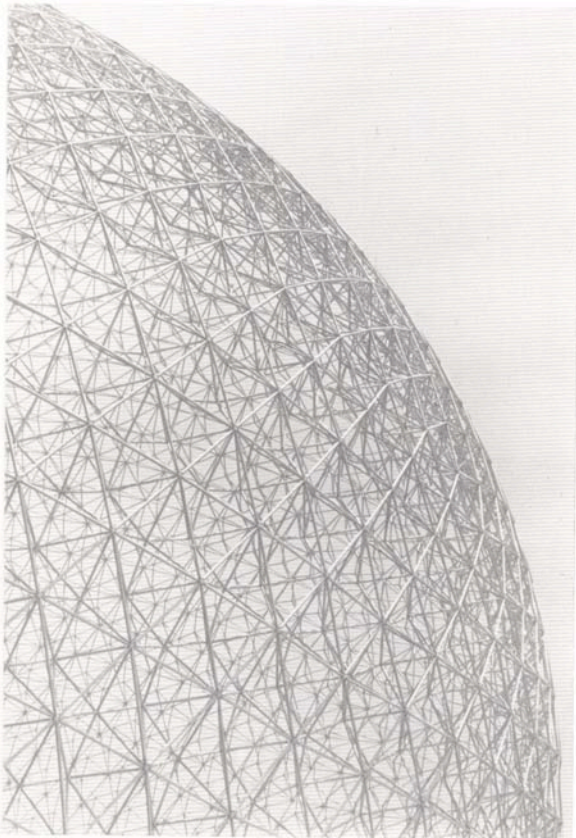
Vicino un'altra scultura strana. C'è scritto: «Bottiglia di Klein. N.B.: Non posso scolpirla meglio di così nel nostro spazio a tre dimensioni. Avrei bisogno di uno spazio più grande, a quattro dimensioni. Scusate». Sì perché il signor Tau è in realtà molto modesto e sempre timoroso di un giudizio negativo degli altri.



Nastro di Möbius



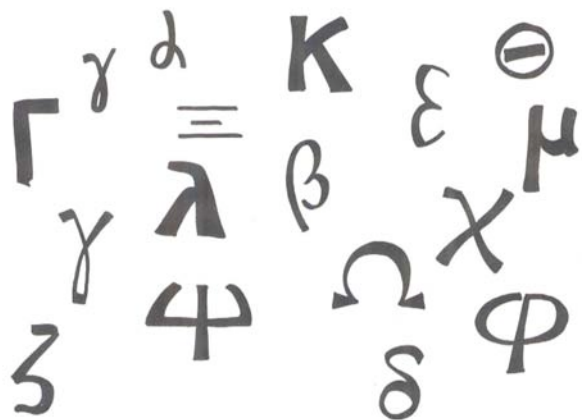
Bottiglia di Klein



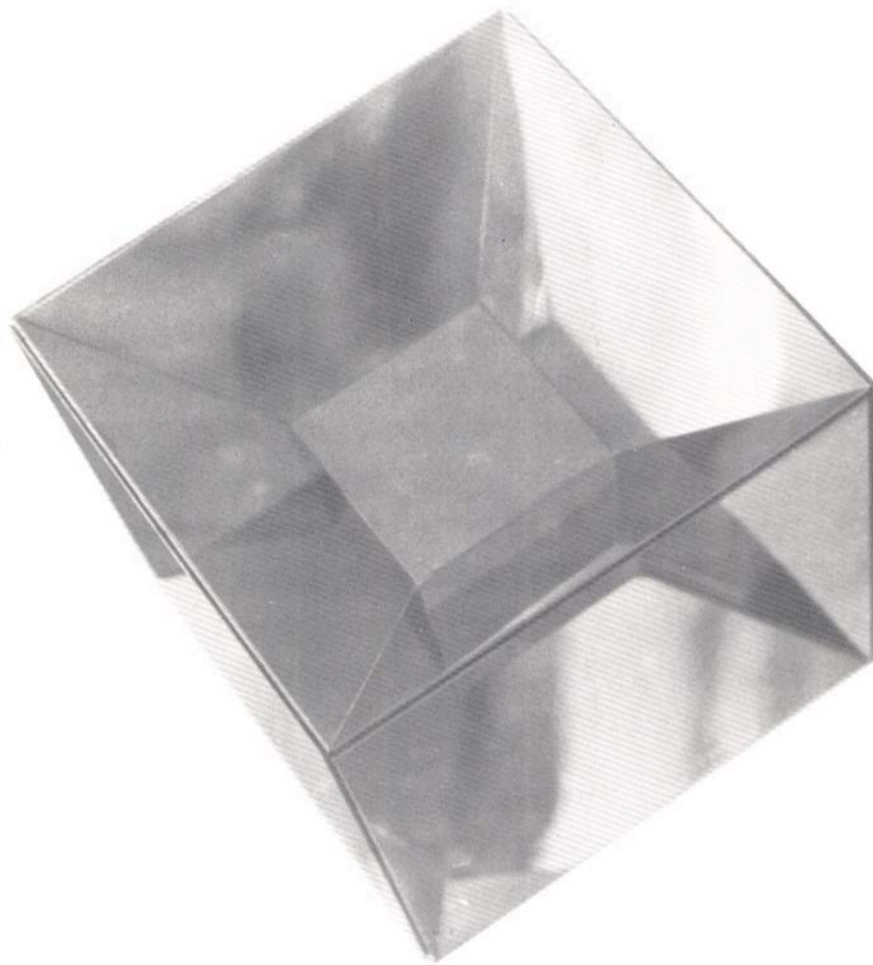
Montreal (Canada)
Cupola

Mille altre cose straordinarie si trovano in quella casa: sculture, disegni, quadri sui muri, strumenti scientifici antichi, grandi corde annodate, libri amucchiati qua e là, alcuni aperti probabilmente a quelle pagine che avevano suscitato maggiore emozione, e poi cuscini grandi e piccoli dalle forme più strane.

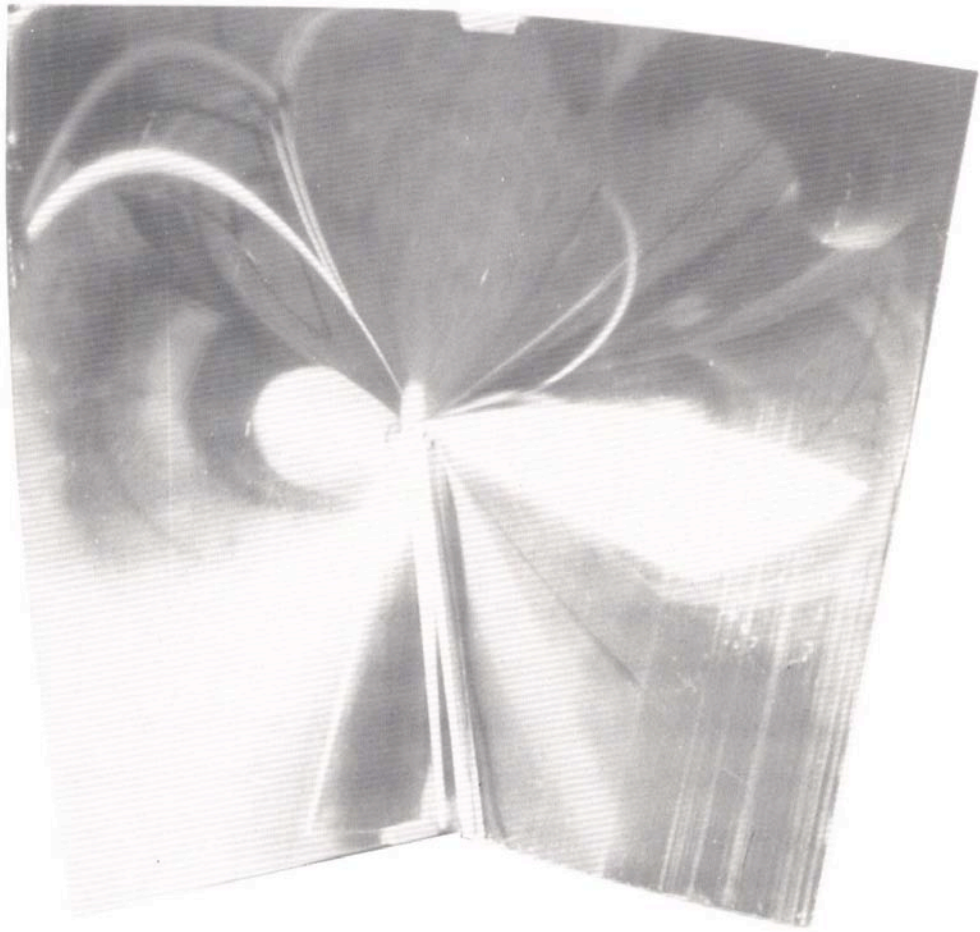
In una stanza ci sono palloncini colorati, di quelli delle fiere, e una camera d'aria gonfiata, enorme, nera, di una ruota di camion, dove, col gesso, sono disegnate delle linee e delle lettere dell'alfabeto greco.



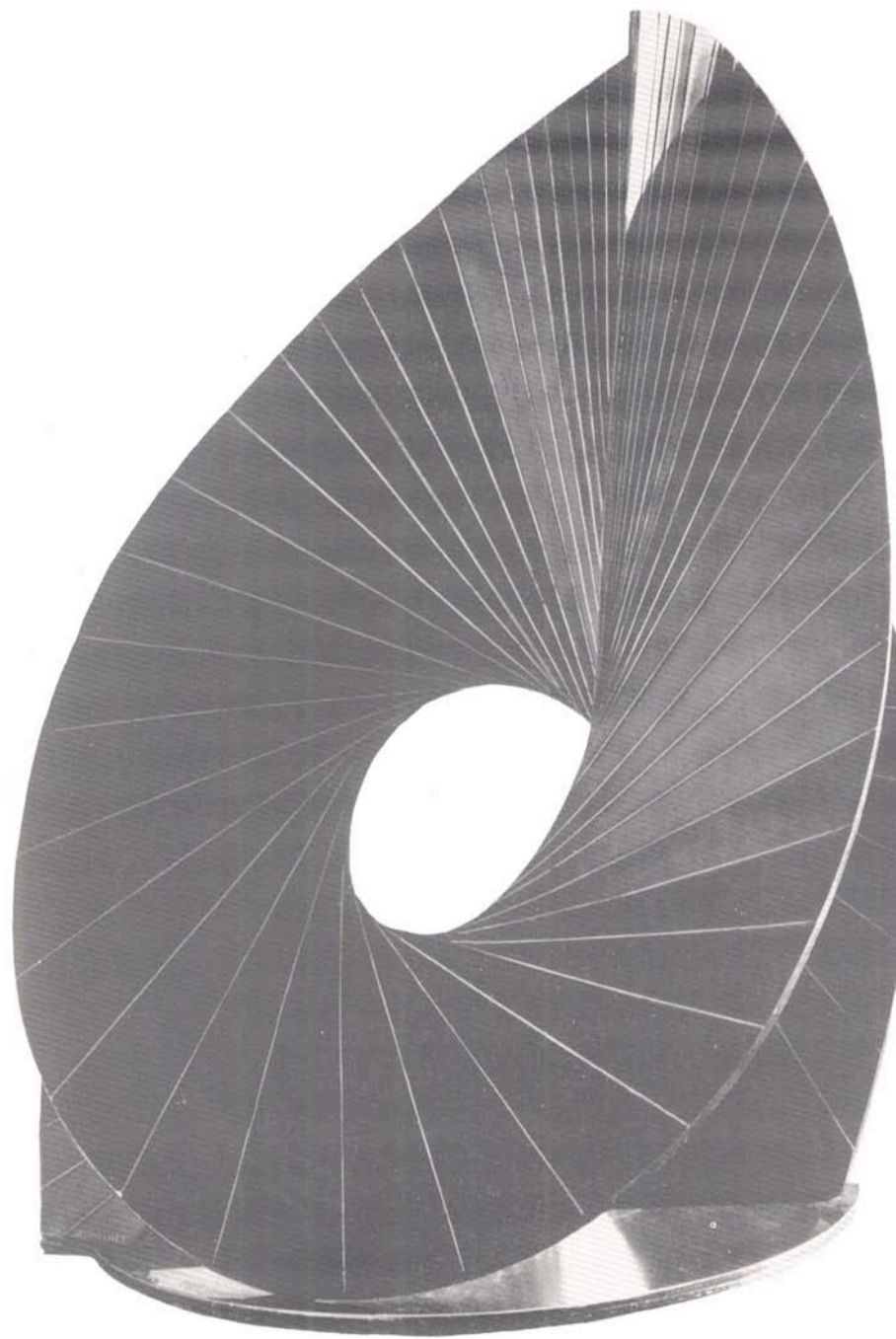
In un'altra stanza strutture complicate fatte di bastoncini di legno come le cupole moderne e poi ci sono, montati su telai di legno, dotati di strani meccanismi, fogli di gomma, ovunque fogli di gomma, dove sopra sono disegnate delle strane figure e mille altre cose che non riusciamo tutte a descrivere qui. Nelle pagine seguenti abbiamo riportato alcuni dei disegni, dei quadri, delle sculture e degli altri oggetti della casa del signor Tau.



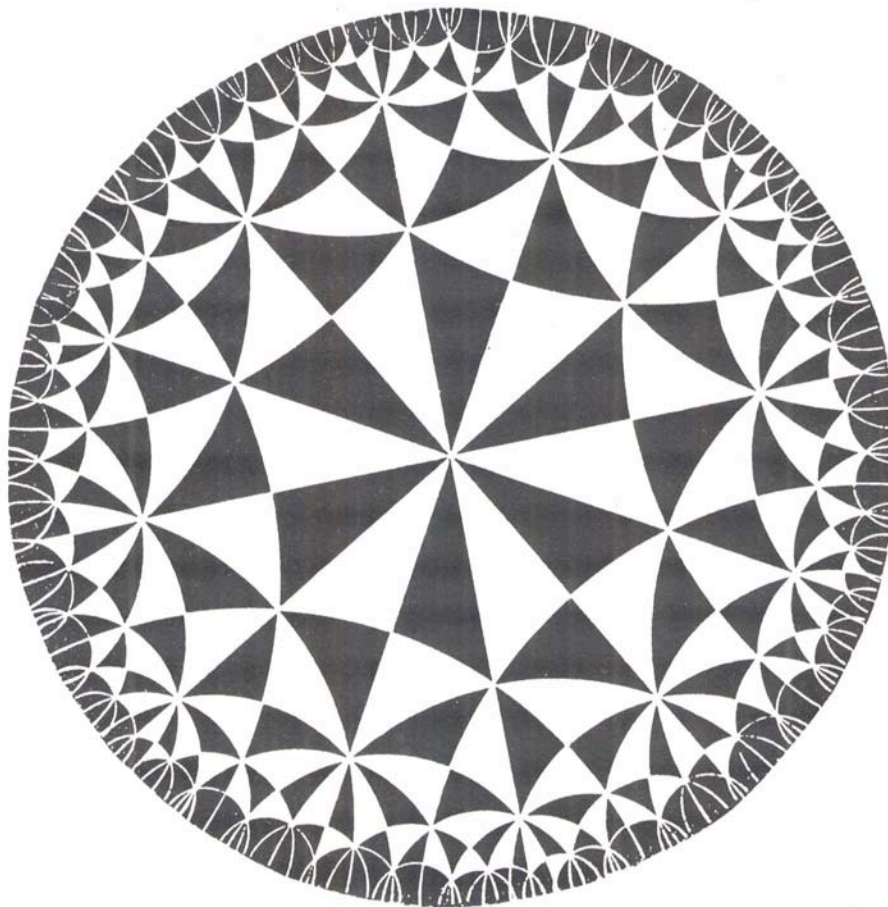
L'ipercubo: scultura di Attilio Pierelli
Cubo a 4 dimensioni proiettato nello spazio a 3 dimensioni. L'ipercubo ha
16 vertici!



Superfici dotata di singolarità: scultura di Attilio Pierelli.
L'immagine che si riflette nel punto singolare si contorce, si disgrega.
perde di identità.



Superficie rigata: scultura di Antoine Pevsner.
Superficie curva. Questa superficie è ottenuta con delle rette



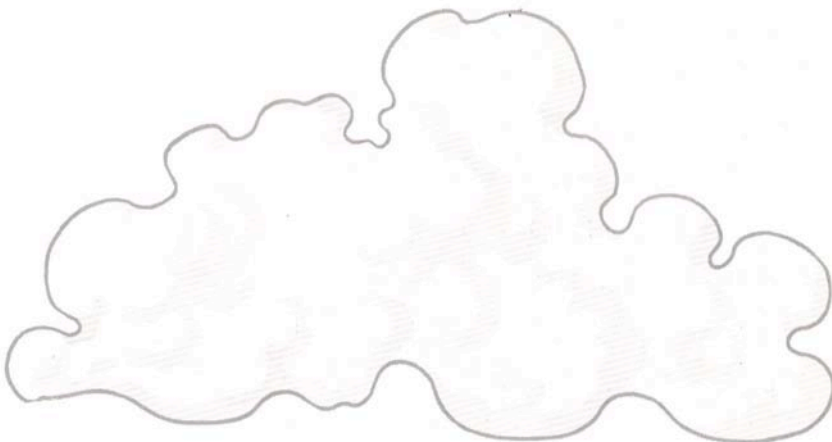
Piano non euclideo: disegno di Henri Poincaré. Modello di un piano iperbolico: la somma degli angoli interni a un triangolo è più piccola di 180 gradi.

Quei rudimentali telai di legno con sopra montati dei fogli di gomma sono molto importanti nella storia del signor Tau, risalgono addirittura alla

sua giovinezza, a quando aveva forse 9 o 10 anni, ai suoi primi studi di topologia.

Allora **il** piccolo Tau era dominato da un'unica grande aspirazione: trovare le proprietà essenziali più profonde delle figure geometriche. Per questo aveva costruito quei rudimentali telai di legno con sopra un foglio di gomma, che lui poteva, con semplici meccanismi, allungare, tirare, restringere in tutte le direzioni; sul foglio di gomma disegnava le figure per poi poterle deformare con continuità in tutte le direzioni e trovare cosa non mutasse durante queste deformazioni, cosa rimanesse invariato. La retta, tanto vantata sui libri di scuola, perdeva così importanza: sul foglio di gomma la linea dritta diventava curva dopo la deformazione.

Ma l'idea di usare i fogli di gomma venne più tardi. All'inizio **il** piccolo Tau faceva i suoi pensieri guardando **il** cielo. Ogni giorno amava, soprattutto d'autunno, correre sopra una piccola collina alla periferia della città, e di là, da un punto ben preciso, che lui conosceva molto bene, quasi come fosse una sua tana, di là guardava **il** cielo. Guardava le infinite forme che le nuvole disegnavano e come queste, sospinte dal vento, cambiassero continuamente. Poi cercava di disegnare la nuvola su un foglio ma, nelle giornate ventose, gli capitava di non riuscire neanche a finire **il** disegno che la nuvola già aveva cambiato forma. E questo lo divertiva molto e allora cercava di fare un altro disegno più in fretta, un altro schizzo ed era come una gara tra lui ed **il** vento. Poi a casa riguardava questi disegni e sapeva, forse solo lui che li aveva fatti, che era la stessa nuvola. Eppure la forma era così diversa da un disegno all'altro. Cosa c'era in comune, di invariante in tutti quei disegni?



Altri giorni si incantava guardando gli stormi di uccelli che, in gruppo, fittissimi, giocavano in cielo al tramonto, disegnando forme nere, come punteggiate, in continuo movimento. Anche loro, come le nuvole, riempivano il cielo di meravigliosi disegni in movimento come una danza in uno spazio infinito.

Ma per gli stormi era assolutamente impossibile poter fare dei disegni data la rapidità con la quale tutto cambiava.

Fu in quei momenti di autunno, quando era assorto, con gli occhi immersi nel cielo, che fece la sua prima importante amicizia. Era una rondine. Piccola, sola, volava furiosa in mezzo agli alberi con giri rapidissimi, e una strana aria come di disperazione. Poi, quando fu buio e gli stormi dei suoi compagni si perdevano lontano, si posò sfinita vicino al piccolo Tau e Tau, guardandola col suo occhio più grande e il suo occhio più piccolo, le comunicò subito un sentimento di simpatia, di disponibilità. Fu così che il piccolo Tau e la rondine diventarono amici e lui cominciò a farle mille domande sui suoi viaggi, sulle cose più belle che aveva visto e sugli stormi che lui incantato, guardava dalla sua collina. Così, ogni giorno, fino a che la rondine partì per l'Egitto, Tau giocava con lei. E mille cose seppe sulla vita degli uccelli e sui loro problemi e di come fosse importante per fare un lungo viaggio stare tutti insieme, l'uno vicino all'altro.

Fu così che il piccolo Tau comprese l'essenza di quelle figure in movimento che tanto spesso aveva visto nel cielo, comprese che gli stormi, anche se si allungavano, si assottigliavano in un punto, non si separavano mai, comprese che la cosa principale era l'unità. E arrivò così a capire, la prima proprietà topologica della sua carriera: la connessione. Capì che una figura costituita da un unico pezzo non poteva, facendo delle deformazioni continue, dividersi in due. Capì anche che, se una figura era formata da più pezzi staccati tra loro, non si potevano riunire queste componenti facendo delle deformazioni continue del foglio di gomma.

Cominciò così a disegnare varie figure sul suo foglio di gomma, formate da uno o più pezzi, e scoprì che tirando il foglio di gomma, senza fare tagli, la forma della figura cambiava radicalmente, ma il numero di pezzi non cambiava.

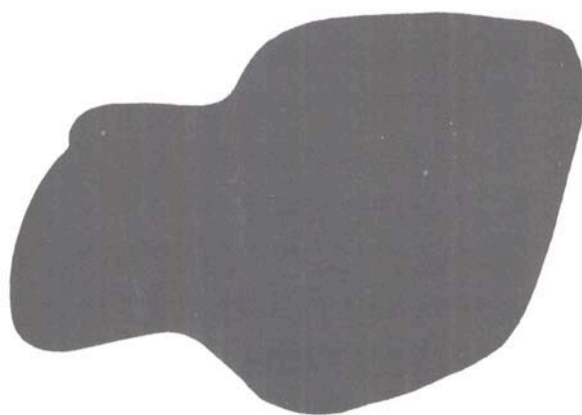


Figura connessa

Così chiamò *connessa* una figura costituita da un solo pezzo e chiamò *componenti connesse* i singoli pezzi di cui era costituita una figura.



Figura con tre componenti connesse

Aveva scoperto una proprietà essenziale delle figure, una proprietà invariante che non cambia deformando il foglio di gomma. Aveva scoperto la connessione.

A questo punto Tau fu preso da una grande euforia, cominciò a scrivere le prime pagine del suo libro. Trovò subito il titolo «Proprietà essenziali e primitive delle figure nello spazio». Il capitolo I doveva parlare del metodo, delle deformazioni continue, del foglio di gomma, doveva spiegare chiaramente cosa si intendesse per proprietà essenziali, primitive delle figure dello spazio. Il capitolo II doveva invece trattare

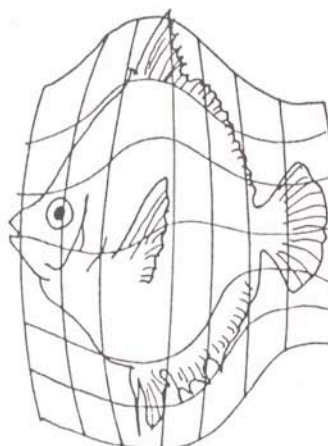
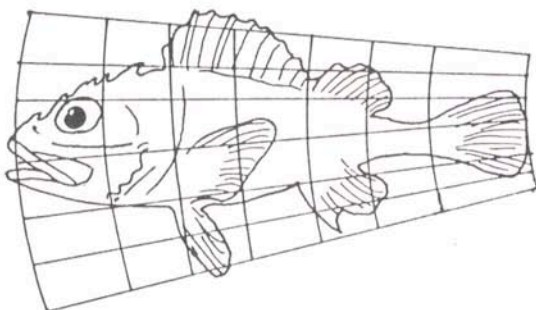
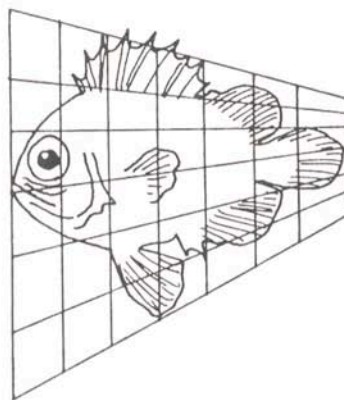
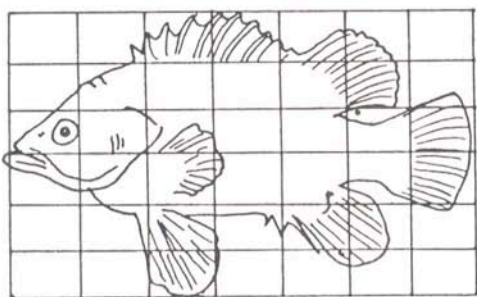
della connessione. Scrisse per ore e ore. Le parole, le idee, i disegni venivano come per magia, senza sforzo. Alla fine, pieno di soddisfazione, scrisse l'ultima frase del suo secondo capitolo: «Poiché ogni figura si può dividere in tante parti quante sono le sue componenti connesse, non ci resta che studiare le proprietà primitive di una figura connessa». E mise punto.

Queste ultime parole restarono stampate nella sua testa in modo sempre più assillante. Quali erano queste proprietà? Quali erano le proprietà di una figura connessa che non cambiavano deformando la figura con continuità? Cominciò a guardare i suoi libri di scuola, i libri di geometria. Ma si accorse subito che uno spigolo poteva, con continuità, smussarsi, trasformarsi in una curva, addirittura in una retta, capì che i triangoli potevano trasformarsi in cerchi e così i quadrati, i rettangoli. Fino a che, a furia di tirare il suo foglio di gomma, Tau si accorse che la stragrande maggioranza delle cose di geometria imparate a scuola perdevano per lui ogni interesse, nascondevano l'essenziale. Cosa restava di immutabile deformando il foglio di gomma? Esisteva in definitiva questa essenza delle figure connesse che lui andava cercando? Esisteva qualche proprietà invariante, a parte la connessione che già gli pareva banale? Esisteva qualcosa che non mutasse, deformando con continuità il suo piano, il suo spazio? Questo pensiero era diventato una specie di assillo, poiché, se da un lato aveva perduto ogni interesse per la vecchia geometria scolastica, fatta di lunghezze, di angoli, di proporzioni, di numeri, d'altro lato gli pareva che sul suo foglio di gomma le figure e le loro proprietà si perdessero completamente senza lasciare nessuna traccia, lasciando un gran vuoto. Così il povero Tau cadde in una profonda depressione. Anche le passeggiate al tramonto sulla sua collina non gli davano più nessun conforto e nessuna idea. Le nuvole non lo interessavano più e la rondine, la sua cara amica, era partita per l'Egitto, lontana. A volte, tornando a casa, aveva perfino voglia di bruciare quei primi due capitoli che aveva già scritto. Ma quando l'occhio gli si posava su quella ultima frase «... le proprietà primitive di una figura connessa», gli veniva di pensare a quei momenti di euforia, di come allora gli sembrava tutto facile, tutto possibile e di come era stato felice.

Un giorno però successe una cosa molto importante che stimolò il giovane Tau a riprendere i suoi vecchi pensieri.

Sfogliando un libro di scienze naturali aveva visto delle strane figure che gli avevano rimesso in moto l'antico entusiasmo. Anzi fu così colpito da questi disegni che, appena li vide, si rimise immediatamente a lavorare, a

pensare per ore e ore dimenticando perfino di mangiare e di fare la sua solita passeggiata pomeridiana alla collina. Ecco i disegni che il giovane Tau aveva visto su quel libro:



Lo scienziato aveva disegnato su un foglio di gomma (proprio come lui!) un pesce, poi aveva deformato più volte **il** foglio e il pesce aveva cambiato di forma, così che, dallo stesso pesce originale, si potevano ricavare tanti altri pesci di forme molto diverse tra loro. Ebbene tutti questi pesci avevano in comune una proprietà molto importante: erano della stessa specie!

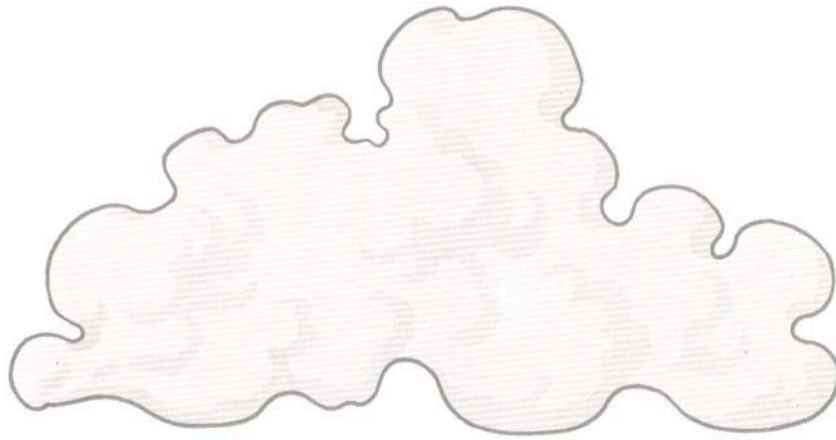
Questo non era esattamente quello che **il** nostro topologo cercava, poiché lui era interessato a proprietà *geometriche* invarianti, mentre «l'essere un pesce della stessa specie» era una proprietà diciamo così «zoologica» che a lui non interessava. Però **il** fatto che uno scienziato si fosse messo, come lui, a fare disegni su un foglio di gomma, a fare deformazioni e a cercare delle proprietà fisse, anche se per tutt'altri scopi, e **il** fatto, ancora più importante, di essere alla fine arrivati a dei risultati, di avere trovato una essenza comune a tutte quelle deformazioni, tutto questo dava al giovane Tau una energia nuova, una speranza che la sua idea non fosse del tutto priva di senso.

In quelle ore di ebbrezza e di grande speranza **il** nostro giovane topologo si accorse subito che l'errore che aveva fatto era di aver preso in considerazione delle figure troppo legate alla geometria scolastica, figure in un certo senso troppo semplici, come i triangoli, quadrati, cerchi e che invece questa sua nuova ricerca poteva, anzi doveva, prendere in considerazione figure molto più complesse.

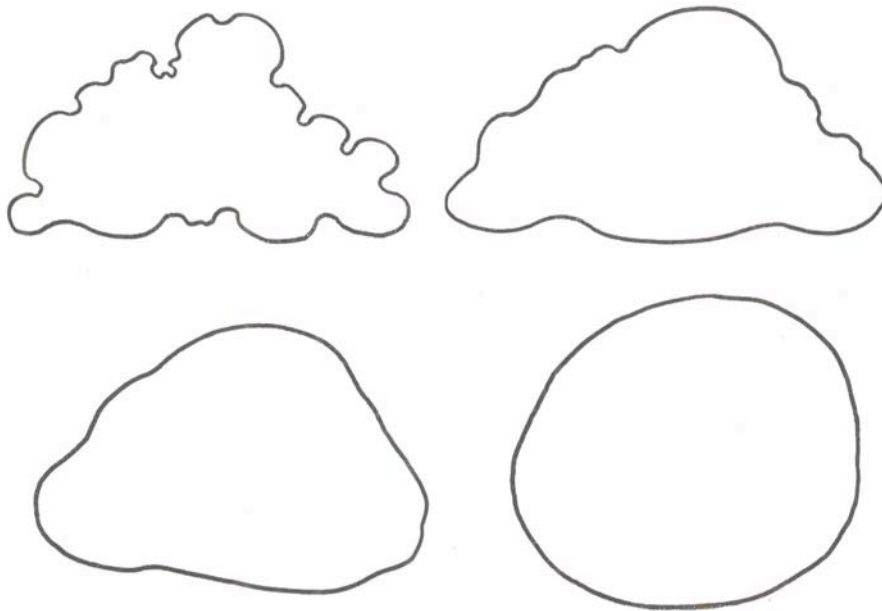
Cominciò allora dalla sua mano. Ricalcò la mano sul foglio e poi, deformandolo, ridusse quella linea ad un semplice arco.



Poi gli capitò sotto **il** grande occhio un suo vecchio disegno,



il disegno di una nuvola e cominciò a deformare quella linea fino a ridurla a un cerchio.



Si accorse così che le linee della mano e quelle e quelle della nuvola avevano una proprietà essenziale che le faceva diverse.

La linea della nuvola divideva il piano in due regioni: i punti interni alla nuvola e i punti esterni (il cielo limpido), mentre la linea della mano non divideva il foglio in due regioni connesse. Le linee del secondo tipo, quelle cioè che possono deformarsi con continuità in un arco di cerchio o in un segmento, le chiamò allora *linee aperte* e le altre, quelle che potevano deformarsi con continuità in un cerchio, *linee chiuse*.

Scoprì così che i due tipi di linea erano essenzialmente diversi, che non era possibile trasformare con una deformazione continua e senza tagli

o incollamenti una linea aperta in una linea chiusa. Scopri che, disegnando sul suo foglio di gomma una linea aperta, questa restava aperta anche se il foglio veniva dilatato, tirato, deformato in tutte le direzioni. L'essere una linea aperta era una proprietà invariante, era una proprietà primitiva, essenziale di una figura connessa. Lo stesso valeva per le linee chiuse, anzi in più si può dire che una linea chiusa separa il piano in due regioni connesse; nell'una ci sono i punti interni, nell'altra i punti esterni. Pensò così alle isole nel mare. I punti esterni il mare, e i punti interni la terra. Pensò anche che l'isola poteva avere un contorno molto frastagliato, pensò che la linea poteva essere molto complicata, ma se era chiusa, sempre doveva racchiudere una regione di punti interni e una di punti esterni. Intuì così quello che i moderni topologi chiamano «il teorema di Jordan». E si mise così a scrivere il suo terzo capitolo «Sulle linee aperte e chiuse».

Ora Tau è diventato grande, non è più un bambino, ha la sua casa e ha scritto ancora tanti altri capitoli di quel suo libro e tanti altri sono ancora da scrivere. Lo studio delle proprietà di una figura che non cambiano quando la figura viene deformata con continuità ha avuto un nome difficile, *Topologia*, che viene da una lingua antica e nobile: il greco. E il signor Tau si sente orgoglioso di essere un topologo, anche se le signore dall'animo gentile sulle prime pensano ai topi.

Spesso a casa del signor Tau ci sono i bambini che lo vanno a trovare e lui racconta loro sulle cose meravigliose che ha in casa e li fa giocare con i suoi palloncini, coi suoi fogli di gomma, col labirinto che il sole stampa sulla sua lavagna, li fa pensare con le sue strane idee e le sue strane sculture. Spesso racconta ai bambini della sua amica rondine che ogni anno, in autunno, tornava a trovarlo sulla collina ai bordi della città e di come la rondine gli raccontasse delle isole meravigliose che attraversava in mare, mentre Tau pensava alle sue linee chiuse.

Altre volte parla ai bambini dei quadri che ha in casa, di alcuni in particolare, di Mario Schifano, a cui tiene molto perché ispirarono, in un certo senso, il quarto capitolo del suo libro: «Figure semplicemente connesse e non».

Nelle pagine seguenti sono riprodotte le sedici pitture realizzate da Mario Schifano per illustrare questa fiaba.