

Il gioco dell'Isola

Un giorno, a casa del signor Tau, c'era tanta di quella confusione, che le grida arrivavano fino alla strada. Una anziana signora che abitava da quelle parti e che si trovava a passeggiare col suo cagnolino proprio sotto le finestre-labirinto del signor Tau, esclamò rivolta al suo cane:

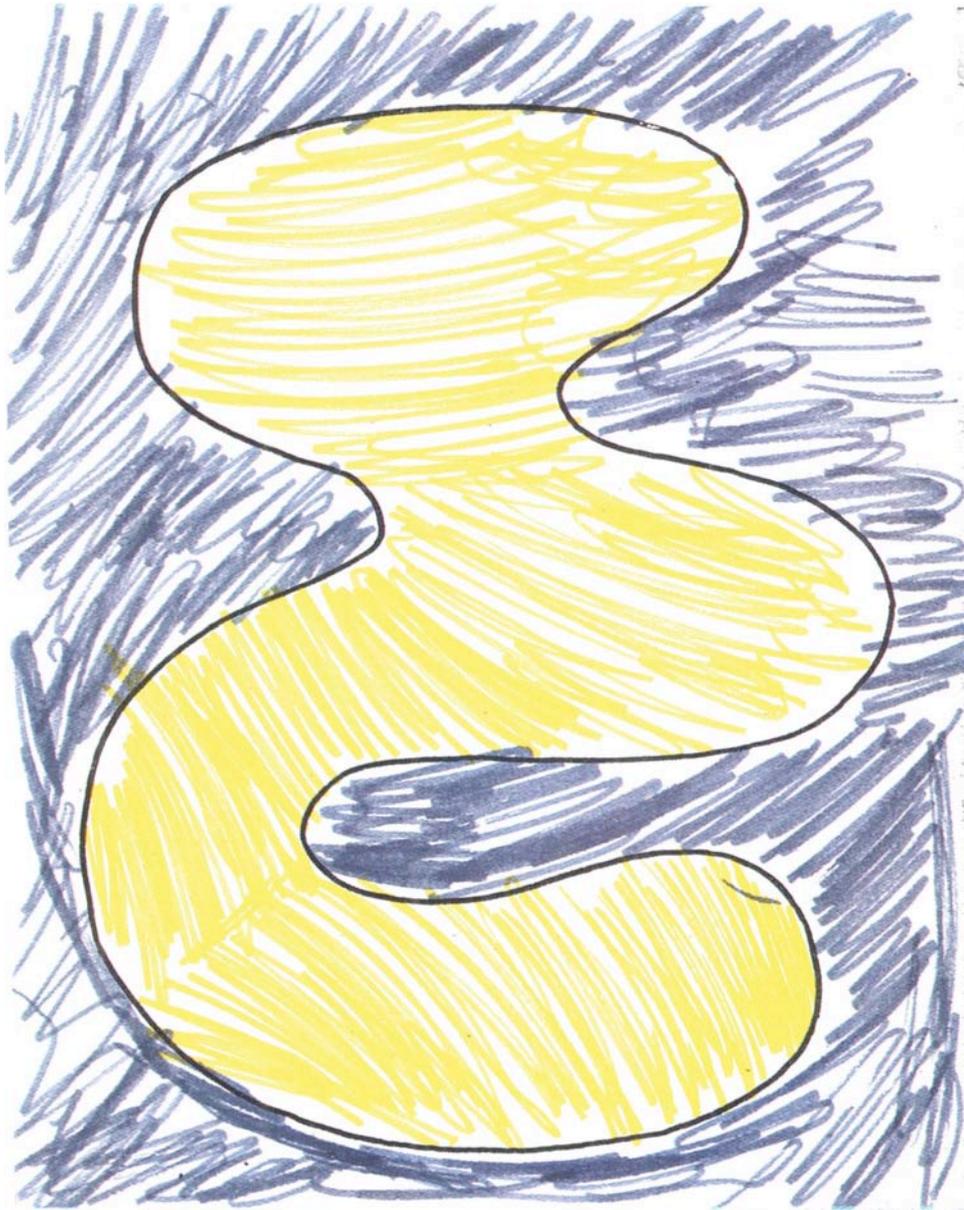
- Che chiasso! Che confusione! Tittina cara, neanche qua ti posso più portare a spasso. Tu, carina, sei tanto sensibile ai rumori che ti innervosisci subito. Dovremmo cambiare casa, sì dovremmo proprio cambiare casa!

I cani, come si sa, sono così intelligenti, che anche di fronte alle stupidaggini dei loro padroni, fanno finta di essere d'accordo. In realtà, Titti amava molto giocare, saltare, correre e fare chiasso, e se, spesso, si tratteneva dal farlo, era solo per accondiscendere la sua vecchia padrona. Così anche quel giorno Titti si tratteneva dal correre a casa del signor Tau ed unirsi alla confusione generale. Guardò tristemente la sua padrona e scodinzolò un po'.

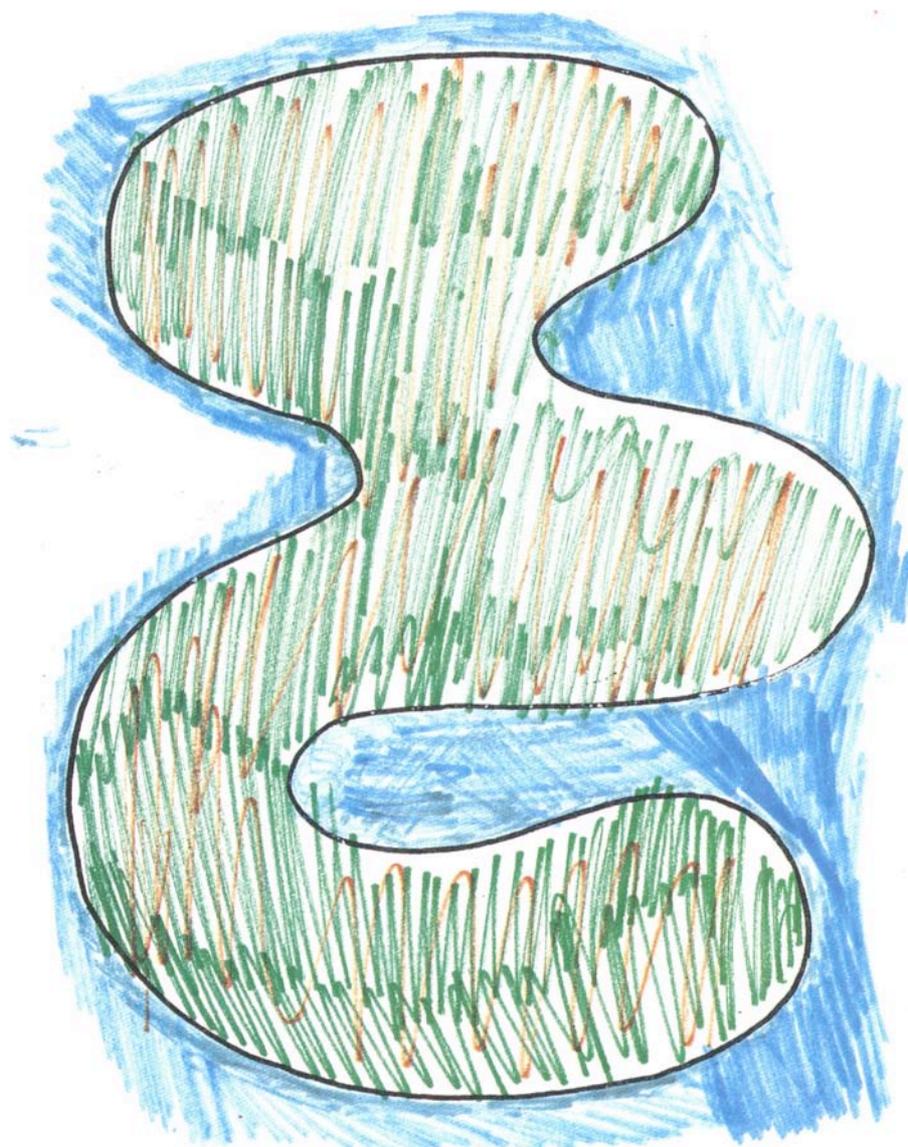
A casa del signor Tau c'erano moltissimi bambini e i bambini, si sa, urlano, parlano tutti insieme e fanno una gran confusione, anche quando studiano o fanno delle scoperte fondamentali. Ogni scoperta per un bambino è fondamentale, è una sensazione così forte che spesso si estrinseca con un urlo, con una voglia violenta di comunicare la propria scoperta a tutto il mondo. Così i bambini stavano studiando la topologia a casa del signor Tau. E Tau mai sarebbe riuscito a convincere l'anziana signora, che portava a spasso il suo cagnolino, che in realtà quella confusione era generata da discussioni di topologia.

I bambini, divisi in piccoli gruppi, seduti sui cuscini, sembrava facessero dei disegni su dei fogli che Tau gli aveva consegnato. Su questi fogli era disegnata una curva chiusa, la curva rappresentava il contorno di un'isola e i bambini dovevano colorare di azzurro i punti esterni (i punti del mare) e di marrone o verde i punti interni. Figurarsi la confusione quando si scoprì che Andrea (di soli 6 anni) non trovava tra i suoi colori né il verde, né il marrone e neppure l'azzurro. Pianti e grida. Nessuno aveva due verdi.

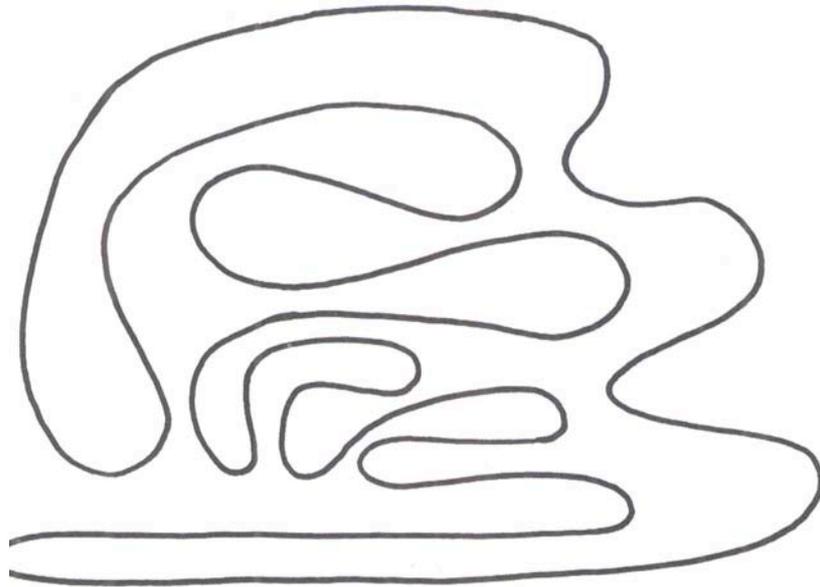
Alla fine si risolve il problema colorando di grigio il mare (era una giornata di pioggia) e di giallo l'isola (era tutta sabbiosa).
Ecco il disegno del piccolo Andrea:



Ed ecco un altro disegno di un bambino molto bene organizzato:
aveva sia il celeste che il verde e il marrone.



Tau dava ai bambini delle isole sempre più complicate. A occhio incominciava a essere difficile stabilire subito se un punto era interno od esterno. I bambini si trovarono di fronte questa isola:



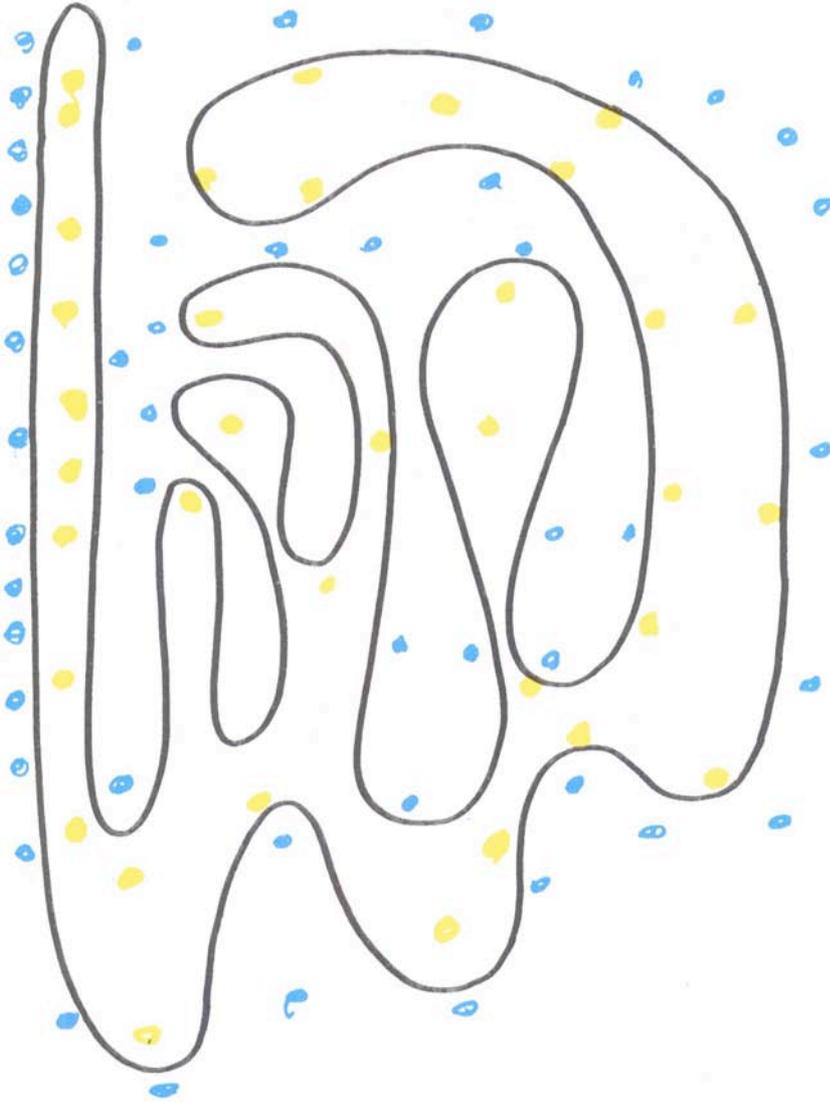
Per fare prima degli altri a Roberta venne l'idea di fare dei puntini anziché colorare tutta l'isola. Guardando i puntini si capiva immediatamente dove erano i punti interni e dove quelli esterni. I punti interni li disegnò di giallo. Ormai l'idea della sabbia aveva preso piede!

Roberta finì prestissimo.

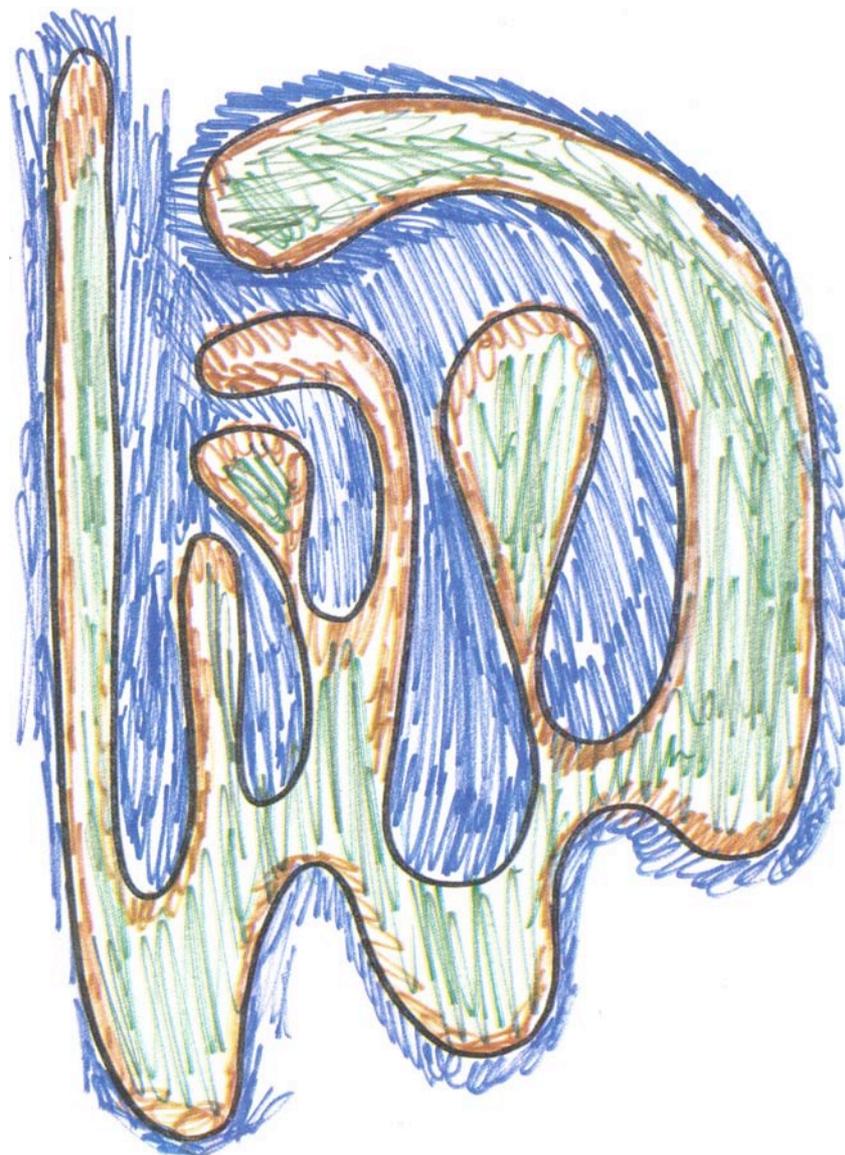
- Ho finito! Gridò trionfante.

Tutti gli altri erano appena agli inizi.

Ecco il disegno di Roberta:



Il bambino molto organizzato (quasi per ultimo) presentò la sua isola a tre colori:



A questo punto Tau richiamò su di sé l'attenzione. Aveva preso un lungo filo di lana bianco. Annodò tra di loro i due estremi del filo di lana e lo dispose sul pavimento-lavagna formando un grande cerchio.



Disse, indicando la lavagna:

- Questa è una curva chiusa. Si chiama cerchio.

Forse è la più semplice curva chiusa che possiamo immaginare.

Poi con dei gessi colorati disegnò alcuni punti: di azzurro i punti esterni e di giallo quelli interni, così come aveva fatto Roberta.

- Questi gialli sono i punti interni e questi i punti esterni. Questa curva chiusa divide la mia lavagna in due regioni: una formata dai punti interni e un'altra dai punti esterni. Questo è vero anche per ogni altra curva chiusa?

Ci fu un coro unanime di consensi:

- Sìiii.

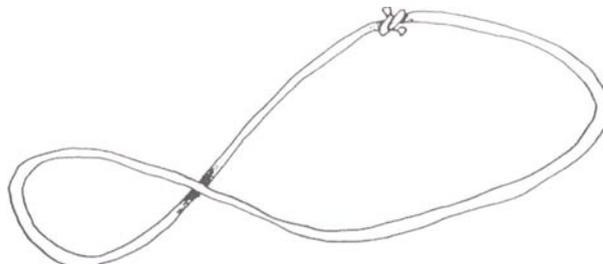
- Cos'è una curva chiusa?, domandò Tau. Ci fu una lunga discussione.

Un bambino gridò: - È una curva che si chiude.

Un altro:

- È il contorno di un'isola.

A un certo punto capitò che la lana, adagiata sulla lavagna, prendesse questa forma



Tau domandò indicando la lavagna:

- Questa è una curva chiusa?

Ci furono a questo punto due fazioni: chi sosteneva che si trattava ancora di una curva chiusa perché era fatta dallo stesso filo di lana chiuso, chi invece sosteneva che si trattava questa volta di due curve chiuse attaccate fra di loro.

Per dirimere la controversia alla fine Tau propose di chiamare *curve semplici* quelle curve che non hanno nodi o sovrapposizioni.

Tutti furono d'accordo fino a quando Tau esclamò:

- Ecco! Una curva chiusa semplice è una curva omeomorfa al cerchio!

Al signor Tau capitava ogni tanto, quasi per distrazione, di dire dei paroloni difficili. Si capiva che per lui erano cose di tutti i giorni e per questo non si accorgeva neanche che ben pochi potevano sapere il significato della parola omeomorfismo.

I bambini sentendo «omeomorfa» fecero il solito coro:

- Cosaaa?

Tau allora spiegò che quando due figure si possono ottenere l'una dall'altra mediante una deformazione continua allora le due figure sono omeomorfe. L'omeomorfismo è proprio la deformazione continua che fa passare da una figura all'altra.

I bambini così si convinsero che, se la curva ha delle sovrapposizioni, non può essere una curva chiusa semplice, perché, disegnando la curva sul foglio di gomma e deformando il foglio in tutti i modi, non si riesce mai ad eliminare le sovrapposizioni. Quindi non è

possibile deformare con continuità questa curva in un cerchio, che è una curva senza sovrapposizioni.

In altri termini la curva



non è omeomorfa al cerchio.

Si arrivò così a stabilire che una curva chiusa semplice è una curva che si può ottenere dal cerchio con una deformazione continua.

A questo punto il signor Tali ripropose la questione dalla quale si era partiti:

-È vero che ogni curva chiusa semplice divide il piano in due regioni, una di punti interni e l'altra di punti esterni?

I bambini risposero subito in coro:

-Siii.

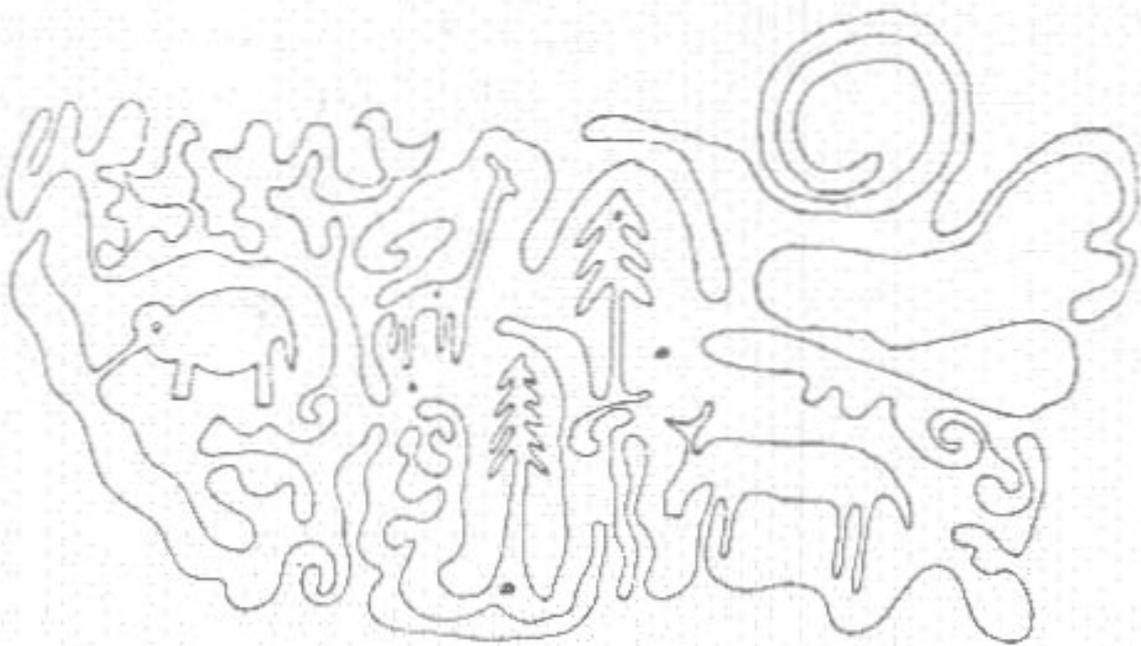
-Anche se la curva è molto strana?

disse Tau guardando i bambini con una espressione quasi di sfida.

Qualcuno cominciò a pensare che Tau fosse magari capace di tirar fuori dalle sue carte qualcosa di così strano da far crollare anche questa certezza. Il signor Tau, difatti, stava frugando impaziente in un mucchio di libri e carte che erano appoggiate in un angolo, nella stanza della lavagna.

-Ecco, ho trovato un'isola così bella e con un contorno così strana che prima è un elefante, poi un abete, poi un uccello, poi ancora un abete e una alce, e una giraffa e tante altre cose.

Tirò fuori dal mucchio di carte un foglio piegato in tante parti. Aprì il foglio, lo dispose sulla lavagna per terra e apparve un contorno pieno di figure, proprio come Tau aveva detto .



Con la matita segnò un punto: sembrava l'occhio dell'elefante.

- Questo punto è interno? E' esterno?

I bambini, sulle prime, così a occhio, non seppero rispondere. Roberta immaginò una fila di puntini che partendo dall'occhio dell'elefante arrivassero fuori, ma era un tale labirinto...

-Forse è interno. pensò.

Restava tuttavia l'ombra del dubbio.

Altri punti furono presi in considerazione ed anche per essi non era per niente facile stabilire dove fossero.

Infine Tau raccontò una storia.

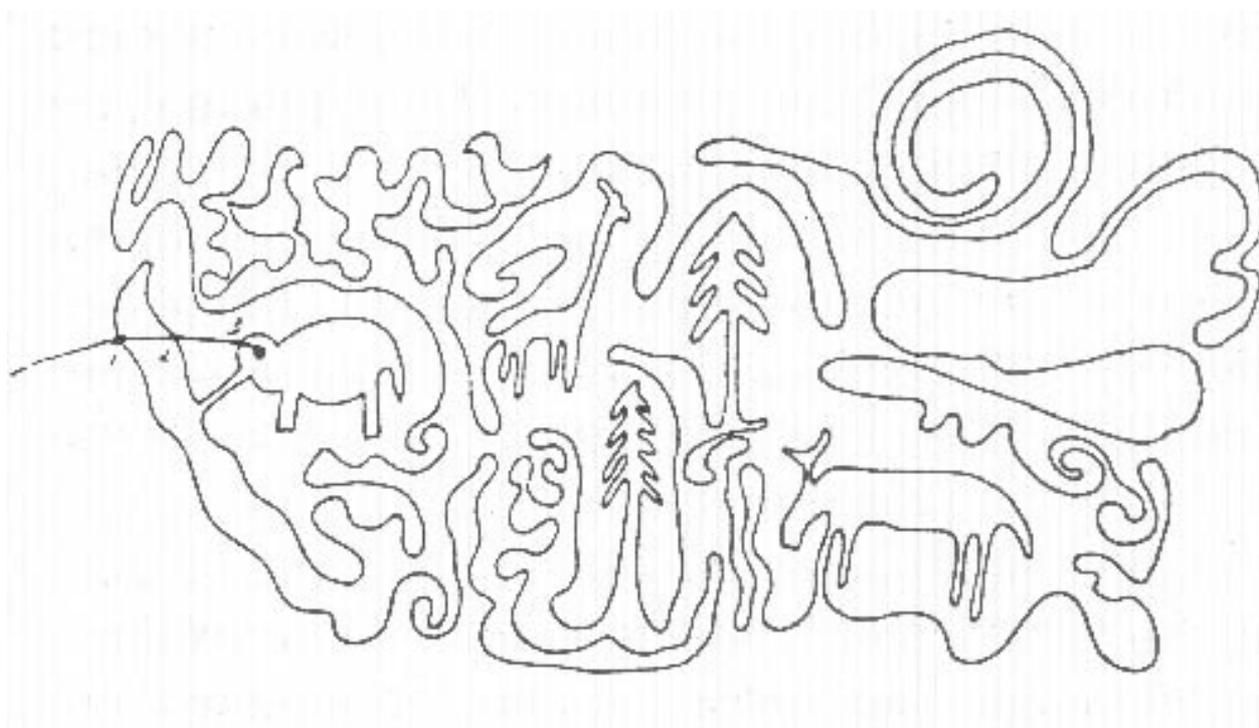
- Quando ero bambino conobbi una rondine che veniva a trovarmi tutti gli anni quando, durante la sua lunga migrazione verso i paesi caldi dell'Africa, passava vicino a casa mia. La rondine aveva viaggiato molto e mi raccontava di tutte le isole che lei aveva visitato e di come, viste dall'alto in volo fossero belle, strane, con delle forme complicate. Fu così che cominciai a immaginare quanto una curva chiusa possa essere complicata e mi divertivo io stesso a disegnare sul foglio isole sempre più strane. In certi casi era abbastanza difficile capire se un punto fosse interno o esterno all'isola, e così inventai un metodo molto semplice che permetteva di rispondere a questa domanda in pochissimo tempo. In più,

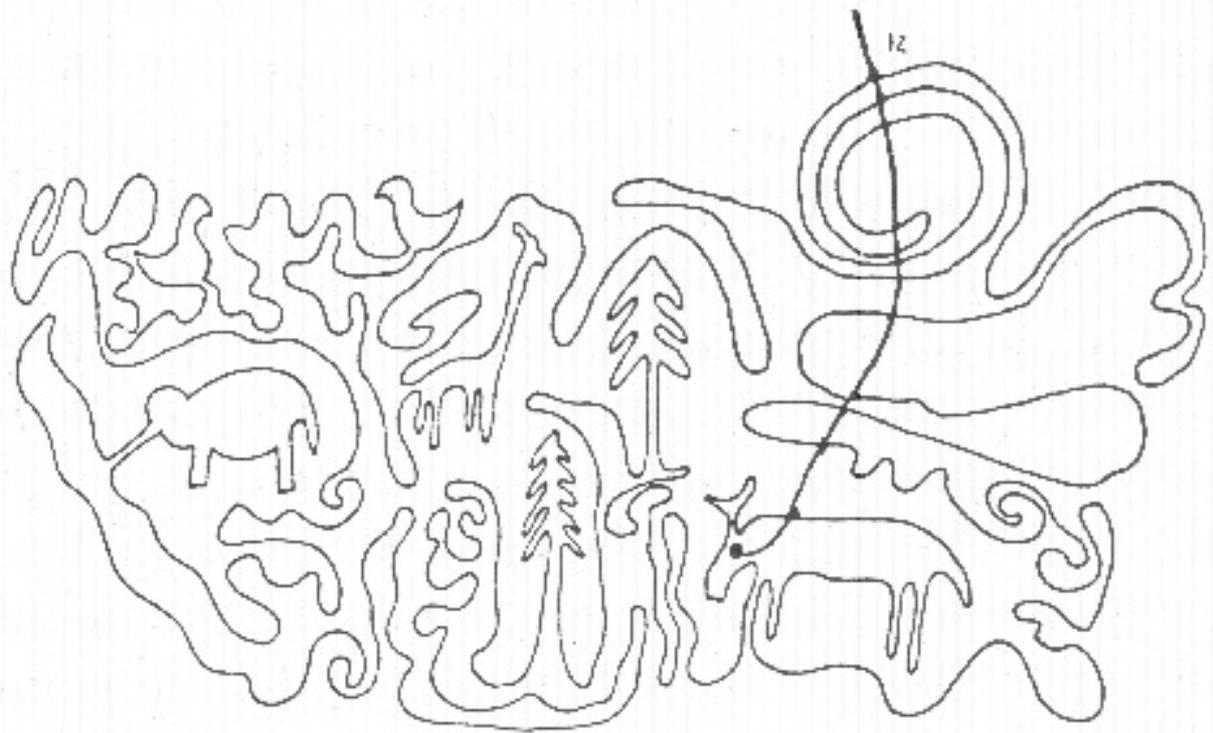
questo melodo funzionava «quasi sempre» - e si mise un po' a ridere - e servì più tardi per fare una vera 'dimostrazione del Teorema di Jordan.

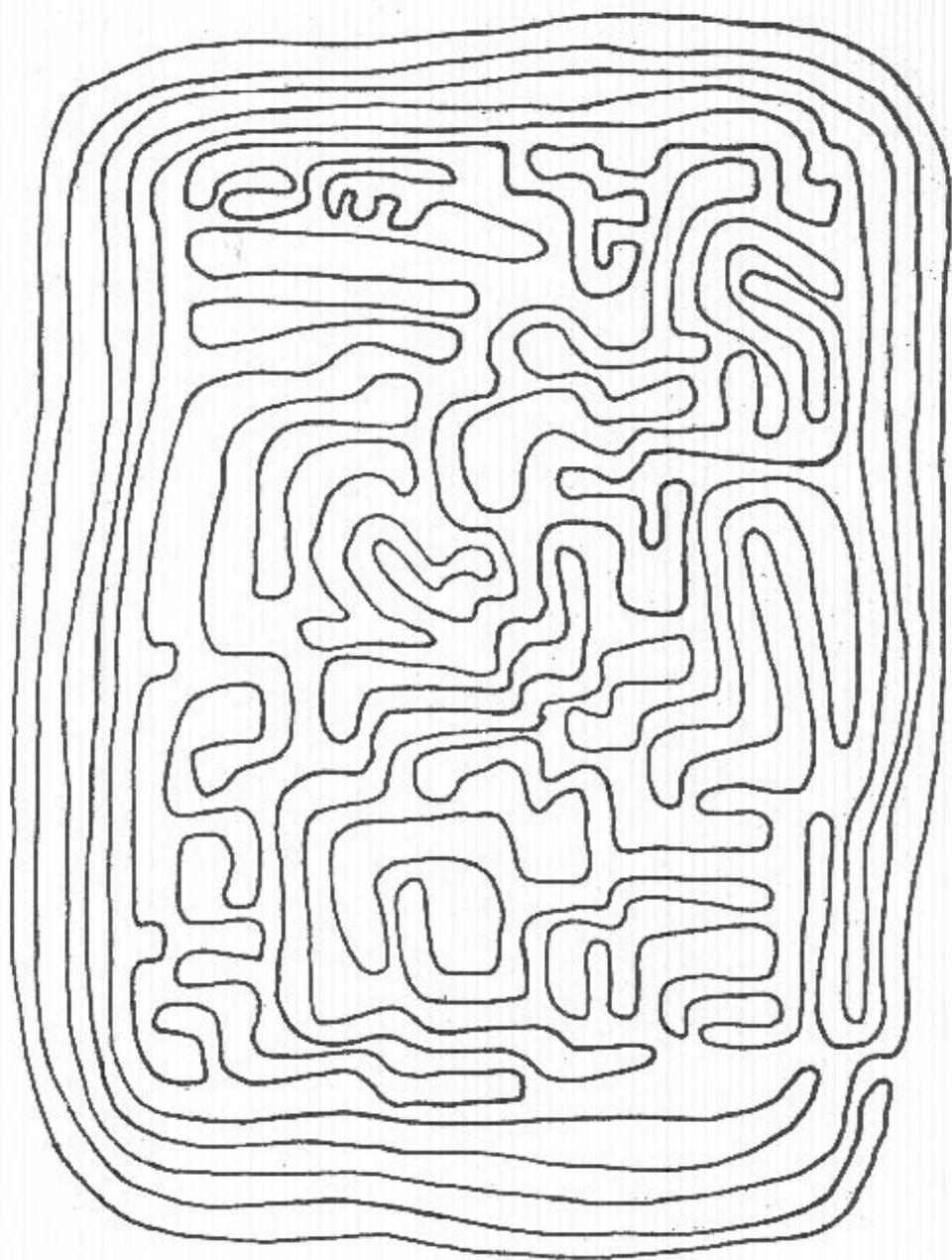
Il metodo è questo: si disegna una linea che parta dal punto preso in considerazione e che vada decisamente fuori dalla curva. Si conta poi quante volte la linea incontra la curva: se la incontra in un numero pari di volte allora il punto è esterno. Se invece la incontra un numero dispari di volte il punto è interno.

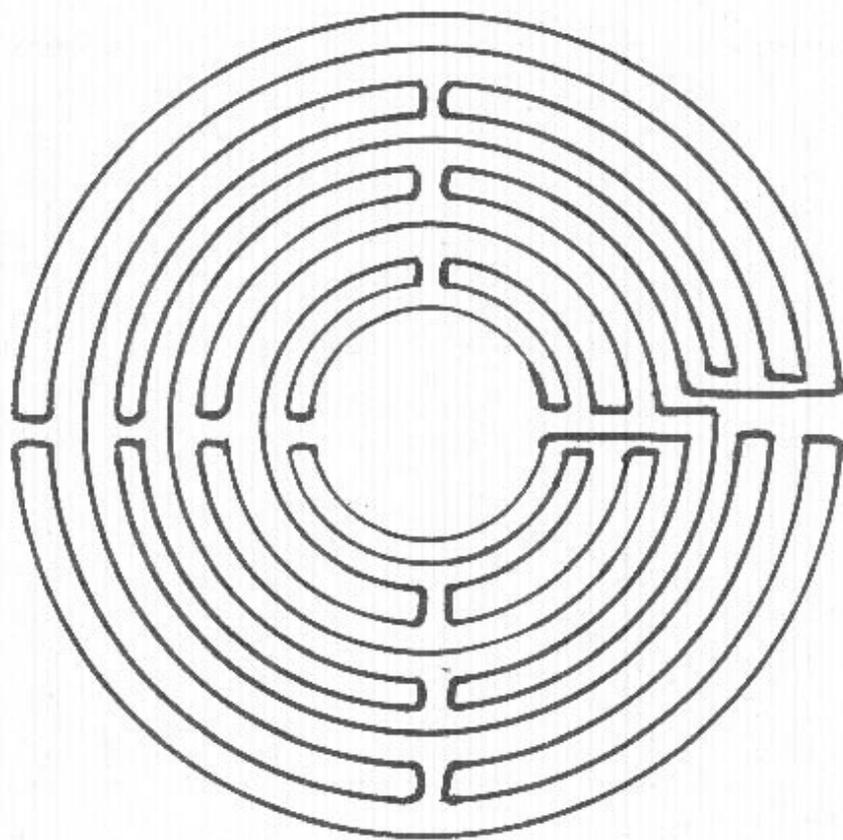
Si riprese di nuovo in considerazione la curva figurata di prima e si stabilì immediatamente, utilizzando il metodo di Tau, che l'occhio dell'elefante era interno mentre l'occhio dell'alce era esterno.

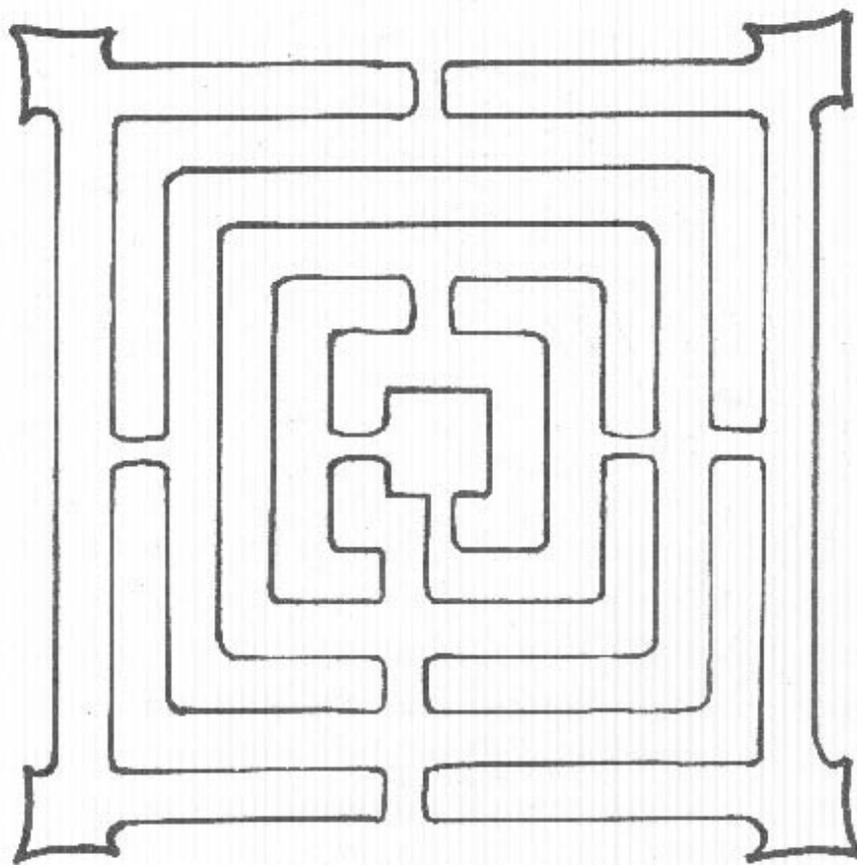
I bambini cominciarono anche loro ad applicare il metodo di Tau su nuovi disegni divertendosi molto per la rapidità con la quale si poteva riconoscere, anche per i punti più difficili, la loro posizione.





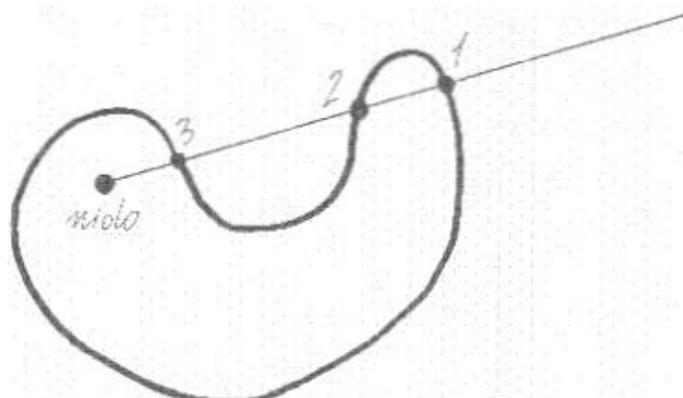






Tau continuava a spiegare anche se per alcuni bambini ogni spiegazione era ormai inutile.

-Immaginate una rondine che parte dal mare e che ha il suo nido in questo punto dell'isola.

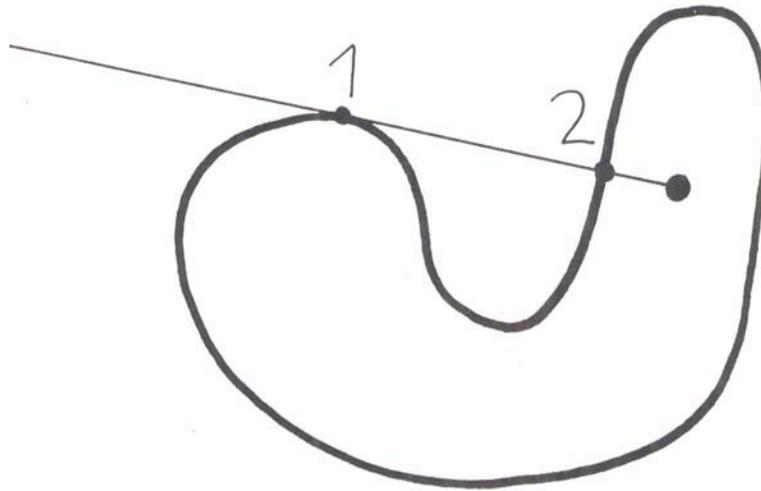


Ogni volta che la rondine attraversa la curva che abbiamo disegnato cambia la sua posizione: se prima era fuori dopo entra dentro, se prima era dentro dopo esce. Così Quando arriva al punto 1 entra nell'isola, nel punto 2 esce, nel punto 3 entra di nuovo. Vedete che, se, durante il suo volo, la rondine incontra in un numero pari di volte la curva, si troverà in mare perché è entrata tante volte quante è uscita, mentre se incontra la curva in un numero dispari di volte si troverà all' interno dell'isola.

La spiegazione sembrò così convincente che quasi non era più divertente come prima continuare a verificare il metodo di Tau su altri esempi. Quando una cosa viene capita a fondo, perde molto del suo interesse e del suo alone di mistero: viene subito voglia di passare ad un altro argomento. E questo era lo stato d'animo di tutti i bambini tranne della piccola Roberta che, a un certo punto, cominciò a gridare, molto eccitata:

- Non è vero! Non è vero!

Roberta aveva fatto un disegno che rimetteva completamente in discussione il metodo di Tau. Il disegno era così semplice che fu molto facile a Roberta far serpeggiare il dubbio nei bambini che le stavano vicino

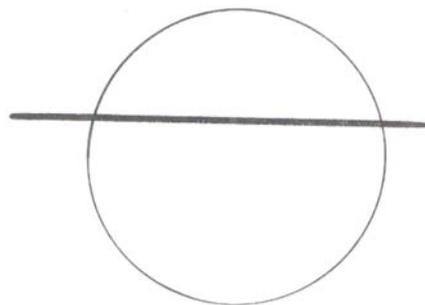


La linea incontrava la curva in due punti, ma il punto di arrivo era chiaramente interno alla curva!

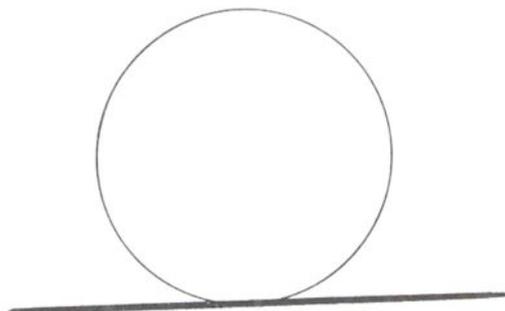
I bambini rimasero molto sorpresi sia dal disegno di Roberta che dall'atteggiamento di Tau.

- Brava, diceva. Bravissima, hai intuito l'idea di trasversalità: la linea che hai fatto non è trasversale!

Nessuno capì niente, neanche Roberta, ma almeno lei si sentì molto felice. Tau disegnò sulla lavagna una linea retta che incontrava il cerchio in due punti.



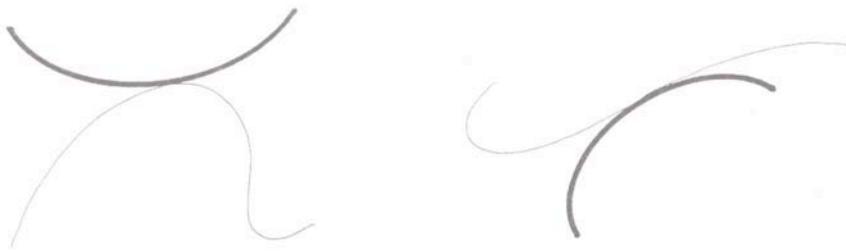
Questa linea è trasversale al cerchio, disse Tau, mentre quest'altra che è tangente al cerchio



non è trasversale: i due punti di intersezione della retta con il cerchio si sono riuniti in uno solo: la retta entra ed esce dal cerchio in un solo punto!
Nello stesso modo queste due linee



si intersecano in modo trasversale, mentre queste altre

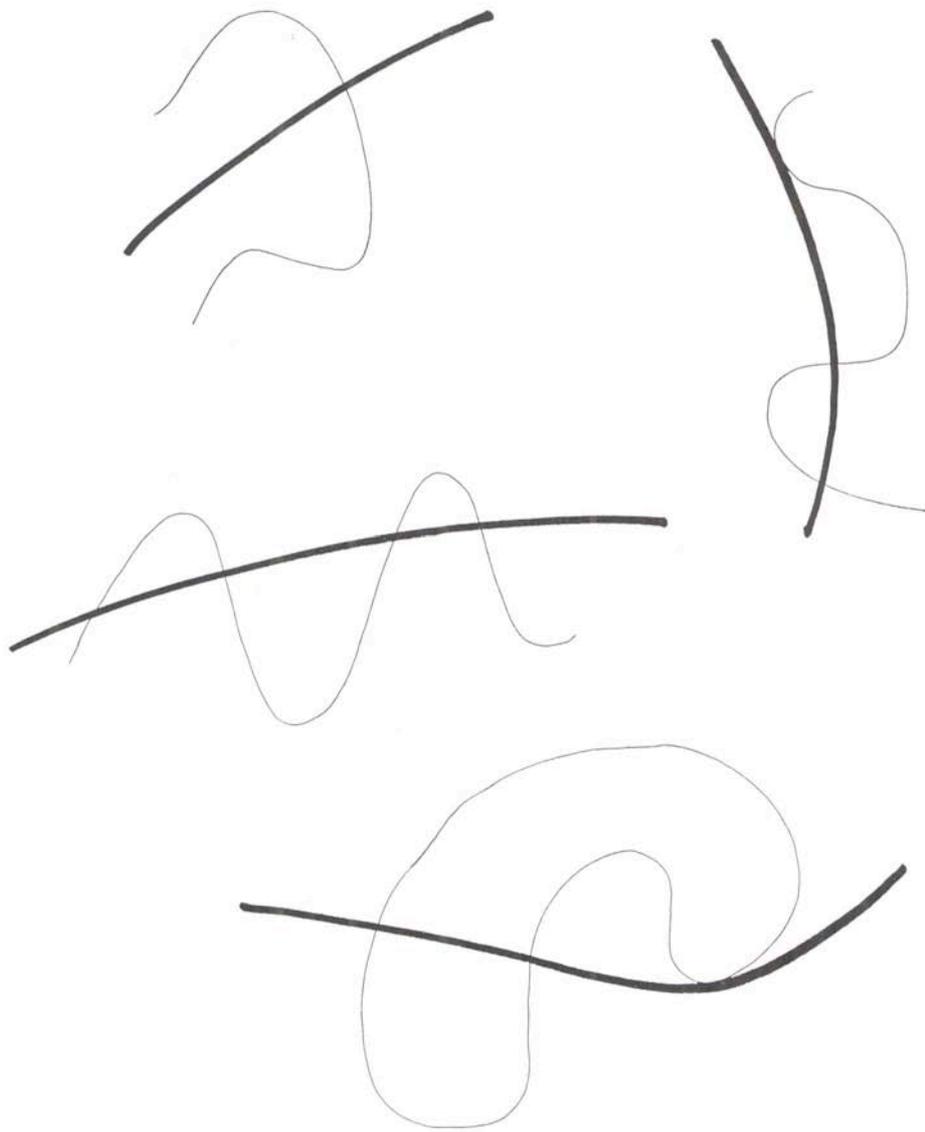


no, sono tangenti.

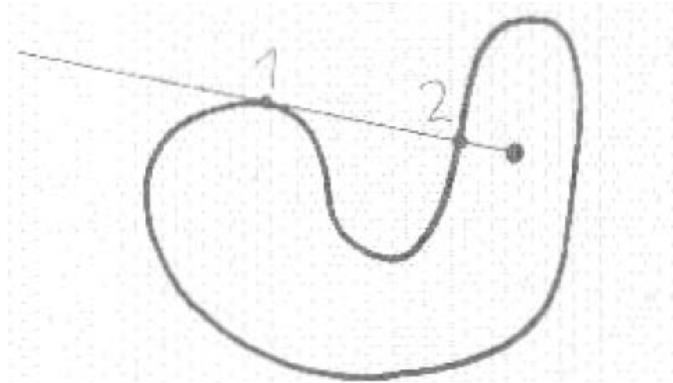
Tau disegnò sulla lavagna tante altre linee: alcune si incontravano trasversalmente ed altre no.

Chiese ai bambini quali fossero trasversali e si crearono i soli cori:

- Siii.
- Nooo.



- Ecco, conclude Tau, il metodo che vi ho spiegato prima per sapere se un punto è interno o esterno a una curva chiusa funziona solo se la linea che unisce il punto con l'esterno incontra la curva trasversalmente in ogni punto. Quando volete applicare questo metodo state molto attenti a disegnare delle linee trasversali alla curva, se no il metodo non va bene.



La linea che ha fatto Roberta non è trasversale, non è adatta per contare quante volte la rondine, volando, entra ed esce dall'isola.

Un bambino molto piccolo che non era per niente interessato alla trasversalità arrivò improvvisamente nella stanza della lavagna con in mano un grande ritratto. La fotografia, messa in una austera cornice, rappresentava un signore con una strana barba e uno sguardo molto affilato e pungente.

- Chi è questo tipo buffo? disse il bambino.

Tau prese il ritratto in mano, lo guardò con grande ammirazione ed incanto, ed in questo incanto il suo occhio più grande divenne ancora più grande.

- E' Peano, Giuseppe Peano.



Quando io cercavo di trovare delle curve sempre più complicate, continuò Tau, leggendo una rivista di matematica mi capitò di vedere la «curva di Peano». Questa «curva» era così complicata che riempiva tutto un quadrato. Era continua, ma non omeomorfa al cerchio. Tutti i punti del quadrato stavano su quella «curva»! I miei disegni, al confronto, anche i più complicati che ero riuscito a inventare, erano poca cosa rispetto alla «curva di Peano». Questa curva era così complicata che non si poteva neppure disegnare. Si poteva solo immaginarla; ci si poteva avvicinare a lei vedendola sempre meglio, approssimandola sempre di più, senza mai, però, poterla afferrare fino in fondo, vederla nella sua definitiva completezza. I nostri sensi non potevano rappresentarla compiutamente

con un disegno. Ogni disegno dava di lei solo una parte. Si capiva però, con la nostra intelligenza, come era fatta e per la prima volta fui veramente felice di accorgermi di avere, oltre alla vista e a tutti gli altri sensi, anche una intelligenza!

I bambini avrebbero voluto anche loro provare questa sensazione. E allora Tau con molto amore prese dalle sue vecchie carte i disegni, le approssimazioni della «curva di Peano» che lui aveva fatto. Mostrò i disegni ai bambini e disse:

- Guardate questa figura e cercate di capire come ogni figura è ottenuta quadruplicando la precedente. Ora immaginate di portare avanti questo processo più in là che potete, all'infinito, e avrete l'idea della «curva di Peano».

