VIII

IL LINGUAGGIO MATEMATICO: UNA LINGUA GIÀ TRADOTTA?

1. Una lingua straniera

Le parole di un testo matematico possono essere divise grosso modo in quattro grandi gruppi:

1) Parole che si trovano con lo stesso significato anche nel vocabolario della lingua naturale, e che sono usate comunemente. Sono, ad esempio, i connettivi logici, i verbi ausiliari, gli articoli, e determinati vocaboli come triangolo, divisione, e così via...

2) Parole che, pur trovandosi nel vocabolario, non sono usate correntemente nel linguaggio naturale, perché il loro significato non è abbastanza conosciuto: per esempio, «omeomorfo» o «asintoticamente».

3) Parole che si trovano nel vocabolario della lingua naturale, ma con significati diversi da quelli usati in matematica. Il significato matematico in questi casi non è riportato dal dizionario, come, ad esempio, per la parole «chiuso», «ideale», «derivata», e così via.

4) Parole che non si trovano nel vocabolario della lingua naturale, neanche con significati diversi, come «tetafuchsiane» o «hilbertiane».

Come si vede, il linguaggio matematico non è identificabile con il linguaggio naturale, anche se il suono e l'aspetto delle sue parole ci suggeriscono subdolamente il contrario.

Per quella sua voce familiare, non siamo portati a vedere in esso una lingua straniera, (neanche quando sentiamo i nostri alunni usare in modo assolutamente equivalente le espressioni «Per me è arabo!» o «Per me è algebra!»), e possiamo tutt'al più arrivare a pensare alla matematica come a un momento in cui la nostra lingua perde alcune caratteristiche ingombranti quali la ridondanza e l'ambiguità, per acquistare lo splendore della chiarezza e del rigore.

Per queste sue proprietà il linguaggio matematico dovrebbe allora facilitare la comprensione di quanto viene detto. La sua essenzialità e la forza dei connettivi logici dovrebbero vincere anche la mente più restia al ragionamento, eppure sappiamo bene che le cose non stanno proprio così. Poincaré ha affrontato tali questioni in termini di ragionamento, di razionalità (ne abbiamo visto gli sviluppi in un capitolo precedente), oppure di «speciale intuizione», ma impostando il problema dal nostro punto di vista, bisognerebbe distinguere il momento della razionalità, che è un passo molto «avanti» del processo, da quello iniziale della rappresentazione del linguaggio matematico nei due linguaggi cerebrali, quello verbale e quello per immagini.

Questa distinzione è doverosa perché non è possibile affrontare o cercare di capire quali problemi ci sono nella comprensione corretta di un ragionamento matematico, se prima non si è fatta chiarezza sul modo in cui si sono tradotte le varie componenti di esso, così come non possiamo intervenire a correggere una cattiva comprensione della logica complessiva di una frase in tedesco, ad esempio, se prima non ci siamo assicurati che ci sia stata una buona traduzione letterale nella lingua madre di chi la sta affrontando.

2. Il linguaggio matematico: una lingua già tradotta?

Chi si avvicina a un testo scientifico si trova innanzi tutto davanti alla difficoltà di avere il giusto atteggiamento mentale nei confronti delle parole che sta leggendo. Deve cioè verificare se i significati, e il rapporto tra di essi, che spontaneamente vengono evocati dalle parole per l'uso frequente che ne viene fatto nel linguaggio naturale, corrispondono effettivamente a quelli ammessi o definiti dal linguaggio scientifico.

Per fare una verifica del tipo a cui ho appena accennato, Lurija, lavorando con Seresevskij, gli sottopose la lettura di un brano molto semplice:

> Leggo a S. una di quelle regolette che qualunque scolaro è in grado di capire agevolmente: «Se sopra un recipiente poniamo dell'acido carbonico, quanto più alta sarà la pressione del gas, tanto più esso si discioglierà nell'acqua».

All'apparenza, questa frase, del resto né astratta né complicata, non dovrebbe presentare ostacoli.

«Quando mi diceste quella frase, io vidi immediatamente il recipiente: ecco, qui è collocato il "sopra" [...]. Vedo una linea (fig. 1a), sulla linea una nuvoletta che va verso l'alto: è il gas (fig. 1b). Leggo oltre: "quanto più alta sarà la pressione" e il gas si innalza, ma poi c'è qualcosa di denso... È la sua pressione (fig. 1c), appunto, ma è più alta [...], la pressione si solleva in alto... "tanto più si discioglierà nell'acqua"... l'acqua è diventata più pesante (fig. 1d) [...] e il gas? Ma la pressione è "più alta", è andata tutta in alto [...]. E allora come è possibile che, se la pressione è più alta, il gas si dissolva nell'acqua?»[1].

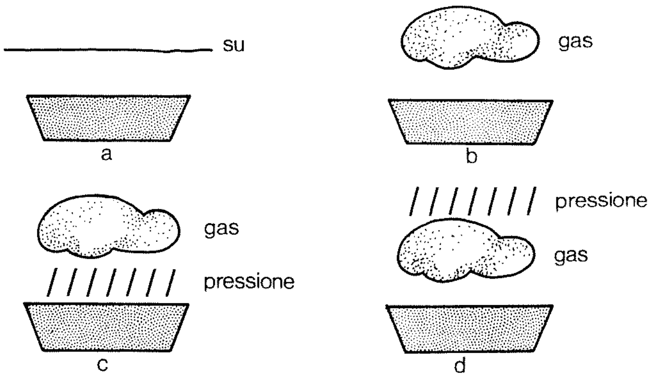

Figura 1.

Gas e pressione vengono confusi nel significato. Si confonde essere «più alto», nel senso di avere un valore più elevato, con il significato di «essere più in alto». La confusione inoltre aumenta considerando il fatto che, riferendoci alla pressione, essere più alta vuol dire in realtà, nell'effetto pratico che riguarda il gas, non elevarsi di più dall'acqua ma «premere di più» su di essa.

Questa confusione potrebbe essere fatta da un bambino delle classi elementari, nel quale, appunto, non si sono ben formate ancora le relazioni tra le singole parole e i significati che esse possono avere in contesti diversi. Soprattutto riguarda la sincronicità dell'apprendimento dei vari ambiti di pensiero, perché sicuramente può accadere – e a scuola accade di frequente

1. A.R. Lurija, *Viaggio nella mente di un uomo che non dimenticava nulla*, cit., p. 90.

ed è causa di molti fallimenti – che si corregga, con l'intervento magari dell'insegnante, il significato errato del termine nell'ambito verbale, ma che a questa correzione non segua quella corrispondente dell'immagine.

Riferendoci all'esempio appena esposto, accadrebbe che alla domanda: «Che significa più alto?» lo studente saprebbe rispondere meccanicamente, una volta corretto, che significa di valore più elevato, ma continuerebbe, nel modello per immagini, a rappresentarsi la situazione in cui il gas «si alza» effettivamente sull'acqua, e non riuscirebbe più, dopo appena pochi passi, a orientarsi tra le due versioni diverse che si trova davanti, quella verbale e il modello che se ne sta facendo. In questo caso facilmente finirebbe per decidere di abbandonarne una, quasi sempre quella per immagini, affidandosi così a una preparazione mnemonica. Quante volte all'insegnante capita di dire la frase: «Ma se l'hai appena detto bene, perché sbagli ancora?»!

Si ha appunto, in questo caso, un apprendimento puramente formale dei termini, e dietro la faccia sconcertata del ragazzino che ti guarda con la bocca semiaperta, che subisce domande sempre più incalzanti e sempre più inutili, c'è proprio questa difficoltà: quella di non riuscire a sincronizzare e ad accordare l'apprendimento sintetico con quello verbale. È utilissimo allora fermarsi e cercare insieme a lui l'incongruenza tra le due rappresentazioni, magari sollecitandolo a fare un commento della situazione del tipo di quello fatto da Seresevskij[2].

Dunque: «L'immagine [...] ci si impone»[3]. Abbiamo però visto che quello che intende Wittgenstein, quando dice che scegliamo delle immagini dal mucchio, a volte viene fatto in modo errato, non sono scelte «buone immagini». Nel senso che le

2. Ci vuole abilità per fare questo, da parte dell'insegnante, un'abilità che viene col tempo e con l'attenzione costante a queste tematiche. Ci vogliono inoltre passione e disponibilità, rigore e poca inclinazione al giudizio facile, tutte doti che possono piano piano nascere in chiunque, a patto che si affrontino molto presto, addirittura nel corso degli studi universitari, dibattiti e confronti su questi argomenti. Proprio per questo fatto non sono assolutamente d'accordo che si possa accedere all'insegnamento con una laurea che prepara genericamente solo nel contenuto delle materie da insegnare. Dovrebbe essere previsto all'interno di ogni università un indirizzo didattico, magari visto come corso di specializzazione, che rappresenterebbe tra l'altro, l'unica occasione per creare un corpo insegnante fornito di un linguaggio e di conoscenze didattiche comuni, al di là delle singole discipline.

3. «Che le immagini ci si impongano è certamente una cosa interessante. E se così non fosse come potrebbe dirci qualcosa una proposizione come *What's cannot be undone*? (Cosa fatta capo ha)»: L. Wittgenstein, *op. cit.*, p. I.12.

immagini scelte non rendono bene la serie di legami e di rapporti che esistono tra le varie parole.

Cadiamo così nel mondo delle contraddizioni che nascono dall'aver sviluppata naturalmente, attraverso l'uso della parola, una mentalità figurativa estremamente vivida, e con una cultura pari a quella della parte verbale, e di vederla impoverita e improvvisamente inadeguata culturalmente proprio nel momento in cui cerchiamo di usarla come supporto all'attività matematica.

Per precisare meglio quello che voglio dire quando parlo di «pari cultura» tra la parte verbale e quella figurativa, facciamo questo esempio: se leggo la frase: «I cosacchi frustavano furiosamente i cavalli fumanti nella steppa gelata» e se conosco il significato delle parole usate, non ho difficoltà a farne contemporaneamente un quadro vivace e completo, poiché la parte immaginativa del mio cervello conosce bene gli elementi da usare, e come usarli. Ad esempio, potrei «vedere» i cavalli sudati, dal momento che «fumano» nell'ambiente freddo, e certamente non penserei i cosacchi a piedi, anche se nella frase non è detto esplicitamente che stanno sul cavallo, ma viene semplicemente affermato che li frustano.

Se invece si legge: «Il triangolo ABC ha i lati che misurano rispettivamente 3, 4, 5», pur sapendo, in via analitica, che il quadrato di tre più il quadrato di quattro è uguale al quadrato di cinque, difficilmente ABC sarà «visto» come un triangolo rettangolo.

Analogamente, nella proposizione: «Si dice che una funzione $y = f(x)$ è continua in un punto c del suo dominio se per ogni $e > 0$ esiste un $d > 0$ tale che, determinato l'intorno completo di c di estremi $c + d$, $c - d$, accade che l'immagine di ogni x appartenente a tale intorno cade nell'intorno di $f(c)$ di estremi $f(c) + e$, $f(c) - e$», posso assicurare per esperienza che i diciottenni che in quinta liceo affrontano questa definizione, pur conoscendo esattamente il significato di ogni termine contenuto in essa, e pur lavorando già da due anni sul piano cartesiano, trovano notevoli difficoltà a rappresentarsi con un'immagine adeguata le condizioni appena descritte.

C'è in questa situazione la stessa difficoltà a ritrovare forme consuete che si incontra a riconoscere una rosa nella descrizione del dottor P.: «Quindici centimetri circa di lunghezza... una forma rossa convoluta con un'appendice lineare verde».

«Poter parlare delle cose ma non vederle direttamente...».

Davanti alla matematica ci comportiamo come persone affette da questa patologia specifica, disperatamente attaccati a tutto quello che ci possa aiutare a ritrovare il mondo delle immagini, e con esso il senso di una continuità o di una familiarità di pensiero, senza però riuscire a trovare l'espediente giusto.

Ci sembra allora che nel linguaggio matematico possano esistere solo denotazioni, e che tutto si debba esprimere esclusivamente con la stretta applicazione del termine corretto. In altre parole la matematica si avvicinerebbe a quella lingua metaforicamente morta di cui parlavamo alcuni paragrafi fa, nella quale svaniscono gli echi e i significati più ampi creati dal «come se». E la nostra mente, privata di questa preziosa stampella, si mette a zoppicare penosamente.

Nel caso del dottor P., lo strumento che lo teneva legato alla realtà, che gli permetteva di non smarrirsi in un mondo di astrazioni inanimate, era la musica, o forti sensazioni che gli stimolassero i sensi. Ci racconta Sachs:

> Di buon appetito e canticchiando sottovoce, il dottor P. attaccò i dolci con decisione. Con movimenti veloci e sciolti, senza esitare, canterellando, tirava i piatti verso di sé, prendeva questo o quel dolce, in un gran fluire di gorgoglii, in una celebrazione canora del cibo. Ad un tratto ci fu un'improvvisa interruzione: una serie di veloci e perentori colpi bussati alla porta. Colto alla sprovvista, il dottor P. trasalì, si bloccò, smise di mangiare e si irrigidì sulla sedia, con un'espressione di cieca e smarrita indifferenza. Vedeva la tavola ma non la vedeva più; non la percepiva più come una tavola carica di dolci. Sua moglie gli versò il caffè: l'aroma gli stuzzicò il naso e lo riportò alla realtà. La melodia del mangiare riprese[4].

Anche noi, come lui, abbiamo bisogno del concreto, del reale, e come lui non ci rendiamo conto di esserne privi, se non quando per caso capita qualcosa che ci aiuti a entrarci. Per esempio, succede a volte che il ruolo che la musica aveva per il dottor P. sia sostenuto, in una conversazione matematica, dal tono e dal tipo di parole usate: parole del linguaggio comune, usate con le intonazioni e la vivacità della lingua parlata, a volte aiutano chi ha smarrito il proprio pensiero sintetico nella asetticità di una definizione del tipo di quella citata prima, a ritrovare uno strumento di lavoro che si era autoescluso per l'incapacità di cominciare a capire.

In tutti questi esempi abbiamo avuto a che fare con un linguaggio riferito a fatti e a cose, in misura maggiore o minore

4. O. Sacks, *op. cit.*, p. 35.

concreto, e quindi possibile oggetto di rappresentazioni. Cosa avviene invece quando l'informazione non può essere trasformata in immagini? Ci dice Lurija: «...i concetti astratti, per esempio, elaborati dall'umanità nel corso di millenni per designare relazioni complesse [...] esistono, noi siamo in grado di assimilarli, ma non certo di vederli...»[5].

Come se la cava S., in situazioni del genere?

> Mi rivolgo a mia moglie e le chiedo: «che cos'è niente?» «È niente di niente» mi risponde. Ma per me è diverso: io il niente lo vedo, e lo sento che non è così anche per lei. Se appare il niente vuol dire che è qualche cosa [...]. È qualcosa: per me è una nubecola di vapore densa, con un colore preciso, simile a quello del fumo. Niente è una nubecola più rarefatta, perfettamente trasparente, e quando provo ad afferrare le particelle di questo «niente» mi restano in mano minutissime particelle di... «niente»[6].

Strane impressioni queste, e tuttavia così familiari. Immancabili negli adolescenti quando, abituati a pensare per immagini concrete, affrontano il mondo dei concetti astratti e devono farlo proprio. Cos'è il niente quando sempre qualcosa esiste? o l'eternità? cosa c'era prima e cosa vi sarà dopo? o l'infinito? Cosa c'è dopo l'infinito? Questi concetti li insegnano a scuola, ma come raffigurarseli? e se ciò è impossibile, cosa sono in realtà?

Il tempo ce lo rappresentiamo «spazialmente», ci appare come un continuo fluire, scorre davanti a noi, proviene da lontano, non torna mai indietro e sparisce nessuno sa dove. Si manifesta in una sola dimensione, simile al cammino dell'acqua, con un movimento unidirezionale e non reversibile, e del quale non sapremmo indicare né l'origine né la fine.

Lo spazio, invece, lo sperimentiamo come tridimensionale, simile ai tre lati di una scatola o alle pareti di una stanza. Ma non appena tentiamo di figurarci i confini dello spazio, i limiti del nostro universo, subito ci troviamo a corto d'immaginazione. Possiamo immaginare un tale spazio solo all'interno di un altro spazio, senza essere in grado di immaginarne la fine. Eppure queste prime rappresentazioni del tempo e dello spazio, «prescientifiche», cambiano e si trasformano sotto l'influenza di elementi logici e analitici forniti da proposizioni matematiche,

5. A. Lurija, *Viaggio nella mente di un uomo che non dimenticava nulla*, cit., p. 88.

6. Ivi, p. 90.

pur mantenendo nella mente di chi le pensa caratteristiche fortemente non-verbali, avvicinandosi in questo modo ai modelli scientifici. Chiare e precise sono a questo proposito la parole di Einstein, quando parla delle modificazioni che ha avuto il concetto di spazio nel corso dei secoli.

Il brano in questione è troppo lungo e troppo tecnico per essere riportato tutto, ma credo che valga la pena di leggerne almeno le prime pagine.

Il ragionamento scientifico è il perfezionamento del ragionamento prescientifico. Siccome, in quest'ultimo, l'idea dello spazio ha già una funzione fondamentale, dobbiamo incominciare con lo studiare quest'idea com'era alle sue origini prima della scienza. Vi sono due modi di considerare le idee; l'uno e l'altro sono indispensabili per capire. Il primo è il metodo analitico logico; esso risponde alla domanda: in che modo le idee e i giudizi dipendono gli uni dagli altri? Rispondendo a questa domanda ci troviamo su un terreno relativamente sicuro; è la sicurezza che ci ispira tanto rispetto per la matematica. Ma questa sicurezza non si acquista che a prezzo di un contenuto profondo. I concetti non acquistano un fondo interiore se non sono legati, sia pure indirettamente, con le esperienze dei sensi. Ma questo vincolo non si può scoprire attraverso la ricerca logica, esso può soltanto essere lo scopo di un'azione vitale; e tuttavia è questa unione che determina il valore della conoscenza dei sistemi concettuali.

Esempio: un archeologo di una civiltà futura trova un manuale della geometria euclidea senza figure. Egli comprenderà bene in che modo, nei teoremi, sono usate le parole *punto, retta, piano*; si renderà anche conto del processo di deduzione di questi teoremi gli uni dagli altri e potrà anche stabilire nuovi teoremi secondo le regole conosciute. Ma la formazione dei teoremi resterà per lui un vano gioco di parole fin tanto che *non potrà figurarsi qualche cosa* corrispondente alle parole punto, retta, piano, ecc. Soltanto allora la geometria avrà per lui un fondo reale. La stessa cosa avverrà con la meccanica analitica e in generale con le scienze logico-deduttive.

Cosa intendiamo con l'espressione «*potersi figurare qualcosa*»? riguardo alle parole «punto», «retta», «intersecazione», ecc.? Significa rappresentare il contenuto dell'esperienza al quale corrispondono queste parole. Questo problema al di fuori della logica costituisce il problema dell'esistenza reale, che l'archeologo potrà risolvere attraverso l'intuizione, classificando ed esaminando le proprie esperienze per vedere se può scoprirvi qualche cosa che corrisponda a quelle parole primitive della teoria e agli assiomi per i quali sono state stabilite. Soltanto in questo caso si può porre razionalmente il quesito dell'esistenza di una cosa rappresentata in astratto.

Con i concetti prescientifici del nostro pensiero ci troviamo, per quanto riguarda la realtà, più o meno nella stessa situazione dell'archeologo. Abbiamo per così dire dimenticato quali sono le fattezze del mondo dell'esperienza che ci hanno condotto alla formazione di queste idee ed abbiamo notevoli difficoltà a raffigurare il mondo delle percezioni vitali senza gli occhiali dell'interpretazione astratta alla quale siamo avvezzi da lungo tempo. Vi è inoltre la difficoltà che la nostra lingua deve servirsi di parole indissolubilmente legate a queste idee primitive. Tali sono gli ostacoli che ci sbarrano la strada quando vogliamo esporre la realtà dell'idea prescientifica di spazio.

Prima di affrontare il problema dello spazio, facciamo una dichiarazione preliminare sulle idee in generale: le idee si riferiscono alle esperienze dei sensi, ma non possono mai derivarne logicamente. Per questa ragione non ho mai potuto comprendere la questione dell'*a priori* di Kant. Nelle questioni di realtà, non può mai trattarsi che di una cosa, cioè di ricercare i caratteri del complesso di esperienze dei sensi ai quali si riferiscono le idee.

Per quanto concerne l'idea di spazio, quella dell'oggetto corporeo sembrerebbe doverla precedere. Si è spesso esposto la formazione dei complessi e delle impressioni dei sensi che possono aver dato origine a questa idea. La corrispondenza di certe impressioni del tatto e della vista. La possibilità di successione continua nel tempo e di ripetizione delle sensazioni (tatto, vista) quando si voglia, costituiscono alcune di queste caratteristiche. Si è giunti, con l'aiuto di esperienze così precise, all'idea di oggetto corporeo (la quale idea non suppone affatto la relazione di spazio e di tempo); la necessità di creare col pensiero le relazioni reciproche fra oggetti corporei di questa natura deve inevitabilmente dare origine alle idee corrispondenti alle loro relazioni di spazio. Due corpi possono toccarsi o essere separati: in quest'ultimo caso si può, senza modificarli per nulla, collocare tra essi un terzo corpo; nel primo è impossibile. Queste relazioni di spazio sono manifestamente reali, come i corpi medesimi. Se due corpi sono equivalenti per colmare un intervallo di questo genere, sono egualmente equivalenti per riempire un altro intervallo. L'intervallo è dunque indipendente dalla scelta specifica del corpo destinato a riempirlo; e ciò si applica in generale alle relazioni di spazio. È evidente che questa indipendenza, che è una condizione pregiudiziale dell'utilità della formazione di idee puramente geometriche, non è una necessità a priori. Mi pare che soprattutto questa idea dell'intervallo, desunta dalla scelta spaziale del corpo destinato a riempirlo, costituisca il punto di partenza dell'idea di spazio.

Secondo queste brevi riflessioni, lo sviluppo dell'idea di spazio, considerato dal punto di vista dell'esperienza dei sensi, sembra che si possa rappresentare con lo schema seguente: oggetto corporeo – relazione di posizione degli oggetti corporei – intervalli – spazio. Da questo punto di vista appare qualche cosa di reale come gli oggetti corporei.

È chiaro che nel mondo delle idee, al di fuori della scienza, l'idea di spazio è esistita come concetto di una cosa reale, ma la matematica di Euclide non conosceva questa idea come tale e vi sopperiva servendosi esclusivamente delle idee di cosa, di relazione fra le cose, solo come idee ausiliarie. Il punto, il piano, la retta, la distanza, sono oggetti corporei idealizzati. Tutte le relazioni di posizione sono riportate a posizione di contatto (intersezioni di rette, di piani, posizioni di punti su rette ecc.). In questo concetto, lo spazio come continuo non appare. È Descartes che ha introdotto per primo questo concetto descrivendo il punto-spazio per mezzo delle sue coordinate: solo allora vediamo apparire le forme geometriche come porzione di spazio infinito, concepito come continuo a tre dimensioni[7].

In S. i tormentosi tentativi di vedere il niente o di dare un'immagine all'infinito, e i conflitti intellettuali con le parole restano, impedendogli di oltrepassare «la soglia maledetta» e di conciliare concretezza ed astrazione. Non riesce cioè a modificare e a dare alle immagini strutture che non sono più conseguenti all'esperienza e al semplice linguaggio naturale, ma che vanno costruite pazientemente sulla base di indicazioni verbali complesse, di proprietà che seguono da definizioni, da tutto quello che è in ultima analisi «lo studio». Questa soglia è dura da oltrepassare anche per chi si trova in difficoltà con la matematica, in quanto non impara a costruirsi e a strutturare immagini rigorosamente rispondenti ai requisiti descritti dal verbale, arricchendo in tal modo il pensiero concreto di isomorfismi sempre più «astratti».

Nel pensiero matematico non si tratta quindi solo di saper fare un giusto uso di strumenti – l'alternare il pensiero sintetico a quello analitico – ma anche di conformare i contenuti del pensiero concreto al grado di cultura via via affrontato, e di costruire immagini corrette non solo sull'uso del linguaggio naturale, ma soprattutto sulle indicazioni del linguaggio tecnico che si sta usando.

3. La metafora nella matematica

All'inizio del primo paragrafo si trova una classificazione approssimativa dei vocaboli usati nel linguaggio matematico.

Se consideriamo le parole del terzo gruppo, cioè quelle che esistono anche nella lingua naturale, ma che vengono usate in matematica con un altro significato, vediamo che esse si lasciano ordinare nuovamente in una nuova gerarchia, mediante il grado di vicinanza che esiste tra i loro due significati: quello naturale e

7. A. Einstein, *Come io vedo il mondo – La teoria della relatività*, trad. it., Roma, Newton Compton, 1988, pp. 80-83.

quello matematico. Possiamo infatti costruire un gruppo contenente parole in cui esiste una qualche connessione tra la definizione «naturale» e quella matematica: è questo il caso, per esempio, di «frontiera» (chiusura di un insieme), limitato (insieme limitato), unione o intersezione (operazioni tra insiemi), crivello (il crivello di Eratostene).

Nel secondo gruppo restano invece i termini il cui significato matematico diverge completamente da quello naturale. È questo il caso di parole come «ideale», «perfetto», «integrale» ecc.

Anche il linguaggio verbale specifico della matematica possiede allora termini metaforici, là dove sussiste un'effettiva analogia tra il senso naturale e quello matematico delle parole, per quei termini cioè contenuti nel primo gruppo appena definito.

Ad esempio, tra il significato di crivello nella lingua naturale e quello che la parola assume nel linguaggio matematico, esiste una qualche rassomiglianza, nel senso che in entrambi i casi si tratta di un qualcosa che determina l'uscita di determinati oggetti da un insieme. In questo caso allora il crivello, già conosciuto dal pensiero nel suo significato legato alla vita pratica, diventa un veicolo metaforico con cui dare un corpo a una procedura astratta che individua i numeri primi tra i numeri naturali.

Ma quale funzione deve assolvere veramente una metafora, nell'ambito della matematica?

Questa domanda richiede una risposta che sia in grado di spiegare se esistono particolarità della metafora matematica che la distingua da quella linguistica (cioè quella che appare sul piano della lingua naturale), e che magari tenti di mostrare in che modo la funzione metaforica del linguaggio matematico si accorda interamente col suo carattere denotativo.

Nelle metafore linguistiche le valenze connotative delle parole sono a volte determinanti per creare, in mano ad autori diversi, quadri estremamente vari per forma e significati, per forza espressiva e per ambiguità di contenuti.

Per dire che in cielo le Pleiadi si muovono col loro tremolio luminoso, il poeta scrive:

La chioccetta per l'aia azzurra
va col suo pigolio di stelle.

Le Pleiadi sono la chioccia, l'aia è il cielo, le stelle tutte il pigolio dei pulcini, ed insieme all'ultima immagine, l'associazione tra un riferimento visivo (il tremolio di stelle) e uno uditivo (il pigolio) che crea una sinestesia, entrano di prepotenza nel nostro sistema nervoso con un effetto di sicura efficacia, superando qualunque barriera critica e razionale.

È ovvio che questo modo di esprimersi è giustificato nell'autore dall'intenzione di comunicare soprattutto sensazioni soggettive legate all'osservazione della costellazione. La potenza della metafora linguistica risiede allora anche nella capacità di svegliare attraverso le parole centri direttamente legati alle emozioni.

La creazione matematica non si può affidare a tutto ciò, e si lega come sensazione emotiva, di piacere, unicamente a quel leggero shock che si prova nella «risoluzione», nell'«Eureka», un piacere che in chi per un motivo o per l'altro è invogliato allo studio, finisce per ingigantirsi e diventare una leggera droga, uno stato di ebbrezza in cui la mente gioca svincolata dalla dimensione verbale[8].

La metafora matematica dunque deve assolvere solo alla funzione di comunicarci proprietà oggettive. Come per certe metafore linguistiche (tipo «le gambe del tavolo») le parole di una metafora matematica hanno perciò la caratteristica di appartenere al linguaggio matematico in generale, e non a un autore singolo. Esse cioè non appartengono a uno stile particolare, ma alla lingua matematica tutta.

Per essere più chiari, un'espressione come «l'intorno di un punto» non esprime lo stile individuale di questo o di quel matematico, ma della lingua matematica come tale. Questa espressione diventa così obbligatoria, inevitabile per ogni autore, che mira attraverso essa alle denotazioni del concetto.

In tal modo la metafora verbale in matematica, pur esistendo, è assai rigida e non contribuisce che in minima parte alla comunicazione e alla costruzione di concetti concreti, globali, patrimonio prezioso del pensiero sintetico.

Succede però una cosa singolare ed estremamente fertile nelle sue conseguenze: nella produzione scritta della matematica, accanto alla metafora verbale strettamente intesa, possiamo trovare un altro tipo di metafora, prezioso indizio rivelatore della presenza operante della parte «concreta» dei processi mentali, che esprime il modo sintetico in cui essa organizza dati e

8. Ci vuole una buona dose di autocontrollo per lavorare con il pensiero sintetico sganciandosi dalle emozioni. Tutta la tecnica di meditazione orientale è volta a raggiungere proprio questo obiettivo: liberarsi dalle emozioni rimanendo in un ambito cerebrale non verbale.

suggerisce procedure analitiche. Queste metafore, pur restando in un ambito strettamente simbolico, hanno il grande merito di far uscire il pensiero concreto allo scoperto, di renderlo «comunicabile» e, di conseguenza, patrimonio culturale comune. È anche attraverso tali metafore non verbali che si forma una mente, avviandola verso l'acquisizione e l'uso di concetti e strumenti globali specifici di una determinata disciplina.

Il pensiero per immagini, che nel campo «naturale» trova nelle arti figurative, nella musica, nella pragmatica del linguaggio, espressioni che sono molto vicine, per struttura, alle proprie modalità conoscitive, ha imparato dunque ad esprimersi anche in campo scientifico e si è di fatto costruito un proprio linguaggio «denotativo», parallelo a quello verbale e interagente con esso, mettendo insieme un gruppo di simboli mediante i quali significare con rigore i propri elaborati.

Questi tipi di denotazioni hanno la particolarità di essere strutturate in modo tale da rendere agevoli le operazioni proprie del pensiero concreto: l'elaborazione spaziale delle componenti il problema, la loro strutturazione in blocchi unitari di informazione, la possibilità di rappresentarne in un quadro unico le reciproche relazioni e di compiere, conseguentemente, un eventuale ricentramento cognitivo.

Eccone un esempio semplice, scelto nella sua banalità proprio per sottolineare la presenza contemporanea di entrambe la procedure, la sintetica e l'analitica, nelle situazioni che si incontrano normalmente anche in classe. Si debba risolvere la disequazione:

$$\frac{(x - 3)}{(x + 2)} < 0$$

Viene chiesto dal problema di indicare quali sono i valori di x che rendono negativo il rapporto scritto sopra. Questa domanda può avere risposta svolgendo tutto il processo in via analitica. Il procedimento è questo:

1) numeratore > 0: $x - 3 > 0$ quando $x > 3$
2) denominatore > 0: $x + 2 > 0$ quando $x > -2$

Dallo studio appena effettuato si ricava quanto segue:

se $x < -2$, il numeratore e il denominatore sono entrambi negativi e quindi sono concordi;

se $-2 < x < 3$ il numeratore e il denominatore sono uno positivo e uno negativo e quindi sono discordi;

se $x > 3$ il numeratore e il denominatore sono entrambi positivi e quindi di nuovo concordi.

Poiché un rapporto è negativo quando numeratore e denominatore sono discordi, si può concludere che nel caso particolare il rapporto è negativo se x assume valori compresi tra -2 e 3.

Benché, come si è appena visto, questo metodo di risoluzione della disequazione sia completo ed efficace, ad esso si affianca (la si insegna in classe) la seguente immagine, costruita usando i risultati di 1) e 2).

Num	− − − − −		− − − − − −	0	+ + + + + + + + + +
Den	− − − − −	0	+ + + + + +		+ + + + + + + + + +
Rapporto	+		−		+
		−2		3	x

Grafico 1

Certo non è facile vedere in questo schema la traduzione di una immagine, perché la tendenza prevalente immediata è quella di una lettura «analitica» di esso, fatta come se fosse un insieme di parole, e solo chi ha dimestichezza con la matematica vi scorge immediatamente l'aspetto sintetico di «blocco».

Questa immagine presenta due vantaggi: uno è quello di essere «compresa» – nel senso di «essere capita» ma anche e soprattutto nel suo senso primo di «essere presa nel suo insieme» – meglio di quanto si faccia con la procedura analitica, e l'altro è quello di portare più velocemente alla risposta finale.

Una sua caratteristica importante è che può essere riprodotta e manipolata «a mente», come si fa con le figure geometriche. Impariamo cioè in situazioni semplici come quella esemplificata, a passare da uno schema grafico del tipo di quello appena descritto, alla costruzione di uno schema mentale simile che possiamo usare parallelamente alle considerazioni analitiche.

Un altro esempio che sarà molto familiare per i colleghi di matematica è quello in cui si debba studiare il segno di un trinomio di secondo grado. Esiste una procedura analitica che permette di eseguire tale studio, ma tutti noi – e anche i nostri alunni, quando sono diventati abbastanza bravi – ci raffiguriamo mentalmente la parabola associata al trinomio selezionando nello schema mentale gli intervalli interni ed esterni alle intersezioni della parabola con gli assi, visualizzando immediatamente la risposta[9].

Ritornando alla disequazione proposta prima, il nome dato più comunemente all'immagine che la rappresenta è quello di «grafico». I grafici non esauriscono le metafore non verbali della matematica, ma certamente ne costituiscono un momento importante.

Per definirli completamente dovremmo forse chiamarli «metafore grafiche», o ancora meglio, poiché nelle metafore grafiche dovrebbero entrare a pieno diritto tutte le produzioni artistiche che fanno uso di carta e matita (o tela e colore, ecc..) potremmo tra esse distinguere quelle scientifiche chiamandole «modelli grafici», dando alla parola modello un significato più restrittivo di quello della metafora (nel senso che tutti i modelli sarebbero metafore, mentre non tutte le metafore sono modelli).

Il modello sarebbe allora una metafora in cui compaiono solo valori denotativi. Non potremmo accettare che la «chioccetta per l'aia azzurra» formi un modello delle Pleiadi, mentre usiamo tranquillamente il grafico 1 al posto delle considerazioni analitiche, sicuri di ottenere risultati altrettanto rigorosi.

Il fatto notevole in tutto questo, che costituisce poi il motivo che dovrebbe giustificare nello studente tutta la fatica e l'angoscia spesi nello studio della matematica, è che il pensiero concreto, una volta che si è impadronito in modo stabile di modelli, tende ad usarli anche in situazioni estranee al pensiero matematico strettamente inteso.

Teniamo presente alla mente il grafico illustrato nel caso della disequazione, ed esaminiamo come esempio il problema esposto nel paragrafo che segue.

4. Tweedledum e Tweedledee

Quando Alice entrava nella foresta dell'Oblio non dimenticava tutto, ma solamente certe cose. Spesso dimenticava il proprio nome, ma una delle cose che dimenticava più facilmente era il giorno della settimana.

Anche Tweedledum e Tweedledee frequentavano spesso la foresta. Questi due erano strane creature: uno mentiva il lunedì, il martedì e

9. In classe bisogna tendere proprio a questo, a fare in modo cioè che l'alunno abbandoni gradualmente la lettura analitica dello schema e lo faccia invece diventare un riferimento sintetico.

il mercoledì, e diceva la verità gli altri giorni della settimana. L'altro mentiva il giovedì, venerdì e sabato, ma diceva la verità gli altri giorni della settimana. A peggiorare le cose, i due fratelli si assomigliavano tanto che Alice non era in grado di distinguerli l'uno dall'altro (eccetto quando portavano i loro colletti ricamati, il che accadeva raramente).

Un giorno Alice incontrò i due fratelli. Essi fecero le seguenti affermazioni:

primo fratello: io sono Tweedledum;

secondo fratello: io sono Tweedledee.

Quale dei due era realmente T.dum e quale T.dee, e in che giorno è avvenuto l'incontro[10]?

Vediamo di analizzare un possibile modo di arrivare alla soluzione di questo problemino. È chiaro che si può imboccare una strada esclusivamente analitica (tavole logiche), quasi sicuri che ci porti in fondo, ma chi ha una mente sintetica allenata all'uso di strumenti rigorosi, scarta la prima strada, lunga e noiosa, e tenta una rappresentazione sintetica dei dati. Tale rappresentazione non è altro che la trasposizione dei dati verbali iniziali del problema in una rappresentazione metaforica globale, in un isomorfismo mentale, o meglio, nella creazione di un modello mentale.

Un modello possibile (per lo meno quello che ho usato io nel risolvere il problema), può essere il seguente (tenendo conto che gli asterischi indicano i giorni della settimana in cui i fratelli mentono e le lineette quelli in cui dicono la verità):

Appoggiandoci a questo grafico e confrontandone i vari settori, si evidenziano momenti di «discordanza» (nei primi due gruppi di giorni) e momenti di «concordanza» (la domenica). In questo modo nel problema compare una struttura che stimola immediatamente una lettura di essa in chiave analitica.

T.dum:	*	*	*	–	–	–	–
T.dee:	–	–	–	*	*	*	–
	....	....	....	....	....	....	....
giorni:	l	m	m	g	v	s	d

Eseguendola, si arriva a realizzare che nelle prime due terne di giorni della settimana – dove c'è discordanza poiché uno dei due mente e l'altro no – entrambi i fratelli darebbero lo stesso

10. R. Smullyan, *op. cit.*, p. 36.

nome (o tutti e due T.dee, o tutti e due T.dum), mentre c'è un unico giorno in cui i nomi dati sono diversi perché ognuno denuncia correttamente il proprio, dato che c'è concordanza nella verità, ed è la domenica[11].

Questo problema, come la disequazione dell'esempio precedente, si può anche risolvere in modo esclusivamente logico, senza alcuna rappresentazione sintetica:

> Se la prima affermazione è vera, allora il primo è realmente T.dum, quindi il secondo è T.dee, e anche la seconda affermazione è vera. Se la prima affermazione è falsa, allora il primo è in effetti T.dee, e il secondo è T.dum, e quindi la seconda affermazione è pure falsa. Perciò le due affermazioni o sono entrambe vere o sono entrambe false. Non possono essere entrambe false perché i due fratelli non mentono mai nello stesso giorno. Quindi entrambe le affermazioni devono essere vere, così il primo fratello è T.dum, il secondo è T.dee e l'incontro avviene di domenica[12].

Quando siamo nella condizione di poter applicare ad una serie eterogenea di problemi uno stesso modello mentale, siamo allora nella fase più avanzata del processo di formazione scientifica della nostra mente.

Se questo avviene, esisterà dentro di noi la capacità di formare schemi complessivi, originali o isomorfici a modelli già conosciuti (come nell'esempio appena fatto in cui si usa un isomorfismo di un grafico noto) che riescano ad interagire in modo produttivo con le procedure analitiche conosciute.

5. Spazi gravitazionali, ciuffi di fiori e erbari a impressione

La geometria analitica tutta è un esempio di integrazione culturale dei nostri due ambienti mentali, in cui si fondono l'analiticità dell'algebra con gli aspetti sintetici della geometria[13]. Da questa fusione l'una e l'altra disciplina emergono profonda-

11. Spesso si riscontra negli studenti una tendenza naturale alla rappresentazione sintetica, che rimane però ai limiti della coscienza e a cui non segue altrettanto spontaneamente la lettura analitica della struttura proposta.

12. R. Smullyan, *op. cit.*, p. 44.

13. Oggi si comincia anche in classe a introdurre la geometria analitica ponendo l'accento proprio sulla questione del linguaggio mostrando come sia possibile operare una traduzione di concetti dal linguaggio algebrico a quello geometrico e viceversa.

mente cambiate, sia nella concezione, sia nella potenzialità (pensiamo ai successivi sviluppi nel calcolo infinitesimale e nell'analisi). Il piano cartesiano e il suo contenuto appaiono, come concetto e intuizione primaria, un enorme modello grafico, prodotto di una avvenuta crescita culturale dei processi sintetici, visti come patrimonio mentale collettivo.

Come dice Einstein nel brano citato poco prima, fino a Cartesio la matematica, la geometria in particolare, opera con atteggiamenti fortemente analitici, isolando le figure geometriche l'una dall'altra e lavorando in maniera sintetica solo all'interno di esse, senza averne una visione spaziale globale, d'insieme. Solo con Cartesio si impone la concezione dello spazio come supporto e generatore di «forme», come ambiente nel quale si distinguono oggetti ritagliati, evidenziati in esso da leggi determinate, simile alla situazione percettiva che abbiamo nella visione, in cui l'oggetto è creato da una discriminazione di contorni (cioè di punti particolari) all'interno di un piano o di uno spazio percepito nella sua interezza.

Da allora la nostra plasticità nel concepire lo spazio è aumentata a dismisura, lo spazio fisico e quello matematico si conformano l'uno all'altro allontanandosi dalla prima concezione percettiva, pur creando solide configurazioni, ben rappresentate. Basta guardare come esempio i disegni della fig. 2, che forniscono altrettanti modelli di spazi, legati alla teoria della gravitazione.

Oggi si è raggiunta una notevole facilità nell'esprimere concetti scientifici, anche complessi, attraverso disegni, schemi, grafici molto belli e rappresentativi. Per rendersi conto di quanto il modello «esplicitato» graficamente sia diventato comune nei discorsi scientifici, basta sfogliare una qualunque delle tante riviste specializzate che ormai abbondano nelle edicole, per verificare come non esista articolo che non sia riccamente corredato di disegni, resi in questi ultimi anni più sofisticati dall'uso del computer.

Essi testimoniano come si sia abbandonata ogni riluttanza nel riconoscere, nel comunicare e nel sostenere strumenti di pensiero nobili e fertili, e sembra quasi incredibile che fino a pochi secoli fa il disegno non apparisse per nulla nelle opere scientifiche (salvo ovviamente quello di figure geometriche), perché non ritenuto all'altezza della situazione.

Così come nella metafora verbale il progredire della scienza ha trasformato nel tempo metafore linguistiche in metafore matematiche, nello stesso modo nelle metafore grafiche, visive, vi è stata una evoluzione che ha spostato per alcune di esse l'accento

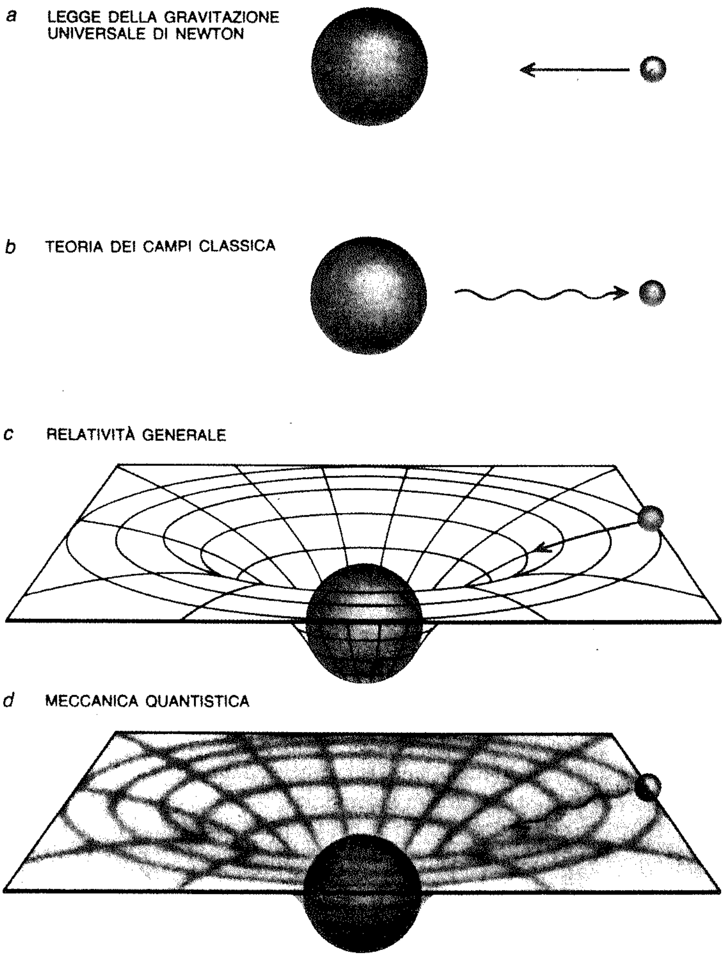

Figura 2. Le diverse teorie della gravitazione descrivono la forza che agisce tra due masse. Newton, che correlò il modulo della forza gravitazionale alla massa degli oggetti e alla distanza fra di essi, supponeva che la forza agisse istantaneamente a qualsiasi distanza (*a*). Secondo la teoria speciale della relatività, tuttavia, niente può muoversi con velocità superiore a quella della luce. La teoria classica dei campi introdusse l'idea di un campo che trasmette la forza a velocità finita (*b*). Einstein scoprì che le equazioni di campo per la gravitazione descrivono uno spazio-tempo che si incurva nelle vicinanze di oggetti massicci. Nella teoria generale della relatività, da lui elaborata, la gravità si manifesta con il moto di oggetti su traiettorie che corrispondono alla minima distanza possibile in uno spazio-tempo curvo (*c*). La meccanica quantistica afferma che la traiettoria è indeterminata (*d*). Questa discordanza tra la traiettoria dei quanti e la relatività generale angustia tuttora i fisici.

dal piano artistico a quello denotativo puro e semplice[14]. Nella storia del disegno, per esempio, accanto a una produzione puramente artistica, paragonabile alla metafora linguistica poetica, è venuto un momento in cui si sono gettate le radici per la produzione di disegni scientifici.

È interessante vedere come questo fatto sia avvenuto solo da poco tempo, relativamente tardi nella storia della scrittura, in

14. A proposito di storia del disegno e della cultura, esiste un fatto che mi ha profondamente interessato e incuriosito, di cui ho trovato una spiegazione solo approssimativa e sicuramente non definitiva, ma che voglio ugualmente proporre. Il fatto è il seguente: si nota che nell'epoca medioevale i disegni appaiono come quelli dei bambini, senza prospettiva e con rapporti spaziali sbagliati, i disegni insomma di chi usa l'emisfero sinistro. A carattere prevalentemente religioso, essi sono inoltre carichi di rarefatta spiritualità. Per contro il medioevo è nella sensibilità di tutti considerato un periodo estremamente pieno di passione, di emotività, un periodo in cui nella vita reale predomina l'irrazionalità, la superstizione, la «carne» sulla mente.

Questo fatto è ben presente nelle seguenti considerazioni di Eco, apparse nelle «Postille al nome della rosa».

«...il Medioevo è rimasto, se non il mio mestiere, il mio hobby – e la mia tentazione costante, e lo vedo dovunque, in trasparenza, nelle cose di cui mi occupo, che medioevali non sembrano e pur sono. Segrete vacanze sotto le navate di Autun, dove l'Abate Grivot, oggi, scrive manuali sul Diavolo dalla rilegatura impregnata di zolfo, estasi campestri a Moissac e a Conques, abbacinato da Vegliardi dell'Apocalisse o da diavoli che stipano in calderoni bollenti le anime dannate; e contemporaneamente letture rigeneranti dell'illuminista monaco Beda, conforti razionali chiesti ad Occam, per capire i misteri del Segno là dove Saussure è ancora oscuro».

Nel periodo successivo, la pittura è invece un trionfo della prospettiva, le linee scoprono e rendono la pienezza delle forme, il disegno trova la facilità e la «verità» degli spazi, segno che si comincia a disegnare usando un ambito mentale diverso, legato alle emozioni e alla pienezza del sentire. Il secolo però, paradossalmente, ci appare più freddo, più razionale, meno preda di fantasie emotive. Ci si sta avvicinando alla fase scientifica della cultura.

La sensazione del paradossale nasce da questa contraddizione: guardando alla pittura medioevale, colpisce il suo atteggiamento analitico, razionale, in cui è recessivo quello sintetico, legato all'emotività. L'epoca storica nel suo complesso dà però, contemporaneamente, una forte sensazione di irrazionalità. Il Rinascimento, invece, periodo in cui il pensiero sintetico impara ad esprimersi e ad accedere alle manifestazioni pittoriche, dà nello stesso tempo l'impressione di un accentuarsi dell'aspetto razionale.

Questa contraddizione potrebbe essere solo apparente. Potrebbe essere, in realtà, che l'aspetto razionale del Rinascimento nasca proprio dal fatto che il pensiero concreto si sia impadronito di elementi culturali su cui è poi avvenuta una crescita reale di tutto il pensiero, crescita che si è concretizzata non solo nel campo delle forme, ma anche in quello delle emozioni, dei giudizi e quindi nel modo di strutturare l'intera realtà. I «modelli» del pensiero nel suo complesso infatti sono fortemente dipendenti dagli strumenti cognitivi con cui il pensiero quanto i primi disegni a carattere scientifico si sono avuti verso il 1500. Prima di tale data essi erano addirittura considerati inadatti a un testo «serio» e sconsigliati agli autori.

Sarebbe estremamente interessante studiare da questo punto di vista l'evoluzione del disegno artistico e di quello scientifico nel corso dei secoli, ma risulterebbe troppo dispersivo farlo in questa sede. Per avviare il discorso, lasciando ad ognuno il compito di indagare poi personalmente sull'argomento in funzione della propria curiosità, riporto alcune parti di un articolo interessante apparso su *Le scienze* a titolo «Gli erbari a impressione e l'origine del disegno scientifico».

> Verso la fine del Medioevo e l'inizio del Rinascimento, per circa un secolo e mezzo, coloro che si interessavano di botanica in modo scientifico sperimentarono alcuni metodi per la rappresentazione delle piante. In senso più generale si potrebbe parlare di una ricerca della rappresentazione del «vero»; un tema al quale anche gli artisti erano vivamente interessati. Ma, a differenza di questi, che da sempre usano il disegno come mezzo di espressione, gli «scienziati» dovevano mettere in discussione i fondamenti della loro cultura e mutare il loro linguaggio: crediamo che il punto cruciale fosse il problema dell'obiettività della rappresentazione [...].
>
> I caratteri del disegno scientifico sono diversi da quelli del normale disegno artistico, anche se è capitato che disegni di un tipo condividessero i valori dell'altro. Le illustrazioni che hanno un carattere documentario-descrittivo e devono servire a una successiva ricerca sono i sostituti dell'oggetto che rappresentano: prima di tutto ciò che conta è la chiarezza e la precisione dell'insieme e dei particolari. Ne segue che l'illustrazione scientifica si distingue dal realismo o verismo puramente artistico, sia perché rinuncia a ogni velleità estetica (scorci, riduzioni, pesanti ombreggiature) sia perché non deve riprodurre l'individuo con le sue particolarità accidentali bensì il tipo, e deve quindi generalizzare o idealizzare[15].

Dopo aver sottolineato il sostanziale disinteresse della cultura antica per le immagini come mezzo di trasmissione dell'infor-

concreto organizza e rappresenta alla mente la realtà tutta. (Leggere a questo proposito, di P. Watzlavik, *Il linguaggio del cambiamento*, *La realtà della realtà*, o *La realtà inventata*).

Non è possibile vincere con ragionamenti razionali la superstizione, ad esempio, finché non si è creato nel pensiero concreto un ambiente di sostegno, di supporto, di schemi mentali globali legati alle emozioni, che accolgano questi ragionamenti, li riconoscano e vi si conformino.

15. S. Toresella, M. Battini, «Gli erbari a impressione e l'origine del disegno scientifico», in *Le Scienze*, n. 239, 1988, p. 64.

Figura 3 a. Leonardo da Vinci: particolare da un disegno preparatorio per *Leda e il cigno*.

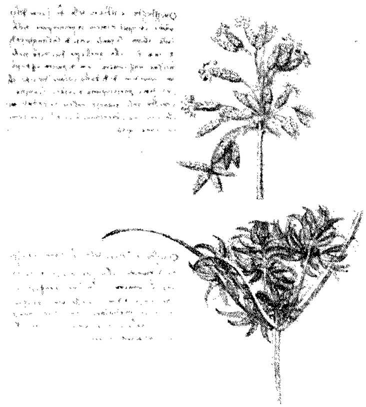

Figura 3 b. Leonardo da Vinci: particolare da un disegno per un lavoro di botanica sistematica.

mazione, perché ritenute sia insufficienti sul piano teorico sia inutili sul piano pratico, gli autori osservano che:

> più in generale questo è il discrimine che sussiste tra il mondo della parola e quello dell'immagine. La parola (e la scrittura) sono il regno della logica, dominata dagli uomini di cultura e quindi dalle classi superiori: è il mondo della razionalità. La figura è il mondo dell'arte e delle emozioni irrazionali: è il solo mezzo di comprensione degli illetterati e quindi delle classi subalterne, incapaci di riflessione.
>
> Questo modo di vedere le cose fu pacificamente accettato fino al pieno Rinascimento; nel libro di botanica di François Rabelais (che si era laureato in medicina a Montpellier) era detto a chiare lettere che la scienza degli antichi testi offriva più solidità che non le illustrazioni delle erbe («certius ex veterum sermone et scriptiris quam picturis discitur»). Solo alla fine del XVI secolo gli uomini di scienza si convinsero della grande importanza delle illustrazioni nelle opere scientifiche. Ulisse Aldovrandi in una sua lettera del 1577 dice: «...le Opere mie, che si hanno a stampare con le figure, perché senza figura è una vanità».
>
> Infine riporteremo un'osservazione di Loren Mackinney, noto storico della medicina, che prova quanto sia stata tenace l'avversione alle figure nella cultura umanistica: «C'è stato un tempo in cui le figure in un libro venivano considerate infantili. Oggi le illustrazioni sono una conditio sine qua non non solo per i libri di testo (anche universitari) ma anche per le monografie e gli articoli di studio» (*Manuscripta*, III, 1, p. 4, 1959) [...].

Nel primo e nel secondo decennio del cinquecento grandi artisti come Leonardo e Albrecht Duerer hanno disegnato piante e fiori con grande vivezza e precisione scientifica; è soprattutto a questi due artisti che gli storici dell'arte attribuiscono il merito di aver creato il disegno scientifico. Ma in tutti e due i casi questa produzione ha una «destinazione» puramente artistica. La cosa si nota meglio confrontando gli studi di piante che Leonardo fece per Leda e il cigno con quelli di qualche anno più tardi che sembrano invece destinati a una pubblicazione: questi ultimi sono i più scientifici[16].

La difficoltà principale che gli autori trovavano nel comporre tali disegni, quelli scientifici, era proprio creata dalla necessità di renderli rigorosi, denotativi. Guardando le tavole della fig. 3 si evidenziano immediatamente le caratteristiche prime di tali disegni: il ciuffo di fiori che Leonardo muove in un'onda sinuosa è come la «chioccetta per l'aia azzurra»: ci dà e ci vuole dare emozioni. Il movimento è una componente irrinunciabile per chi si pone questi scopi. Il disegno scientifico dell'erbario invece vuole fornire e organizzare informazioni sulla pianta, e deve perciò cercare di essere il più possibile denotativo. Questo porta l'autore alla ricerca di una essenzialità rigorosa nel disegno perché dettagli ridondanti o amplificati possono portare fuori strada.

Nelle tavole della fig. 4 possiamo vedere ancora meglio come un disegno scientifico costringa a una riflessione e a una scelta di caratteri diversi da quelli che si ritrovano nel disegno artistico, pur nella ricerca, in entrambi i casi, di un prodotto finale «veristico».

6. Riassumendo...

Abbiamo lasciato in sospeso, qualche capitolo fa, alcune domande che Poincaré si poneva nell'affrontare la natura del pensiero matematico.

La prima di queste domande era formulata nel modo seguente: il ragionamento matematico si compone di tanti brevi ragionamenti collegati in una catena. Come mai le persone che normalmente non sbagliano nel sillogismo breve sbagliano invece nel ragionamento matematico?

Parte della risposta è già stata data nella discussione sulla razionalità portata avanti nel capitolo del Ritratto, in cui è stato

16. Ivi, p. 65.

Figura 4 a. Otto Brunfels: incisione databile al 1531 di pianta di sanicola, tratta da *Herbarum vivae eicones*.

Figura 4 b. Leonardo Fuchs: incisione, raffigurante pianta di sanicola, tratta da *De historia stirpium* (1542).

fatto notare come in realtà il concetto di razionalità sia troppo stretto per illustrare quanto effettivamente avviene nei processi mentali. Per completare la risposta, a quanto detto in quell'occasione vanno aggiunte le altre considerazioni fatte nei capitoli seguenti, riguardanti la facilità o meno di passaggio dalla parola all'immagine dipendente dal tipo di linguaggio usato.

La natura dei sillogismi è varia ed esistono sillogismi difficili, le cui premesse portano alle giuste conclusioni solo con fatica. Questi sillogismi, quando sono usati nel ragionar comune, presentano per una mente le stesse difficoltà che comporterebbe un ragionamento matematico. Eccone un esempio:

Consideriamo il seguente problema: quattro carte sono posate su un tavolo e la loro faccia visibile mostra, rispettivamente, una E, una K, un 4 e un 7. Sappiamo che le carte hanno una lettera su una faccia e un numero sull'altra. Viene poi data una regola, di cui si deve valutare la validità: «Se una carta ha su una faccia una vocale, allora sull'altra avrà un numero pari».

Per verificare se la regola enunciata è vera, viene dato il permesso di girare due carte, ma solo due.

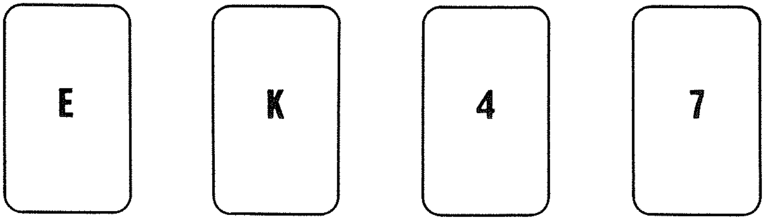

Tavola 1.

Il novanta per cento dei soggetti a cui è stato presentato il problema, ha voltato correttamente la carta con la vocale, quella con la E, per verificare che dietro vi fosse un numero pari, ma ha poi continuato in modo errato voltando la carta col numero pari, quella con il 4, compiendo così un errore nell'applicare il sillogismo.

Ma, fatto veramente interessante, se si pone il problema in modo logicamente identico, ma cambiando formalmente i dati, si riesce più facilmente a risolverlo e a individuare così l'errore compiuto nella prima versione[17].

Ecco allora un secondo enunciato del problema, equivalente al primo: Abbiamo quattro carte, ognuna delle quali rappresenta un viaggio. Ogni carta ha sulla faccia una destinazione e sull'altra un mezzo di trasporto. Le carte sono posate su un tavolo e la loro parte visibile mostra le scritte: New York, Roma, aereo, nave.

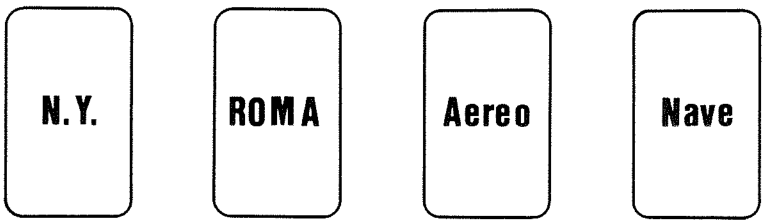

Tavola 2.

La regola è: ogni volta che vado a New York ci vado in aereo.

In questa versione del problema è più facile capire che, dopo aver voltato la carta «New York» per verificare se dietro c'e

17. H. Gardner, *La nuova scienza della mente*, trad. it., Milano, Feltrinelli, 1988, p. 342.

scritto aereo, non avrebbe alcun senso andare a girare la carta con la scritta «aereo», perché qualunque nome porti segnato dietro, non invaliderebbe né confermerebbe la regola, che non proibisce di raggiungere con l'aereo altre destinazioni, oltre New York.

La carta da girare invece è quella che porta la scritta «nave», perché se dietro vi troviamo New York la regola enunciata non è vera, mentre è convalidata nel caso contrario.

Fatta ora la corrispondenza di E con N.Y., di K con Roma, di 4 con aereo, di 7 con nave, anche la soluzione del primo enunciato risulta più evidente. Un risultato sperimentale conferma che l'ottanta per cento dei soggetti a cui è stato rivolto il test, ha risolto il problema proposto nell'ultima forma, mentre solo il dieci per cento è riuscito a trovarne la soluzione quando il testo è stato dato nel primo modo.

Questo, tra l'altro, è un buon esempio di quanto voglio dire quando parlo di «ambiti mentali diversi» usati per affrontare determinati compiti. Nel secondo problema il riferimento a parole del linguaggio naturale e a situazioni affrontate nella pratica quotidiana comporta come conseguenza che facilmente si possano tradurre le parole in immagini, esistendo già canali «naturali» di traduzione, fatto che predispone il nostro cervello a costruire la soluzione usando sia le funzioni analitiche che quelle sintetiche, alternando l'elaborazione tra un sistema e l'altro.

Il primo caso invece è assimilabile all'esecuzione di un esercizio di matematica, perché i dati del problema hanno una stretta natura formale, e non creano riferimenti concreti. La tendenza allora è quella di elaborare tutta la soluzione rimanendo nell'ambito delle funzioni analitiche, dove solo un logico ben allenato riesce ad arrivare in fondo al problema nel modo giusto.

Questo risultato suggerisce qualcosa in campo didattico: quando si vuole indurre nell'alunno un atteggiamento «sintetico» pur dovendo affrontare un problema espresso in termini altamente formali e analitici, possiamo cercare di trasformarne il testo rendendolo in qualche modo «concreto». Questo fatto è già stato intuito dagli insegnanti più sensibili, che lo applicano a volte in modo del tutto spontaneo, e comincia ad apparire anche in qualche libro di testo, fra quelli che si pongono il problema della creatività in matematica. In uno di questi, per esempio, si può leggere:

Concludiamo questo paragrafo risolvendo il classico problema di Erone: dati due punti P, Q che si trovano da una stessa parte rispetto alla retta R, trovare il percorso più breve che congiunge P con Q toccando la retta R. (Possiamo rendere concreto il problema in questo modo: R è un fiume che attraversa la pianura; un cacciatore si trova in P e deve ritornare a casa in Q, ma prima deve attingere l'acqua dal fiume)[18].

Questa tecnica è opportuna soprattutto nelle prime classi (sto parlando di istituti di istruzione secondaria superiore), quando la mente dei ragazzi sta formandosi nel complicato processo del passaggio tra «concreto» e «analitico» in campo scientifico, e appare meno necessaria salendo verso le ultime, anche se va sempre tenuta presente. Spiegare analisi in quinta senza gesticolare, per esempio, sarebbe molto difficile, un po' come spiegare come è fatta una scala a chiocciola senza poter indicare con le mani la forma di una spirale. L'«andamento» delle funzioni, il «tendere» di esse a qualcosa, la «continuità», la «curvatura», l'esistenza di punti di «flesso» e altri mille concetti di analisi portano infatti inevitabilmente ad aiutare l'intuizione con rappresentazioni estremamente concrete. Non ho imbarazzo a dire che a volte, presa dalla foga della spiegazione, mi muovo in classe in evoluzioni a braccia tese, per illustrare l'andamento di un grafico!

Un secondo punto dell'articolo di Poincaré lasciato in sospeso riguarda la memoria e il confronto tra l'abilità di un matematico e un giocatore di scacchi. In breve, egli si chiede come mai, supponendo che la memoria sia una delle qualità che aiuta una mente matematica, lui stesso trovi difficoltà a giocare a scacchi, dove una buona memoria è indispensabile, e come mai, all'inverso, i bravi giocatori di scacchi non sono di conseguenza dei bravi matematici.

Dopo tutte le considerazioni fatte nei capitoli precedenti, la risposta a queste domande viene abbastanza immediata.

È vero, in matematica spesso si ha a che fare con una lunga serie di sillogismi, e quando la catena si allunga è importante non perderne di vista neanche uno, e ricordarli tutti correttamente. Se questa cosa dovesse essere fatta esclusivamente con modalità analitiche, allora sarebbero veramente guai per Poincaré e per tutti coloro, me inclusa, che hanno una memoria mediocre; ma fortunatamente, come abbiamo visto, ci sono altri sistemi, altre strategie mentali che ci permettono di portare a termine il lavoro. Si tratta, in altre parole, di impegnarsi nella costruzione di modelli mentali, impiegando i mezzi che per ognuno di noi sono

18. G. Prodi, *Matematica come scoperta*, Firenze, D'Anna, 1980, p. 196.

più congeniali (immagini, sensazioni cinetiche, ibridi che è impossibile descrivere), ma che organizzino e rappresentino in un'unica unità globale, in un unico blocco, un gran numero di informazioni analitiche, e che siano facilmente accessibili per noi stessi. Vorrei aggiungere che Poincaré stesso è più o meno di questo avviso, anche se ha espresso la propria opinione in termini necessariamente un po' più generici. Egli infatti dice:

> Una dimostrazione matematica non è una semplice giustapposizione di sillogismi, essa consiste in sillogismi posti in un certo ordine, e l'ordine in cui questi elementi sono posti è molto più importante degli elementi stessi. Se io ho la sensazione, l'intuizione, tanto per dire, di questo ordine, in modo tale da percepire con un'occhiata il ragionamento come un tutto, non devo più aver paura di dimenticare uno degli elementi perché ciascuno di essi prenderà il suo posto assegnato nella configurazione, e questo senza alcuno sforzo della memoria da parte mia[19].

Sappiamo da studi di laboratorio che è l'emisfero destro a elaborare in prevalenza informazioni relative allo spazio e alle strutture spaziali. Esso è meglio in grado di comporre parti di cose in un disegno compiuto (o forse è la parte analitica che le scompone?), comunque meglio in grado di comporre particolari in un insieme connesso, come può accadere con il sorgere di una melodia unica da una miriade di note isolate.

Ora, quando si parla di «percepire con un'occhiata il ragionamento come un tutto», si sta parlando di un problema dello stesso tipo, dell'ordinamento delle parti di un qualcosa di complessivo (di un teorema, di un disegno, del capitolo di un libro...) e del loro rapporto. Voglio dire il rapporto tra quelle parti, tra quegli argomenti.

Queste ultime sono le fasi più difficili e impegnative del lavoro mentale, perché, come dice F. Capra:

> Il metodo scientifico dell'astrazione è molto efficace e potente, ma comporta un prezzo da pagare. Via via che definiamo con maggior precisione il nostro sistema di concetti, che lo rendiamo più efficiente e ne stabiliamo le connessioni interne in modo sempre più rigoroso, esso si distacca sempre più dal mondo reale[20].

19. AA. VV., *Creative Process*, cit., p. 35.
20. F. Capra, *Il tao della fisica*, Milano, Adelphi, 1982, p. 70.

Per questo la creazione e la rievocazione delle immagini non può avvenire in modo spontaneo, ma solo con un corretto processo di crescita culturale, in cui si rendono patrimonio del pensiero concreto tutti gli elementi astratti o simbolici che vengono usati e creati in ambito analitico, e viceversa.

Quanto detto prima spiega anche perché si può essere bravi giocatori di scacchi senza essere matematici altrettanto bravi: il giocatore di scacchi non ha bisogno di effettuare l'operazione complessa e difficile della traduzione, non deve cioè usare attività di pensiero che traducano elementi dal linguaggio analitico a quello sintetico e viceversa, ma può limitarsi a usare direttamente ed esclusivamente l'ambito sintetico per figurarsi l'intera sequenza di mosse da eseguire, usando quindi esclusivamente l'intelligenza spaziale. Ma una cosa certamente accomuna chi è impegnato in una partita a scacchi a chi si trova davanti un serio problema di matematica: il grande sforzo di concentrazione che è richiesto ad entrambi per portare a termine il loro compito.

Ci vuole concentrazione per ottenere una dominanza sintetica da parte del giocatore di scacchi per elaborarvi le sue strategie, e parimenti al matematico per poter sfruttare le capacità produttive di tale ambito e «inventare» soluzioni ed astrazioni originali. Inoltre, sempre nel caso del matematico, la traduzione di tali prodotti in termini analitici e il bagaglio di conoscenze specifiche che le varie strutture mentali devono crearsi, va costruito punto per punto con fatica e con un volontario isolamento. Ci vuole cioè una grande capacità di attenzione.

Tutti siamo consapevoli dell'importanza che ha nello studio il sapersi concentrare e il saper porre attenzione solo a ciò su cui bisogna lavorare, e spesso succede che la lotta più grande che dobbiamo combattere con i nostri alunni è proprio contro la loro tendenza immediata alla sonnolenza e allo sbadiglio quando sono messi davanti a un libro.

Viene spontaneo allora lasciarsi trasportare dall'interesse e dalla curiosità verso questo argomento ed altri che vi si associano naturalmente e che suscitano interrogativi veramente pressanti. Purtroppo però la strada da seguire diventa in questo modo più difficile e insidiosa, perché deve procedere su un terreno insicuro dove ad ogni passo il piede rischia di sprofondare nella palude. Ciò nonostante, pur consapevole che la natura del problema comporta il rischio di esagerare con le congetture e con le ipotesi basate solo su «impressioni», credo varrebbe la pena di affrontarlo, data la grandissima importanza che esso riveste nel discorso generale che stiamo facendo.