

III NELLE TRE DIMENSIONI

Il Tangram è un gioco nato in Cina, dove all'inizio del XIX secolo si cominciarono a stampare i primi libretti, e ha trovato poi diffusione anche qui da noi, in Europa. Il senso del gioco è semplice: si tratta di usare tutti i sette pezzi neri, di legno o di plastica, in cui è stato scomposto un quadrato, per comporre nuove figure proposte dal libretto (fig. 1).

Sono essenzialmente figure geometriche nelle quali però è possibile, con un po' di fantasia, riconoscere oggetti o figure in movimento (fig. 2).

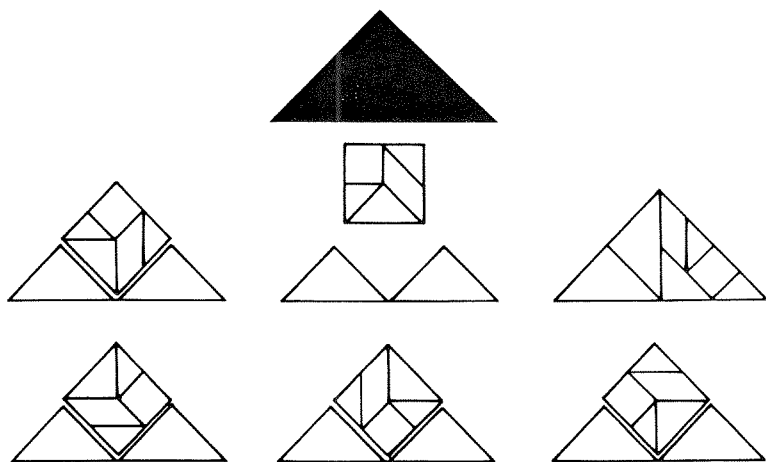


Figura 1.

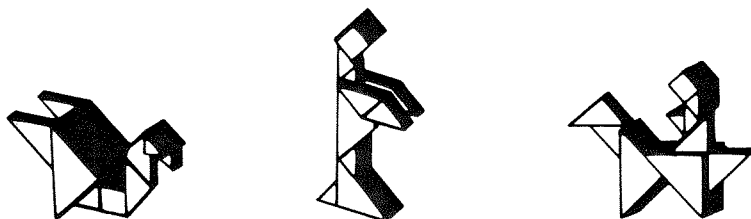


Figura 2.

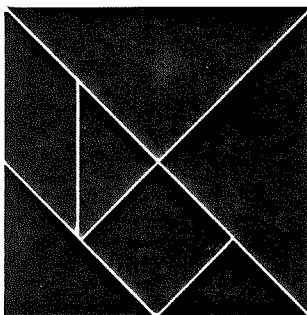


Figura 3.

Il gioco però non è facile: chi vuol verificarlo non ha, per cominciare, che da ritagliare un quadrato di carta o di cartoncino e suddividerlo nel modo indicato in fig. 3 e, dopo aver mescolato i pezzi, può provare a ricomporlo.

La difficoltà consiste essenzialmente in due tipi di operazioni: la prima richiede di saper scomporre mentalmente un tutto omogeneo – la silhouette disegnata sul libretto – in parti combacianti uguali a quelle che si hanno a disposizione.

La seconda operazione invece consiste nel riuscire a muovere, sempre mentalmente, le figure geometriche nel piano per poterle accostare nel modo giusto.

È chiaro che questi due tipi di processi sono poi mescolati a tentativi e verifiche pratiche eseguiti con le mani, non con la mente, ma la difficoltà resta piuttosto alta lo stesso.

È lo stesso tipo di difficoltà che può incontrare uno studente che, dovendo trovare la misura del segmento AB in una figura del genere (fig. 4) lo debba considerare come cateto del triangolo rettangolo ABD non manifestamente disegnato – è una scomposizione che tocca a lui vedere – piuttosto che come lato del trapezio ABCD.

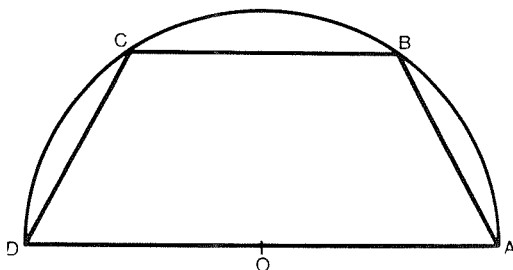


Figura 4.

Ognuno di noi ha una propensione più o meno grande per questo tipo di operazioni, così come ha più o meno facilità nell'esprimersi verbalmente, ma a volte la strategia di soluzione può essere suggerita o addirittura imposta dal tipo di formulazione del problema.

Così ad esempio, la proposta di costruire una figura del Tangram difficilmente sarà seguita da tentativi di soluzione cercati per via analitica – contando ad esempio i vertici della figura o i lati, etc. – mentre per i seguenti problemi, che qui come a scuola sono presentati in forma verbale, una strategia di soluzione analitica può essere suggerita come ambito naturale di proseguimento del pensiero, che non deve cambiare tipo di funzioni, o addirittura può essere pretesa come dimostrazione di raggiunte capacità logico-matematiche:

1. Un cubo di legno la cui faccia ha il lato di 3 cm., è stato verniciato di rosso e successivamente è stato tagliato in cubetti unitari di 1 cm. di spigolo. Quanti cubetti tra quelli ottenuti avranno le facce completamente senza colore? E quanti hanno solo due facce rosse?

2. Un foglio di carta viene piegato a metà, poi ancora in due e successivamente ancora a metà. Quanti rettangoli si saranno ottenuti dopo la piegatura?

Tutti e due i problemi possono essere risolti con strategie visivo-spaziali, immaginando cioè l'oggetto e le successive operazioni compiute, o con strategie logico-analitiche illustrate verbalmente.

Nel caso del secondo problema, ad esempio, la risposta si può dare contando $2 \times 2 \times 2$, senza effettivamente visualizzare il foglio, così come, d'altro canto, nel primo caso il cubo ha la

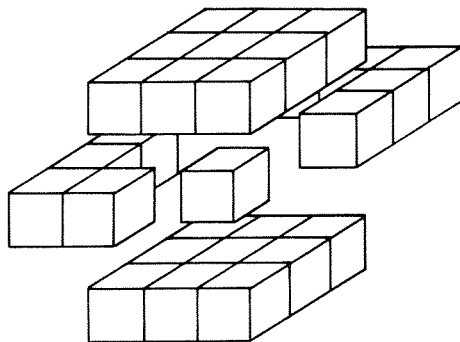


Figura 5.

possibilità di essere davvero scomposto mentalmente, rivelando al suo interno il cubetto bianco (fig. 5).

Prove sia introsettive che sperimentali portano a pensare che la situazione che si verifica più frequentemente sia quella in cui la soluzione viene cercata attraverso un'immagine mentale interna che possa essere manipolata parallelamente alle operazioni logiche che vengono eseguite, influenzandole e facendosene guidare.

Vorrei osservare come in questa occasione diventi molto difficile affrontare l'argomento rimanendo confinati ad abilità specifiche, vicine alla percezione, senza oltrepassare i vaghi limiti che separano il percepito dal pensato. Già nel primo capitolo, parlando della percezione del contorno di una figura, si era insinuata l'idea che il contorno venisse «pensato» o «concepito» più che percepito, ma è stato abbastanza agevole mantenere separati questi concetti, mentre ora diviene estremamente faticoso continuare a farlo, perché le abilità spaziali fanno uso in gran parte dell'immaginazione.

Si esamini il seguente test ideato da Shepard e Metzler in cui la figura da identificare è una rappresentazione di una forma tridimensionale asimmetrica. Si deve indicare, per ogni coppia di figure, se la seconda figura rappresenta una semplice rotazione della prima o se invece è la rappresentazione di una forma diversa (fig. 6).

Per poter rispondere alle domande bisogna ruotare mentalmente la figura; questo comporta dover manipolare un'immagine mentale, implica cioè il saper creare con il pensiero realtà evocate non più direttamente da un percepito esterno, ma riprodotte e trasformate in un processo che ha un suo svolgimento autonomo, attraverso segnali e stimoli esclusivamente interni.

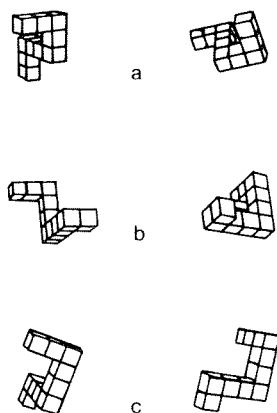


Figura 6. Istruzione: dire se la seconda figura di ciascuna coppia è una rotazione della prima o se è una figura diversa.

1. La divisione

Negli anni sessanta lo psicologo sperimentale Roger Sperry e i suoi collaboratori, tra cui il principale fu il dottor M. Cazzaniga, hanno condotto studi estremamente interessanti su pazienti che avevano subito interventi chirurgici al corpo calloso, in seguito a malattia. Più precisamente, si trattava di persone che soffrivano di forme molto gravi di epilessia, con attacchi che iniziavano con un'attività cerebrale anomala localizzata in un emisfero e che poi si irradiava anche nell'altro.

Circa due decenni prima il neurochirurgo W.P. Van Wagenen, di fronte ad alcuni pazienti soggetti ad attacchi incurabili che stavano morendo a causa di questo trasferimento dell'attività convulsiva tra zone cerebrali diverse, aveva pensato che tagliare drasticamente le fibre di collegamento tra i due emisferi fosse un modo per contenere e interrompere questo pericoloso diffondersi dell'attività epilettica, e aveva tentato la strada della resezione del corpo calloso. La decisione, altamente innovativa, richiese un coraggio e un'audacia giustificati solo dal fatto che i pazienti stavano morendo, senza altra possibilità di salvezza. Il chirurgo non avrebbe saputo prevedere infatti quali sarebbero state le conseguenze di tale intervento sulle funzioni mentali degli operati. Con grande sorpresa e conforto per lui e per gli ammalati, accadde che l'interruzione della via di collegamento tra gli emisferi corticali pose effettivamente fine agli attacchi incontroll-

lati, e non ebbe alcun effetto negativo percepibile sulle funzioni mentali. Per circa vent'anni la ricerca sul cervello rimase con questo interrogativo sospeso: quale ragione di essere aveva allora la presenza del corpo calloso nel cervello? Fu appunto Sperry – che avrebbe poi vinto nel 1981 il Premio Nobel per la fisiologia e la medicina per queste sue ricerche sui «cervelli divisi» – a trovare il giusto metodo di indagine su questo problema e a fornire le prime risposte.

Per comprendere i lavori di Sperry e di Cazzaniga è necessario conoscere almeno superficialmente i meccanismi che regolano la nostra percezione visiva. Se fissiamo un punto posto di fronte a noi, gli oggetti posti nel campo visivo sinistro vengono proiettati sul lato destro dei nostri due occhi, mentre quelli posti nel campo destro vengono proiettati sul lato sinistro di ambedue gli occhi. Questo lato sinistro poi invia segnali visivi all'emisfero corticale sinistro, mentre il lato destro di ogni occhio invia le proprie proiezioni all'emisfero destro (fig. 7).

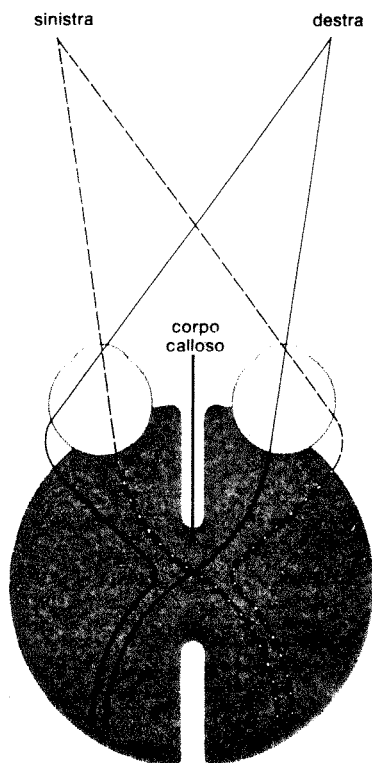


Figura 7. Il sistema visivo. Gli oggetti posti nel campo visivo sinistro vengono proiettati sul lato destro dei due occhi, quelli posti nel campo visivo destro vengono proiettati sul lato sinistro di entrambi gli occhi; il campo visivo destro invia le sue proiezioni all'emisfero cerebrale destro e il lato sinistro all'emisfero sinistro. In tal modo, il campo visivo destro viene proiettato da ambedue gli occhi nell'emisfero sinistro, e il campo visivo sinistro viene rappresentato nell'emisfero destro.

Così se teniamo lo sguardo fisso sul naso di una persona che ci sta di fronte, la metà della sua faccia che si trova alla nostra sinistra proietta la sua immagine nel nostro emisfero cerebrale destro, mentre la metà che sta alla nostra destra proietta la sua immagine nel nostro emisfero sinistro. Il corpo calloso poi, integrando le informazioni provenienti dai due emisferi, fa in modo che anziché vedere due metà separate di una faccia, noi vediamo la faccia intera, come un'unica entità.

Ci sono esperimenti ingegnosi che evidenziano questa rappresentazione separata e incrociata del nostro campo visivo, anche quando i soggetti a cui sono sottoposti sono persone con il cervello integro. Uno tra questi, molto indovinato, è stato escogitato dallo psicologo J. Jaynes. allo scopo di evidenziare il ruolo sostenuto dall'emisfero destro nell'elaborazione di informazioni riguardanti espressioni facciali (fig. 8).

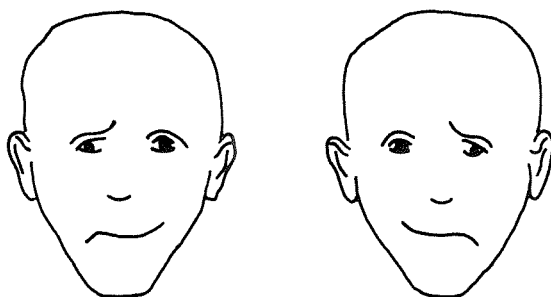


Figura 8.

Queste due facce sono identiche, immagini speculari l'una dell'altra. Si fissi il naso di ognuna, e si dica quale delle due facce è più allegra. Dato che, a parte la specularità, si tratta della stessa faccia, non dovrebbero esservi differenze di interpretazione, eppure quasi tutte le persone con dominanza laterale destra interpellate dallo psicologo hanno indicato come più allegra la faccia (b), con la bocca sorridente nella parte sinistra. Ricordando che l'emisfero preposto all'elaborazione e al riconoscimento delle facce è quello destro, diventerebbe quindi dominante nel giudizio sull'espressione facciale quella parte situata nel settore visivo proprio di tale emisfero.

Sfruttando dunque questa particolarità del nostro sistema visivo, Sperry e Cazzaniga riuscirono a proiettare stimoli visivi in modo che fossero percepiti solo dall'emisfero sinistro – o solo da quello destro – dei loro pazienti, ponendo loro delle domande dopo ogni proiezione. Le risposte potevano essere date verbalmente o con movimenti delle mani, che erano accuratamente nascoste agli occhi del paziente. Sulla base dei risultati ottenuti, i due ricercatori poterono dimostrare che i due emisferi cerebrali elaborano in modo diverso le informazioni ricevute.

Quando ad esempio una parola veniva proiettata nell'emisfero sinistro del paziente, questi poteva riferirla e scriverla con la mano destra dato che il linguaggio e i movimenti del lato destro del corpo sono controllati da tale emisfero.

Al contrario, se la parola veniva proiettata nell'emisfero destro, il paziente non poteva né riferirla né scriverla, anche se in realtà l'emisfero destro mostrava una certa comprensione verbale, pur se limitata. Se gli venivano proiettate immagini di parole indicanti oggetti, il paziente poteva infatti identificarli indicandoli con la mano sinistra.

Apparve comunque chiaro ben presto che l'emisfero destro era indubbiamente superiore all'altro in compiti che comportavano la percezione e la manipolazione di schemi spaziali. Questo fatto è evidenziato da una serie di esperimenti nei quali viene presentato a un dato emisfero un disegno abbastanza semplice, che deve essere poi riprodotto dalla mano controlaterale. I disegni effettuati con la mano sinistra sono sempre risultati migliori di quelli eseguiti con la mano destra (fig. 9).

La figura mostra alcuni di questi disegni. Tutte le riproduzioni appaiono alquanto maldestre, perché il paziente veniva messo nelle condizioni di non poter vedere ciò che disegnava, ma è evidente comunque che quelle eseguite con la mano sinistra sono indubbiamente le migliori.

2. I cervelli divisi e la geometria

Alcuni anni fa sono stati eseguiti esperimenti che intendevano indagare sulle diversità dell'elaborazione emisferica per i processi cognitivi della geometria.

Quindici soggetti sono stati sottoposti a test visivo-tattili che riguardavano discriminazioni geometriche nello spazio euclideo, affine, proiettivo e topologico nel piano e nello spazio. Sette di questi soggetti presentavano commissurotomia, due emisferecto-

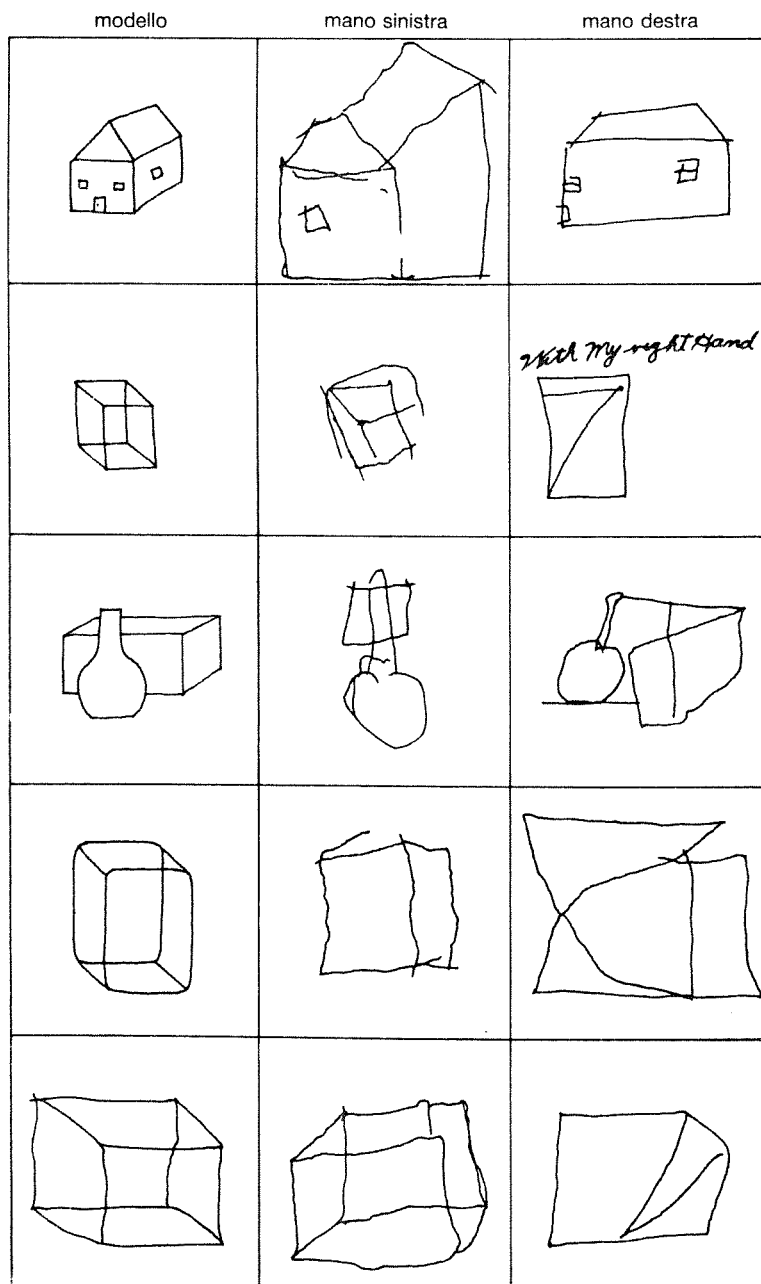


Figura 9.

mia¹, uno di essi aveva una assenza congenita del corpo calloso, e cinque infine erano soggetti di controllo normali.

I compiti previsti dall'esperimento consistevano nel selezionare, fra tre forme nascoste alla vista, quella che meglio si adattava a un insieme di cinque forme geometriche mostrate su di un pannello, e prevedevano 54 «sedute» di questo tipo.

Per svolgere quanto chiesto dalla prova occorreva solo una conoscenza intuitiva dei rapporti geometrici, che non presupponeva in alcun modo conoscenze formali di geometria.

Laura Franco, autrice dell'articolo che sto esponendo², ha osservato che, mentre le operazioni aritmetiche sembrano essere una funzione predominante dell'emisfero sinistro, la geometria, con la sua struttura eminentemente spaziale, sembrerebbe essere più oggetto dell'emisfero destro, fatto evidenziato anche dalla letteratura: un paziente commissurotomizzato, due anni e mezzo dopo l'intervento era ancora incapace di ottenere profitti accettabili in geometria, e dovette essere così trasferito a seguire un corso di «matematica generale». Un altro paziente con assenza congenita del corpo calloso, uno studente del secondo anno di università con un profitto nella media, riferiva di avere delle difficoltà eccezionali con la geometria. In entrambi i casi la difficoltà grave in geometria fu spiegata, nel primo, dall'impossibilità dell'emisfero destro di passare le proprie elaborazioni all'emisfero «parlante», e nel secondo da una presunta interferenza nello sviluppo mentale dell'emisfero destro dovuta alla bilateralizzazione del centro del linguaggio indotta dalla mancanza del corpo calloso.

Durante l'esperimento i soggetti sedevano ad un tavolo, di fronte a uno schermo. Una fila di cinque forme geometriche veniva loro presentata per un'ispezione in visione libera e dietro lo schermo, fuori dalla vista del soggetto, venivano poste tre forme geometriche di circa 7 cm nella dimensione maggiore, uno solo dei quali poteva essere pensato come conforme all'insieme dei cinque oggetti visti. Questi tre campioni potevano essere raggiunti ed esplorati col tatto dal soggetto solo con la mano indicata dagli sperimentatori, dopo di che veniva scelto con un segnale della mano stessa quello che più era ritenuto adatto alle forme della fila esposta alla visione libera. In questo modo si otteneva che il compito di riconoscimento delle forme fosse

1. L'emisferectomia consiste nell'asportazione chirurgica della corteccia sinistra o di quella destra.

2. L. Franco e R.W. Sperry, «Hemisphere Lateralization for Cognitive Processing of Geometry», in *Neuropsychologia*, 1977, vol. 15, pp. 107-14.

elaborato solamente nell'ambito dell'emisfero che controllava la mano impegnata nell'esplorazione.

Furono presentati in totale 54 di tali insiemi di 8 forme geometriche per la corrispondenza visivo-tattile, 22 riguardanti la geometria nel piano e 32 quella nello spazio.

I test nelle due dimensioni e quelli tridimensionali venivano presentati separatamente: il test intero di 22 scelte in un caso e di 32 nell'altro, veniva presentato prima alla mano sinistra, e dopo un intervallo di 15 minuti veniva ripetuto con la mano destra.

Questa decisione è stata presa dopo che fu scoperto che l'emisfero sinistro tendeva ad interferire con le prestazioni dell'emisfero destro, se il sinistro aveva già familiarità con il compito, mentre il contrario non sembrava accadere.

I criteri geometrici con cui erano stati progettati questi compiti non prevedevano alcuna preparazione formale da parte del soggetto, che era solo costretto a fare delle astrazioni mentali sulle caratteristiche comuni dell'insieme di 5 forme del gruppo che poteva vedere, per poter scegliere tra quelle percepite con il tatto la forma giusta, che non era mai identica a quelle presentate alla vista, ma che aveva in comune con queste un numero variabile di caratteristiche.

Le scelte dovevano esser effettuate sulla base di criteri che variano in modo caratteristico col numero di condizioni usate per definire lo spazio geometrico: quello euclideo ne usa il numero maggiore, segue lo spazio affine e meno ancora se ne trovano in quello proiettivo e topologico.

Nella fig. 10 possiamo vedere un esempio del tipo di forme presentate nel test. È evidente come nel primo caso, quello euclideo, gli indizi per selezionare la forma giusta, un triangolo equilatero, sono più numerosi e diversi da quelli occorrenti per la prova topologica ad esempio, dove la forma giusta, quella di mezzo, deve essere scelta solo in base al fatto di essere chiusa.

I risultati dell'esperimento hanno dimostrato, secondo la Franco, una superiorità generale dell'emisfero destro nello svolgimento dei compiti richiesti, e differenze interessanti di prestazioni dell'emisfero sinistro rispetto ai vari tipi di geometria.

La superiorità dell'emisfero destro si manifestava sia nel numero maggiore di prove giuste, sia nella velocità di esecuzione delle prove stesse: il tempo medio impiegato con l'emisfero destro-mano sinistra dai sette pazienti commissurotomizzati era generalmente la metà di quello impiegato dall'emisfero sinistro-mano destra.

Si è potuto anche notare, come ho detto, che le differenze

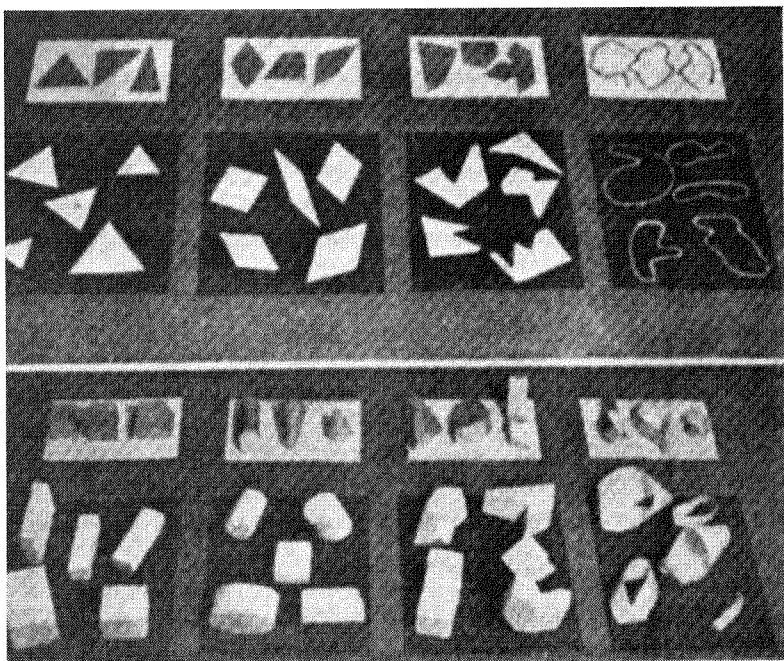


Figura 10.

della struttura geometrica dei test non avevano quasi effetto sul rendimento della mano sinistra, ma influivano in modo pesante su quello della mano destra. I risultati corretti dell'emisfero sinistro erano alti quasi come quelli dell'emisfero destro nei test con le proprietà euclidee, per diminuire però passando dalla geometria affine a quella proiettiva, per raggiungere il livello di pura casualità nei compiti topologici: per queste prove l'emisfero sinistro (mano destra) poteva solo tirare a indovinare!

La Franco ha notato anche la velocità e la sicurezza con cui il paziente con emisferectomia sinistra, l'asportazione chirurgica cioè della corteccia sinistra, ha affrontato l'intero programma. Era eccezionale e impressionante, ci riferisce, specialmente se veniva paragonato al rendimento generalmente più lento ed esitante dei soggetti normali di controllo. Conclude la Franco:

I risultati ottenuti indicano la dominanza dell'emisfero destro per il ragionamento geometrico e collimano con altre osservazioni. I bambini riescono a distinguere forme geometriche in età prescolastica, quando ancora non sono capaci di verbalizzarne le caratteristiche

specifiche. Sia nell'elaborazione dell'adulto sia nello sviluppo cronologico, le proprietà geometriche e i teoremi possono essere compresi intuitivamente ben prima della possibilità di una piena espressione verbale. Introspectivamente la comprensione visiva spaziale non verbale sembra comunemente precedere e sostenere l'analisi deduttiva sequenziale che fa parte della soluzione dei problemi geometrici. [...] Sembra dunque probabile che le operazioni dell'emisfero destro siano primarie nella comprensione delle proprietà geometriche dello spazio e che queste ultime diventino suscettibili di verbalizzazione solo in un secondo tempo. Sembra sia implicata un'interazione attiva dei due emisferi durante le elaborazioni dei problemi geometrici e un'integrazione interemisferica simile sembrerebbe ragionevole anche per altre attività cerebrali che hanno a che fare con intuizioni spaziali e la loro espressione linguistica.

La conoscenza spaziale, l'abilità di muoversi mentalmente in un ambiente ristrutturato continuamente dal proprio pensiero presenta dunque questi molteplici aspetti: può essere un utile strumento per il ragionamento, un modo per organizzare le informazioni che si ricevono, una maniera per formulare problemi oppure il mezzo stesso per risolverli.

Ci sono rami della scienza che fanno, a differenza di altri, un uso prevalente e irrinunciabile di tutti questi aspetti dell'immaginazione spaziale. La topologia, ad esempio, è una di quelle branche della matematica assolutamente impraticabile per chi non abbia notevoli doti spaziali. È quella geometria che si occupa delle superfici deformabili, consiste cioè nello studio di quelle proprietà di tali superfici che non variano per deformazioni eseguite in ogni modo possibile, che non contempli però strappi, forature o riempimenti di fori, fatta eccezione per alcune situazioni particolari e ben definite.

Le forme topologiche sono veramente divertenti, perché spesso bastano un paio di forbici, carta e colla per fabbricarle.

Ad esempio, prendendo una striscia di carta lunga e stretta e incollandone le estremità dopo avervi dato un mezzo giro, si ottiene un nastro di Moebius (fig. 11).

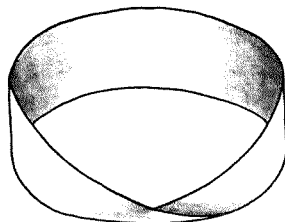
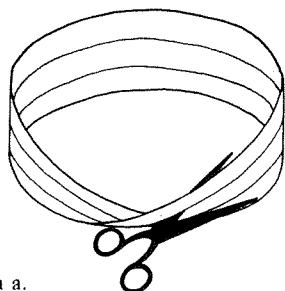
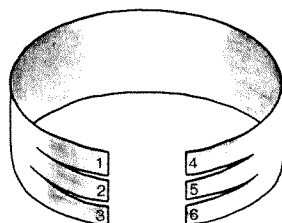


Figura 11.



Schema a.



Schema b.

Questa figura ha due strane caratteristiche: ha una sola faccia – o lato, come dicono alcuni – e un solo spigolo. Se facciamo scorrere sul nastro una matita colorata scopriremo, dopo essere tornati al punto di partenza, di averne colorato tutta la superficie. E se fate passare un pennarello lungo il bordo (o spigolo) vi convincerete che il nastro ha uno spigolo solo.

Eccovi adesso, se volete verificare il grado della vostra abilità di rappresentazione spaziale, tre problemi topologici. Vi suggerisco di affrontarli rappresentandovi prima mentalmente (perlomeno quelli semplici) e costruendo poi le relative figure con la carta come controprova delle vostre risposte. Se avrete poi ancora dei dubbi, alla fine del capitolo ci sono le soluzioni.

1. Costruite un nastro di Moebius e immaginate di tagliarlo a metà lungo la linea mediana. Che cosa succederà se tagliate a metà la striscia che ne risulta?

2. Costruite un nastro di Moebius e immaginate di tagliarlo lungo il perimetro a un terzo di distanza dallo spigolo (schema A). Il taglio vi farà girare due volte attorno alla striscia prima che ritorniate al punto da cui eravate partiti. Che forma vi troverete ad avere alla fine?

3. Prendete una striscia di carta e tagliatevi quattro fessure piuttosto lunghe, come è indicato nello schema B. Per rendere più facile il gioco scrivete i numeri sulle estremità come è illustrato nello schema. Congiungete e unite con del nastro adesivo l'estremità 3 con la 6. Passate la 2 sotto la 3 e fissatela alla 5. Passate la 1 sotto le estremità 3 e 6 già unite in precedenza. Unite la 4 alla 1, dopo averla fatta ruotare sopra le estremità 3 e 6. Cosa succederà se completate i tagli lungo la striscia?³

3. Dr. Crypton, «Rompicapi della matematica», in *Scienze Digest*, 1982, n. 3, pp. 42-45.

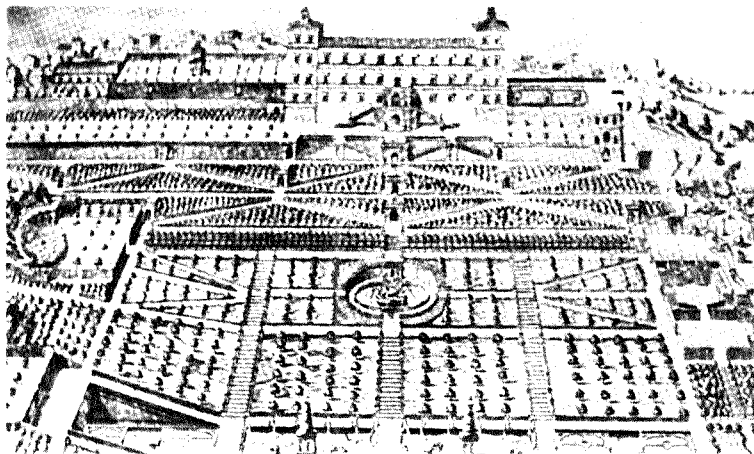


Figura 12.

La topologia vissuta da un punto di vista «non scientifico», cioè non come matematica ma come esperienza mentale di alta astrazione, ha la straordinaria qualità di contribuire ad avvicinare la sensazione dell'esplorazione di uno spazio geometrico a quella dell'esperienza interiore dello «spazio vissuto» della persona.

Al di là dello spazio euclideo, infatti, ogni individuo vive un proprio spazio, che si modifica continuamente in rapporto al proprio sviluppo, alle esperienze e alle emozioni vissute. Il nostro «spazio mentale» è imprevedibile e capriccioso come un nastro di Moebius, si deforma e cambia in tutti i modi possibili, presentando, nonostante questo, forti invarianze e solidi punti di riferimento. Nonostante ciò, nella nostra cultura di uomini occidentali, dominatori della natura, razionali fino all'ossessione, non solo lo spazio studiato a scuola – lo spazio euclideo – ma perfino quello esterno, in cui viviamo fisicamente, è presentato e costruito in forme geometriche fisse e precise. Tale spazio è visto come un'ennesima possibilità d'espressione della nostra abilità analitica, in successioni rigide di elaborate simmetrie, di ossessive ripetizioni di moduli che non lasciano niente alla fantasia, che non ammettono sfumature di lettura.

Un esempio interessante di quello che voglio dire è offerto dall'osservazione delle differenze che passano tra i giardini europei e i giardini giapponesi.

Guardiamo il giardino di Villa d'Este, del XVI secolo (fig. 12). Credo che non servano commenti ulteriori a ciò che la

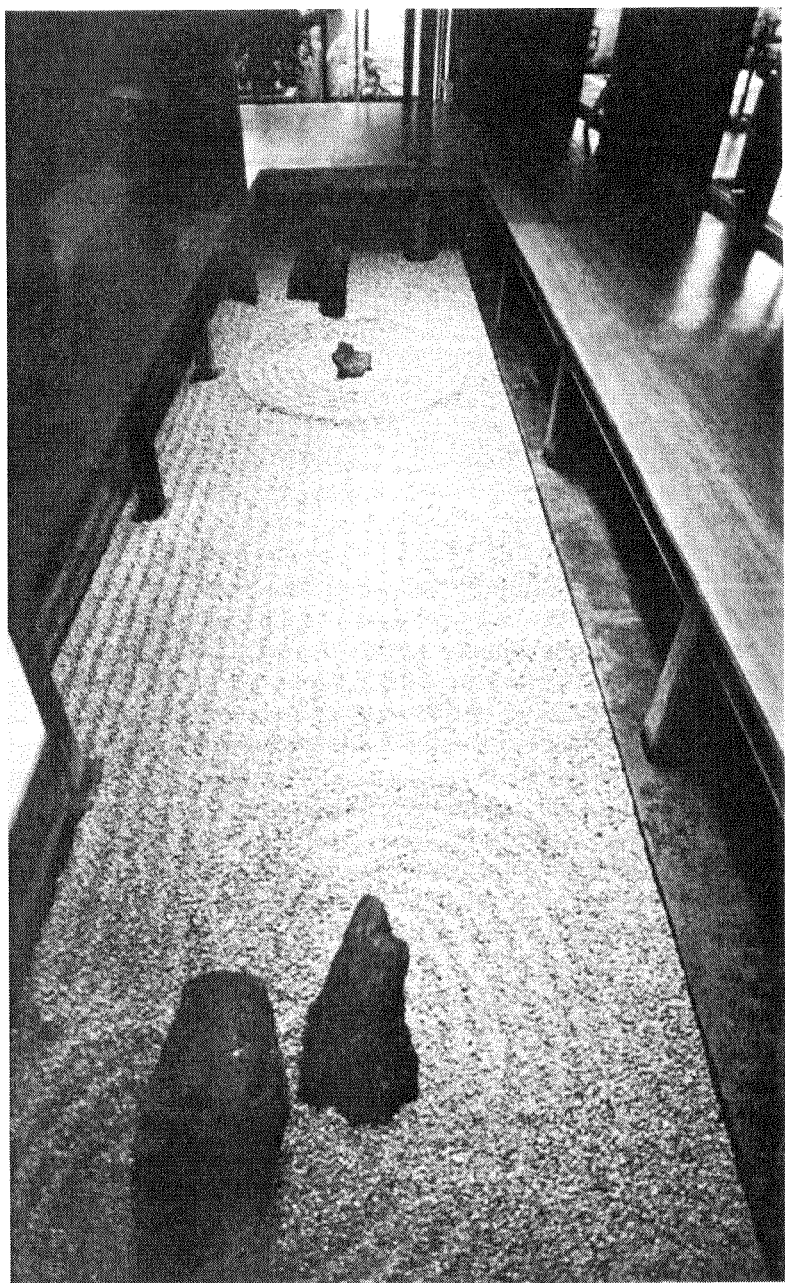


Figura 13.

disposizione stessa delle piante e di tutto ciò che vi si trova dentro già ci sta dicendo.

Questo giardino è un esempio eloquente e molto bello di come una cultura costruita sulle funzioni analitiche intende strutturare l'ambiente e, con esso, tenda a rafforzare la dominanza delle funzioni che privilegia.

È tanto vero questo, cioè che attraverso la forma dell'ambiente si influenza anche il destino di una sensibilità di pensiero, che per i giapponesi, che hanno una netta coscienza di questo fatto, la principale funzione dei loro giardini, in particolare di quelli Zen, non è estetica come per noi occidentali, ma finalizzata a una trasformazione interiore (fig. 13).

Per tutti noi, credo, geometrico è sinonimo di rigoroso, di ineccepibile quanto a esattezza e logicità, di schematico. Il termine contiene in sé i bagliori freddi dell'innaturalità: se dovessimo esaminare dall'alto di una navetta spaziale la superficie di un pianeta sconosciuto per scorgervi la presenza di vita civile, penso verrebbe istintivo cercare sul territorio percorsi in linea retta, spazi strutturati in modo rigoroso o costruzioni geometriche, dato che segni del genere sono quasi del tutto assenti in un ambiente incontaminato.

Eppure, volendo frugare nell'anima della geometria, potremmo scoprirvi nascosto anche un cuore caldo, un cuore vicino alle forme più libere e più naturali...

3. Storia poco seria di tori, gabbiani e stelle marine

Lalla era una ragazzina tonda e buffa, un po' perché aveva sempre la testa fra le nuvole, e non faceva mai le cose come le facevano gli altri, e un po' perché quando combinava qualche pasticcio si metteva le mani sulle orecchie e sognava gabbiani, per non sentire i brontolii e i rimproveri che cominciavano subito a ronzarle attorno.

Amava molto i gabbiani, forse perché arrivavano così in alto nel cielo e stavano tutto il giorno al mare, mentre lei doveva andare a scuola, dove le succedeva di non fare mai le cose giuste. Quando invece stava sulla spiaggia a fare il bagno si sentiva come una persona normale, quasi come un gabbiano, ecco!

Quella mattina era entrata in classe decisa a fare le cose per bene, a tenere la bocca chiusa e a stare molto attenta, attentissima, alla lezione e alle spiegazioni, anche a quelle più noiose.

Si sedette al suo posto e fissò l'insegnante di matematica con

gli occhi spalancati (le sembrava di essere più attenta così) e ascoltò le parole «prendiamo il libro di geom...» e vide la carta geografica che stava appesa dietro le spalle del professore gonfiarsi in un sospiro. Era una carta politica dell'Europa. La guardava gonfiarsi incantandosi sulle figure colorate piene di nomi scritti in neretto.

La Sicilia posata sulla punta dell'Italia le fece venire in mente il rumore metallico delle lattine di cocacola strizzate e prese a pedate dai ragazzini sul marciapiede. Vide lo stivale prendere lo slancio e colpire con forza l'isola che andò a sbattere contro la Sardegna e la Corsica, facendole schizzare via di rimbalzo. Scoppiò in una gran risata. Il professore le fece allora gli occhiacci e lei si mise subito le mani sulle orecchie per non vederli.

Spalancò poi gli occhi e guardò la figura che nel frattempo era stata disegnata sulla lavagna (tav. 1). Diceva intanto il

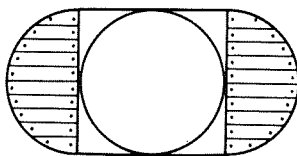


Tavola 1.

professore con aria arcigna (non sarebbe mai potuto essere un gabbiano – neanche un passerotto – pensava lei tutte le volte che lo guardava):

«Risolvete il seguente problema:

Sia dato il quadrato ABCD ed il cerchio in esso inscritto di raggio r . Sui lati AD e BC del quadrato costruire due semicirconferenze di diametro il lato stesso. Trovare l'area della parte di piano tratteggiata in figura».

Lei guardò meglio la figura e vide due persiane semicirculari chiudersi sulla finestra rotonda (tav. 2). Saltò su allora gridando (i

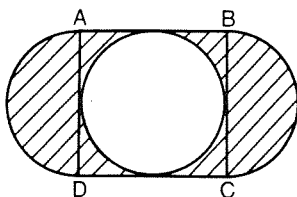


Tavola 2.

gabbiani sanno benissimo che ogni scoperta, come sulle montagne russe, è un salto senza parole, e si porta dietro una sensazione così intensa che bisogna urlarla).

«È quella del quadrato!»

Il professore, arrabbiato perché aveva fatto chiasso e aveva risolto il problema più alla svelta di lui, la guardò con occhi terribili e le chiese, diventando grande grande, quasi come tutta la stanza:

«PERCHÉ?»

Lei, sempre più piccola, sussurrò: «Si vede... chiudendo le due cose... i due così... lì...».

Non le riusciva dire semicerchi, proprio non le veniva la parola!

Il professore guardò gli alunni con un brutto sorriso che voleva dire: «Avete visto che figure, quando si tira ad indovinare?» e contento di essere di nuovo il primo della classe riempì la lavagna di calcoli che dicevano che l'area totale che dovevano trovare era proprio uguale a quella del quadrato.

Lalla era scappata sulla spiaggia e stava con i piedi nudi nell'acqua guardandosi gli alluci e brontolando un po' arrabbiata, perché non era ancora riuscita a mandar giù la storia del problema.

Il gabbiano la vide dall'alto dei suoi giri di ricognizione (quando li chiamava così si sentiva un po' un gabbiano da guerra!) e si tuffò in picchiata per sentire cosa avesse da brontolare una ragazzina così buffa e così tonda. Si posò davanti a lei e le chiese:

«Cosa c'è che non va?»

«La geometria» rispose Lalla con un sospiro.

«Io sono bravo in geometria, bravissimo, il più bravo di tutti i gabbiani di questi scogli e anche di quelli laggiù in fondo, che si vedono appena» disse modestamente il gabbiano passeggiando su e giù e gonfiando le penne come un galletto. «Forse, se la studiamo insieme...».

Lalla fece una capriola dalla felicità, rotolando di qua e di là, fino a quando, con la testa che le girava, si accoccolò davanti a lui spianando con le mani un bel tratto di spiaggia in modo che la sabbia umida servisse loro da lavagna, e aspettò che le dicesse cosa fare.

«Cominciamo dall'inizio» suggerì il gabbiano.

«Giusto!» disse Lalla incantata.

Prese il suo libro di geometria e lo aprì alla prima pagina.

«Dunque: – lesse – cominciamo a esaminare alcune proprie-

tà fondamentali delle figure più elementari... il triangolo, il quadrato... – guardò il gabbiano – Vuoi dirle tu?»

«Uhm, uhm – fece il gabbiano schiarendosi la voce – Ecco: il triangolo e il quadrato sono due figure uguali».

A Lalla si spalancò la bocca dalla sorpresa. «Come? – strillò – Ma come?... Sono uguali?»

«Certo – il gabbiano pensava di averla sbalordita con quella esibizione di sapienza – ...e il rettangolo, il rombo, il cerchio...».

Ormai non si teneva più, e tracciava esaltato col becco fonde linee sulla sabbia.

«Ma non è vero» si affannava intanto Lalla disperata saltandogli d'intorno. «Non è vero!»

Il gabbiano si fermò a metà di un pentagono e le chiese, leggermente perplesso: «Perché?»

Lei pensò subito al suo professore, ma questo era un perché diverso, voleva dire solo «perché?» non «PERCHÉ?»

Nonostante volesse dirglielo, non si fidava delle proprie risposte, aveva paura di fare una figuraccia e di perdere così la sua compagnia, e allora sfogliò svelta qualche pagina del libro di geometria e glielo mise sotto il naso.

«Ecco perché, leggi qui!»

Il gabbiano arrossì fino alla radice delle penne e, stando ritto su una zampa sola, si mise a tracciare semicerchi con l'altra, mandandola avanti e indietro.

«Non so leggere» disse alla fine mangiandosi metà delle parole. «Ma... – aggiunse rinfrancato vedendo qualche illustrazione – ...le figure le leggo, sì, perbacco! Quelle le leggo!»

«Bella forza!» pensò Lalla. Ma non lo disse, perché le sembrava di mancare un po' di rispetto.

Disse invece:

«Dimmelo tu, allora, perché sono uguali».

Il gabbiano, contento che non si parlasse più di lettura, riprese la sua aria leggermente dotta e saltellò da una figura all'altra.

«Perché son tutte chiuse, ecco perché», guardandola come per dire: «Ovvio, no?»

«E gli angoli? I lati? e la misura dell'area... i perimetri...».

Lalla era sempre più sconcertata. Poi però, decisa a non farsi confondere, neanche se si trattava di un gabbiano, disse battagliera:

«Solo i quadrati sono uguali a un quadrato!»

Il gabbiano la guardò storcendo un po' il becco, e poi, con aria decisamente superiore, le chiese di aiutarlo un momento.

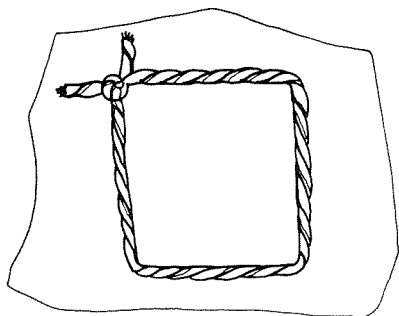


Tavola 3.

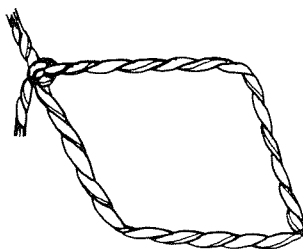


Tavola 4.

Con un pezzo di spago annodato alle estremità fece un quadrato che appoggiò su un pezzo di carta (tav. 3).

«Lo vedi questo quadrato?»

«Sicuro!» disse Lalla incuriosita.

«Adesso guarda». E spinse il foglio con sopra lo spago fin dentro l'acqua, dove si mise a galleggiare sulle onde, spinto da tutte le parti dal movimento del mare. Lo spago si stava muovendo, e si era messo così (tav. 4) e poi così (tav. 5).

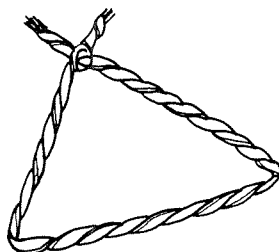


Tavola 5.

Lalla sgranava gli occhi, cominciando a capire.

«Ora so perché dicevi tutte quelle cose strane!»

Il gabbiano non aveva ancora capito nulla, invece, ma annuiva solenne come se fosse tutto chiaro anche per lui.

«Sono due geometrie diverse! Noi viviamo sulla terraferma, che è rigida, e le figure, una volta tracciate, non cambiano forma...».

Stavolta c'era arrivato anche il gabbiano, che la interruppe svelto:

«È vero. Noi gabbiani invece voliamo tutto il giorno sulla

superficie dell'acqua a guardare le figure formate dalla schiuma delle onde o dalle cose che galleggiano, e per noi non hanno importanza i lati, gli angoli, perché si deformano continuamente.

Noi cerchiamo le proprietà primitive delle figure, quelle che non cambiano mai, anche se le superfici su cui sono disegnate vengono deformate in tutti i modi e in tutte le direzioni possibili, senza essere però strappate. In questo modo possiamo occuparci anche delle forme molto complesse, come quelle dei granchi, dei cavallucci di mare, dei tuoi piedi...».

Lalla buttò per aria i suoi libri, sparpagliandoli da tutte le parti, gridando:

«Insegnami la tua geometria, ti prego, TI PREGO!... Insegnami la geometria dove i quadrati sono uguali ai cerchi e i piedi alle mani!»

«Eh no, ragazzina» disse il gabbiano bloccandola. «La mano non è davvero uguale al piede».

Le fece appoggiare sulla sabbia una mano e un piede e ne disegnò il contorno con il becco (tav. 6).

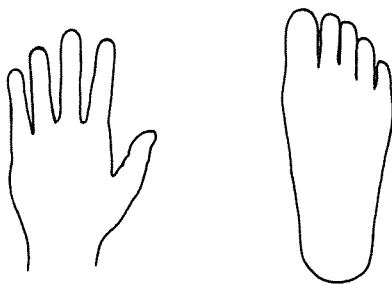


Tavola 6.

«Vedi – disse saltando dentro il piede – io ora sto dentro, e tu stai fuori. Mentre se faccio così: – e si mise sul palmo della mano – io e te non siamo né fuori né dentro, perché il contorno della mano non divide il piano in due parti. Tutte le figure che lo dividono in due parti connesse, cioè costituite da un solo pezzo, si chiamano chiuse, mentre quelle che non lo fanno si chiamano aperte».

Il pescatore che stava seduto su quegli scogli laggiù, al limite della spiaggia, stava guardando la ragazzina un po' tonda – ma com'era buffa quella ragazzina! – che aveva smesso di fare

capriole e seguiva assorta, con la faccia appoggiata alle braccia incrociate, un gabbiano che le saltellava davanti, andando su e giù, e da una parte e dall'altra, e di nuovo su e giù.

«Strani quei due – e scosse la testa voltando gli occhi verso la lenza immobile – sembrava quasi che stessero facendo un discorso importante...».

Le ombre erano diventate lunghe lunghe e il gabbiano guardò preoccupato l'ultimo pezzettino di sole che spariva di fronte a loro.

Lalla capì al volo e disse precipitosamente:

«Ancora un po', solo un pochino!»

«Ti farò vedere un'ultima cosa, ma è l'ultima davvero per oggi».

Disegnò sulla sabbia una curva chiusa (tav. 7) e le chiese di segnare con una croce i punti esterni alla curva e con un pallino quelli interni.

«Ma è troppo facile» protestò Lalla ed eseguì alla svelta il lavoro (tav. 8).

I disegni si moltiplicavano (tav. 9). Invadevano tutta la spiaggia (tav. 10) e diventavano sempre più complicati (tav. 11).

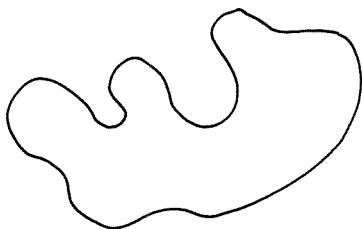


Tavola 7.

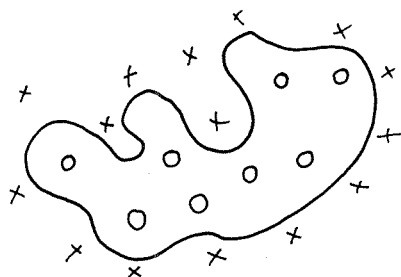


Tavola 8.

Tavola 9.

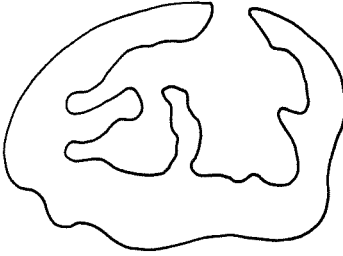


Tavola 10.

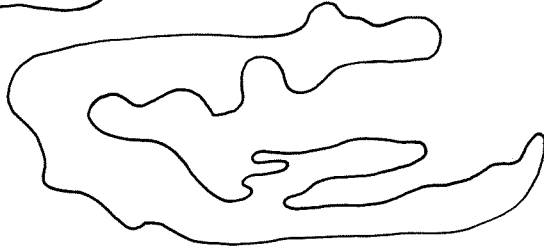


Tavola 11.

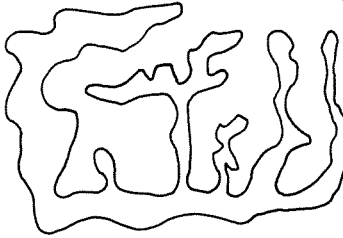
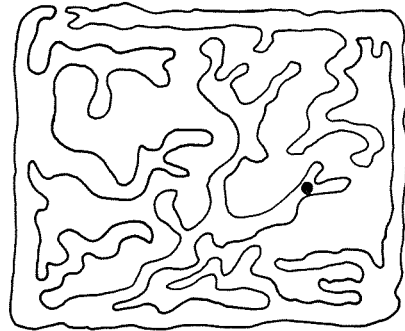


Tavola 12.



Fino a quando, nell'ultimo, il gabbiano segnò anche un punto e le chiese:

«Questo com'è, interno o esterno?» (tav. 12).

Così a occhio non ce la faceva a rispondere, avrebbe dovuto cominciare con i punti esterni... Capì che il gabbiano le stava proponendo un problema: come individuare subito la natura del punto, senza dover tracciare tutti quelli esterni e tutti quelli interni.

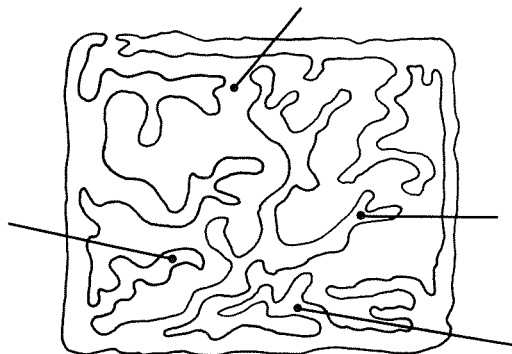


Tavola 13.

Ci pensò su un po' (pochino, a dir la verità) e poi alzò gli occhi sul gabbiano dicendo:

«Eh?»

«C'è un metodo semplice che ci permette di dire se un punto è interno o esterno: bisogna disegnare una linea che parta da quel punto e vada decisamente fuori, poi si conta quante volte la linea ha incontrato il bordo della curva. Se l'ha incontrata un numero dispari di volte, allora è interno, se il numero è pari, il punto è esterno»⁴.

Lalla ci credeva, si fidava davvero del gabbiano, ma voleva anche capire come funzionava quella storia dei numeri... che c'entravano i pari e i dispari?

Così, disegnata la linea, cominciò a contare, e contava, e ricontava, scegliendo ogni volta un punto diverso, finché si accorse di questo fatto: ogni volta che incontrava la curva muovendosi dall'esterno, entrava dentro, e la seconda usciva fuori, e la terza tornava dentro...

Insomma, ogni volta che attraversava la curva, cambiava la sua posizione: se prima era dentro dopo era fuori, e viceversa (tav. 13).

«È vero, è vero» e presa dal solito entusiasmo afferrò una stella di mare che seccava al sole e ci disegnò sopra una linea chiusa.

«È vero anche su una stella marina! Ci sono i punti interni – disegnando furiosamente – e quelli esterni».

4. Vedi F. Ghione, *Tau Topologo*, Roma, La città del sole, 1985.

«Sicuro. È vero sulla sfera e su tutte le superfici omeomorfe alla sfera...».

«Omeoche?»

Il gabbiano, che aveva usato quel parolone apposta per impressionarla, spiegò con fare indifferente che quando due figure si possono deformare l'una nell'altra con continuità, cioè senza strappi, allora si dicono omeomorfe.

«...ma non è vero sul toro».

Lalla cascò a sedere per terra guardandosi intorno spaventata, ma non riuscì a vedere altro che il suo salvagente buttato da una parte per terra.

«È questo il toro! – rise il gabbiano indicando il salvagente – in topologia il toro è una superficie chiusa che ha la forma di una ciambella. Ti stavo dicendo che sul toro non è vero che ogni linea chiusa divide la superficie in punti interni e punti esterni».

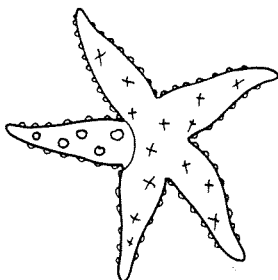


Tavola 14.

«Che razza di sciocchezze! che c'entrano i topi con i tori e i gabbiani?» pensò Lalla che aveva appena finito di riempire di pallini un braccio della stella di mare (tav. 14) e afferrò il salvagente cominciando a tracciarci sopra delle linee (tav. 15).

«Ma sì che è vero!» e disegnava... (tav. 16) e disegnava... (tav. 17) fino a quando, per caso, le successe di tracciare la linea così (tav. 18).

Annui allora, zitta, sorridendo e guardando volar via il gabbiano che, mentre si allontanava, si voltò indietro una volta per strizzare un occhio.

Il pescatore avvolgeva la lenza con gesti lenti osservando la ragazzina buffa agitare la mano nel saluto, e si chiedeva come mai,

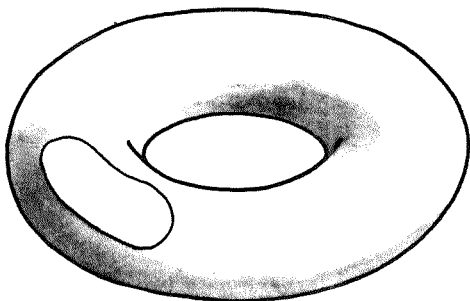


Tavola 15.

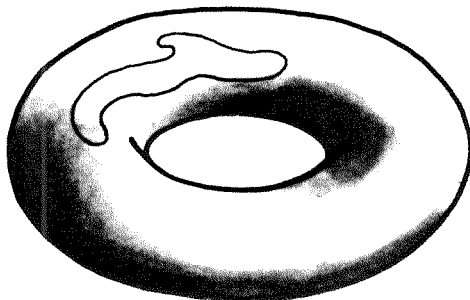


Tavola 16.

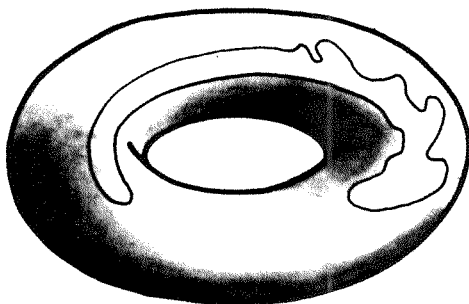


Tavola 17.

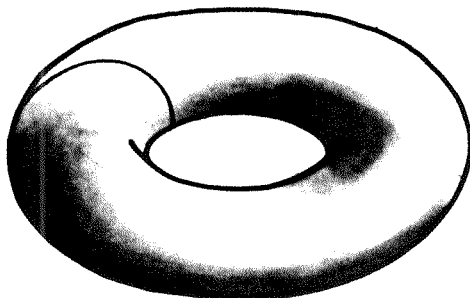


Tavola 18.

nell'andare via, scuotesse la testa guardando con aria divertita la sua ciambella.

Continuò a domandarselo anche mentre scendeva dagli scogli col paniere dei pesci e la canna sotto il braccio, ma si sa – concluse montando in bicicletta – dalle ragazzine buffe in quel modo ci si può aspettare di tutto, proprio di tutto!

Risposte ai problemi di topologia

1. Il risultato sono due corpi intrecciati ciascuno dei quali ha quattro mezzi giri.
2. Il risultato sono due strisce intrecciate: un cappio e un nastro di Moebius.
3. Il risultato sono tre anelli collegati a catena.