

Pensiero simulativo e geometria dinamica

Laura Catastini

Sunto. Il pensiero, anche nelle sue espressioni più astratte, opera in maniera produttiva se riesce a rappresentare correttamente gli oggetti mentali mediante attività simulative. Tali attività sono molto ricche e spesso automatiche nel pensiero di oggetti conosciuti per immersione nella vita reale, cioè mediante esperienze concrete, ma possono diventare difficili se applicate su oggetti astratti.

In questo lavoro si propongono definizioni che mirano a superare la consueta dicotomia tra “astratto” e “concreto” e si intende mostrare come la geometria dinamica possa in certi casi agire da facilitatore nella genesi e nella concretizzazione di astratti concetti matematici sconosciuti, nel caso particolare opportunamente proposta durante l’uso di uno strumento matematico, il prospettimetro.

Laura Catastini

Dipartimento di Matematica, Università di Roma “Tor Vergata”, I.S.A. “Russoli” di Pisa.
e-mail: catastin@mat.uniroma2.it

1. Il pensiero simulativo

Il senso del movimento è un sesto senso in grado di anticipare ciò che sta per accadere nella realtà dello spazio circostante. Il nostro cervello, già nella fase percettiva, non è visto come un calcolatore che si adatta computando al mondo esterno, ma piuttosto come un simulatore – nel senso di “simulatore di volo” ad esempio – i cui sensi insieme sono capaci di escogitare ipotesi, creare modelli e inventare soluzioni che proietta sul mondo, perché si trova in un corpo che interagisce, muovendosi, in accordo con un mondo che si muove.

Quando noi percepiamo un oggetto, per esempio una poltrona, pensiamo di non compiere in quel momento nessuna azione, per il solo fatto che percependolo restiamo in piedi, immobili. Tuttavia abbiamo già dentro di noi l'atto caratteristico della poltrona, quello che abbiamo chiamato uno schema percettivo e che in questo caso è l'atto di sedersi in un dato modo su questa poltrona (Berthoz, 1998).

Le facoltà cognitive più raffinate si sono sviluppate grazie alla possibilità di movimento dell'organismo, secondo criteri evolutivi che hanno premiato processi percettivi dinamici e anticipatori, capaci di adattare il comportamento a un ambiente altrettanto dinamico. Le specie naturalmente selezionate sono quelle che hanno saputo migliorare di qualche millesimo di secondo la cattura della preda e anticipare le mosse dei predatori, quelle nelle quali la memorizzazione del gran numero di informazioni acquisite nell'esperienza concorre attraverso canali veloci alla costruzione dell'azione futura. Per sopravvivere l'animale ha spesso una sola chance, che impegna muscoli e massa corporea in movimento. Per raggiungere e afferrare una preda che si muove a trentasei chilometri l'ora, dieci metri ogni secondo, è necessario anticipare la sua posizione in meno di cento millesimi di secondo e dirigersi là dove essa sarà un istante dopo. Bisogna inoltre che il corpo anticipi i movimenti di cattura, prepari i muscoli a compensare il peso della preda e a vincerne la resistenza. Questa continua attività del pensiero che ne dinamizza le rappresentazioni, non si limita a fare loro da base iniziale dei pensieri, ma li accompagna nei loro sviluppi. Pensate ad esempio a quando si deve sollevare un oggetto di peso non trascurabile sospeso a un elastico, si farà un movimento molto diverso dal solito perché si anticiperanno le proprietà elastiche del sistema.

«La percezione non è una rappresentazione: è un'azione simulata e proiettata sul mondo» dice Berthoz (1998) nel presentarci l'idea cardine di un suo lavoro. Lo studio delle funzioni cognitive centrato solo sul linguaggio e il ragionamento trascura tutti questi fondamentali aspetti di base, portando implicitamente a

pensare a uno scollamento concettuale tra vari tipi di ragionamento, come se il pensiero speculativo raggiungesse la sua massima espressione liberandosi del corpo e dei suoi “ragionamenti percettivi”, che ne sono invece la base irrinunciabile.

La percezione dunque non si risolve in una rappresentazione statica ma è condizionata dall’azione, è una sua simulazione interna, è giudizio, scelta, è anticipazione delle conseguenze dell’azione. Percepire un oggetto è immaginare le azioni implicate dal suo uso, ed è anche astrarre, selezionare tratti particolari e ignorarne altri.

Supponiamo per esempio di voler prendere una tazza da un tavolo pieno di altre stoviglie ma che, mentre stiamo per afferrarla, siamo distratti e prendiamo al suo posto un boccale. L’esperienza comune ci dice che individuiamo immediatamente l’errore, che ce ne accorgiamo prima ancora di guardare. Su quali basi fisiologiche è possibile riconoscere l’errore e correggerlo? Questo è possibile se esiste, già prima che il movimento inizi, una configurazione neurale di “aspettative” con la quale l’azione viene confrontata e corretta nel caso che se ne discosti in maniera significativa. Localizzare un oggetto vuol dire rappresentarsi i movimenti da fare per raggiungerlo, e non si tratta di rappresentarsi i movimenti stessi nello spazio, ma solo le sensazioni muscolari che accompagnano questi movimenti.

2. Simulazione, finalità e autostima

Possiamo dunque concepire il cervello come un simulatore biologico che già nella fase percettiva predice attingendo dalla memoria e formulando delle ipotesi. Presentando questa immagine e chiedendo cosa vi si vede,



Figura 1

la risposta standard è “un uomo che *scarica* il carrello della spesa”. Appare evidente che la percezione si è risolta in una interpretazione dinamica della

situazione e delle *finalità* dell'azione, che è simulata all'interno di un quadro conosciuto: la presenza della parte posteriore di una macchina e l'esperienza di vita permettono di pensare a un'azione di "scaricamento" del carrello piuttosto che a una di "caricamento".

Non è possibile confinare la percezione a quanto gli occhi registrano della realtà esterna, l'influenza della memoria sulla percezione è già fortissima. Per capire che vuol dire simulare e quanto sia automatico basta *guardare* questa immagine

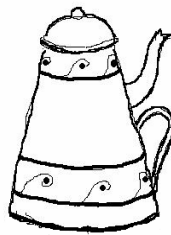


Figura 2. Copia della "Caffettiera per masochisti", di Jacques Carelman, citato in D.A. Norman, 1990.

Simulare efficacemente è essenziale per la salute psichica. Quando siamo messi in condizione di non poterlo fare assale un vago senso di claustrofobia e di ansia, che diventa disagio se non possiamo in qualche maniera uscire dalla situazione. Siamo evolutivamente costruiti per dominare l'ambiente attraverso continue previsioni e loro aggiustamenti. La mente umana, nelle cose che incontra, è sempre alla ricerca di un senso compiuto, un minimo di appiglio e parte con interpretazioni, simulazioni, spiegazioni. Quando questo non riesce diventa un tormento. Poco importa se le previsioni sono ingenue, primitive, guidate da superstizioni o da principi scientifici, quel che conta è che siano condivise, che alimentino la convinzione di essere in qualche modo efficaci nell'interazione produttiva con il mondo e contribuiscano alla costruzione di una positiva percezione di sé rispetto al gruppo sociale che ci chiede determinate capacità, altrimenti ci si sente in colpa. Questo fenomeno negativo prende il nome di "impotenza appresa". Il termine si riferisce a quella situazione nella quale una persona fallisce ripetutamente nell'esecuzione di un compito. Spesso smette di tentare, è sommersa da un senso di impotenza e di incapacità e decide che il compito, per quel che lo riguarda, non può essere eseguito.

Donald Norman (1990) suggerisce che esistono anche casi di "impotenza insegnata" e tra i suoi esempi, insieme al design di oggetti tecnologici, c'è, guarda un po', anche la matematica:

Le fobie della tecnologia e della matematica nascono da una sorta di impotenza appresa? Non potrebbero pochi casi di insuccesso in quelle che sembrano situazioni chiare e semplici generalizzarsi a qualunque oggetto tecnologico, a qualunque problema matematico? Forse. In effetti, il design degli oggetti quotidiani (e l'impostazione dei corsi di matematica) sembra quasi garantire questo risultato. Potremmo chiamare questo fenomeno *impotenza insegnata*.

Oggetti mal progettati – costruiti in modo da indurre a fraintendimenti – modelli mentali mal formati, scarse informazioni in merito e difficoltà di avere spiegazioni più chiare, mettono in difficoltà l'utente nell'utilizzare gli oggetti. Comincia il circolo vizioso: se non riesci a fare una cosa, pensi che sia colpa tua. Quindi pensi di non essere capace di eseguire quel compito. In conseguenza la prossima volta credi di non poterlo fare e quindi non ci provi nemmeno. Il risultato è che non lo sai fare, proprio come pensavi. Sei intrappolato in una profezia auto realizzante.

Norman, dopo aver agitato il fantasma della matematica ed aver osservato che contenuti di un normale corso di matematica sono insegnati in modo tale che qualunque difficoltà a un dato stadio impedisce di andare avanti, nel seguito del suo libro si occupa della sola progettazione degli oggetti di uso più o meno comune e invita i progettisti a mettere molta attenzione al design, che contribuisce a creare nell'utente i modelli mentali giusti per l'interpretazione delle funzioni delle varie parti dell'oggetto e ne facilita quindi l'uso. Mai mettere delle maniglie a una porta se per aprirla bisogna premere un bottone a lato della parete.

Gli enti matematici, come le porte, hanno bisogno di una progettazione accurata nel momento in cui sono presentati ai principianti. Hanno bisogno di presentazioni che indirizzino a un certo uso, che permettano al pensiero di simulare, prevedere, anticipare mosse, tornare indietro e riprovare in altre direzioni. E che non mutino nel proseguire la disciplina ma piuttosto si integrino con le nuove simulazioni.

Niente di più penoso che vedere un adolescente rigirare nella mente un oggetto matematico senza sapere dov'è la maniglia e senza sapere da che parte spingere per uscire da un paradosso o da un vicolo cieco, rimanendo intrappolato in una elegante costruzione infernale.

3. Simulazione e astrazione

La nostra cultura, nella parte nella quale, per fortuna, incidono ancora molto le attività simbolico-ricostruttive, addestra a ricostruire correttamente con l'immaginazione scene nelle quali le relazioni tra gli oggetti non sono vissute concretamente ma vengono appunto date attraverso astrazioni o descrizioni simboliche quali i linguaggi. Ogni società ha le proprie specifiche forme culturali nelle quali l'immaginazione si addestra decodificando simboli, si educa, indirizza l'animo e il comportamento, raggiunge obiettivi impraticabili a chi non ne partecipa. Non è cosa banale, un tale esercizio diventa stile cognitivo, un'abilità in più costruita su pratiche corporee ma anche su *segni simbolici condivisi*, come *sentire* internamente l'armonia di un brano musicale sconosciuto solo leggendo uno spartito, senza muovere i tasti di un pianoforte. Scriveva Beethoven:

Ecrire sans piano est nécessaire...Peu à peu naît la faculté de se représenter ce que nous désirons et sentons, qui est un besoin si essentiel aux nobles êtres". (Rolland, 1923)

Anche figurarsi una curva in un ambiente cartesiano leggendo in maniera esperta una frase algebrica rientra in queste pratiche complesse e culturalmente nobili, che, a mio avviso, una scuola moderna non dovrebbe negare a nessuno.

In questi ultimi anni l'insegnamento della matematica, che è indubbiamente una disciplina astratta, è stato oggetto di un dibattito, legato in Italia a quello istituzionale sulla riforma della scuola e centrato su una metodologia di tipo laboratoriale, che favorisce un apprendimento "percettivo-motorio" piuttosto che uno "simbolico-ricostruttivo". I pedagogisti propongono, gli accademici discutono e gli insegnanti, sepolti da parole chiave che assomigliano sempre di più a jingles amichevoli, si muovono secondo la loro natura caratteriale. I pessimisti cercano di intuire di che morte dovranno morire, gli ottimisti di infiammano di entusiasmi e di belle speranze. I termini che accompagnano l'avventura, "percettivo-motorio" e "simbolico-ricostruttivo", sono, in effetti, abbastanza evocativi e le loro accezioni trovano suggestioni non in difficili testi tecnici – la materia, tra neuroscienze e cognizione è complessa e delicata – ma nella natura dei progetti ministeriali che li citano e in agili libretti scritti all'occasione. Tutta la questione viene, come sempre, didatticamente ridotta nei corridoi delle nostre scuole nel modo seguente: "non più calare dall'alto i concetti matematici, bisogna partire da situazioni concrete e da lì far sorgere le idee astratte".

Il "concreto" e l'"astratto" sono concetti che tutti usiamo, concetti usuali, praticati, ma dal significato che forse in certi ambiti diventa ambiguo e incerto.

Nel suo senso letterale il termine astrazione è negativo, "abstrahere" significa tirar fuori da qualche luogo, estrarre. Il senso di rimozione che ne deriva permane nel significato comune per cui l'astrazione è psicologicamente un processo che abbandona totalmente i dati sensoriali iniziali. Ma

... travante è chiamare concreto quanto è fisico e astratto quanto è mentale.... Un tavolo è concreto, ma si suppone che la libertà sia astratta. Il mio amico è concreto ma l'amicizia non lo è. Questa distinzione apparentemente semplice comporta, anzitutto, un pasticcio ontologico perché tavolo può essere o un oggetto materiale o un oggetto percepito, ricordato o pensato. (Arnheim, 1974)

Di pasticci ontologici se ne devono affrontare molti. Quel "nulla" nel quale Aristotele immerge il mondo è un ente astratto o concreto? Se è astratto come può intervenire attivamente in una questione fisica? Se è concreto come può esser nulla?

A proposito di enti e dei pasticci ontologici, consideriamo la frase: "L'aereo, persa la rotta, precipitò dal cielo in un burrone, esattamente sull'equatore". Cos'è concreto tra quanto è menzionato in questa frase? L'aereo si dirà. il mare....la

rotta è concreta?...il burrone?... L'incertezza si insinua, eppure non si richiedono sottili distinzioni filosofiche, solo una risposta di semplice senso comune, quindi dovrebbe essere facile, ma chi se la sente di giurare che la rotta non è un fatto concreto e il burrone è un'astrazione? E l'equatore, che dire dell'equatore?

Il vocabolario può aiutare. Ci dice che, correntemente, concreta è ogni cosa che può essere percepita dai sensi. Il mare è concreto. Il burrone non lo posso calpestare, né afferrare, ma *nel burrone* posso cadere. In qualche modo però intuiamo che il burrone non esiste. Esistono le sue sponde. Il burrone acquista un carattere ontologico ibrido, né solo fisico né solo psichico, un po' l'uno e un po' l'altro, un po' concreto e un po' astratto.

Il cielo lo lascio a voi, ma pensate quanta potenza concretizzante sta nelle parole!

Arnheim ribadisce la difficoltà di definire l'astratto come assoluto:

L'amicizia è concreta come qualsiasi amico particolare. Dio e la nozione di Dio sono altrettanto concreti quanto il concetto di edera velenosa o qualsiasi campione di tale pianta. Ma qualsiasi oggetto, evento o idea diventa un universale quando è trattato come rappresentante di una popolazione di eventi. Diventa un'astrazione quando viene trattato come distillato derivato da qualche entità o specie di entità più complessa.

Sotto nessun aspetto i termini «concreto» e «astratto» possono servire a ripartire in due contenitori distinti i fatti dell'esperienza. Non sono antinomici né si riferiscono a popolazioni mutuamente esclusive. La concretezza è una proprietà di tutte le cose, fisiche o mentali, e molte tra tali cose medesime possono pure servire come astrazioni

Davanti alla contrapposizione concreto-astratto mi sono ritrovata allora con questi termini piuttosto inquinati, per cui ho provato a dare nuove accezioni (definizioni?) di *concreto* e di *astratto*, che corrispondano alla mia esperienza di docente di matematica e ai movimenti del pensiero miei e dei miei alunni (Catastini, 2009). Movimenti che, negli anni, hanno svuotato questi termini del loro statico contenuto categorico e me li hanno trasformati in essenze dinamiche. Per fare ciò ho costruito qualche definizione. Dirò che:

– *Un ente mentale, o un insieme di enti mentali, è **simulabile** se permette inferenze con carattere predittivo.*

– *Chiamiamo **alone inferenziale**, l'insieme delle inferenze, consce o inconsce, rese possibili dal grado di simulabilità di un ente mentale o di un insieme di enti mentali.*

Il grado di simulabilità degli enti mentali può essere molto variabile. È alto quando, ad esempio, il contenuto concettuale e immaginativo legato ad esperienze multisensoriali si crea "*per immersione*", cioè in momenti nei quali sono

contestualmente presenti alla percezione i movimenti, gli oggetti reali e le parole che vi si riferiscono. Attorno agli enti mentali si forma in questo caso un ricco alone inferenziale. La foto della persona col carrello presentata in Figura 1 ne è un esempio: in questo caso concreto l'alone delle inferenze predittive individuano finalità e significati di un'azione colta in un solo fotogramma.

Eccone un altro esempio: supponiamo che a una persona venga fatto vedere un piccolo cartoncino con qualcosa stampato sopra e le venga detto che è un biglietto di metropolitana, fornendone una definizione adeguata. In mancanza di qualsiasi esperienza diretta, il concetto "biglietto di metropolitana" si identificherà quasi totalmente con la definizione e la persona non sarà capace di inferire il vasto insieme dei comportamenti e dei significati correlati alla definizione stessa. Per lei il biglietto resterebbe un concetto poco simulabile, con un limitato alone inferenziale. Per contro l'abitante di una grande città che abbia acquisito per pratica diretta lo stesso concetto, ne avrebbe un alto grado di simulabilità.

In definitiva, diremo che, data una mente e una situazione concettuale, quanto maggiore è il grado predittivo che può raggiungere il pensiero, tanto più alto è il grado di simulabilità della situazione in oggetto. Intendo così collegare il grado di simulabilità di un ente alla sua *concretezza o astrazione*:

– *Un ente mentale è “tanto più concreto” quanto più è simulabile. Per converso, sarà “tanto più astratto” quanto meno è simulabile.*

Come si vede la definizione non stabilisce categorie contrapposte e l'astratto e il concreto sono le due facce della posizione di un indicatore su una unica scala di valori che misurano il grado della *simulabilità* di un ente mentale, che può variare da mente a mente.

Così il biglietto di metropolitana di cui parlavamo prima può risultare concreto per un soggetto e rimanere astratto per l'altro. Ancora: se una persona di media cultura legge "i fantini frustavano i cavalli fumanti nella pista gelida" in genere "vede" (cioè esplicita in una immagine o modello mentale le prime inferenze immediate) i fantini con la frusta non in bocca ma in mano, non in piedi sulla pista ma seduti su cavalli che stanno correndo. Se può inferire tutte queste cose ed altre, in momenti successivi, anche se non sono esplicitate nella frase, allora per la persona l'evento mentale ha un certo grado di concretezza.

Se invece si legge "il triangolo ABC ha i lati che misurano rispettivamente 3, 4, 5" solo i matematici di solito "vedono" che il triangolo è rettangolo, gli altri no, anche se conoscono il teorema di Pitagora. Possiamo dire allora che il triangolo è affare concreto per i matematici, mentre per qualunque altro mortale resta ampiamente astratto. Per chi ne fa un mestiere o la usa con competenza, la matematica diventa un dominio concreto come il banco di lavoro per un artigiano,

ma per chi non la pratica a sufficienza e nel modo giusto questa materia resta spaventosamente, irrimediabilmente astratta. Gli studenti, e non solo i meno vivaci, di solito si paralizzano mentalmente davanti a un problema di matematica. Smettono di pensare. Non per indolenza ma per la povertà degli aloni inferenziali che gli oggetti matematici si portano dietro.

4. Strumenti e macchine matematiche

La prof.ssa M. G. Bartolini Bussi ha presentato, nel suo seminario, *Macchine matematiche reali e virtuali: Cabri come ambiente di modellizzazione*, il caso in cui si chiede allo studente di fare pratica su una macchina concreta e, in seguito, di produrre un modello virtuale che funzioni come l'artefatto, effettuando così la modellizzazione di un ambiente matematico già noto. La macchina matematica, in ambito geometrico, è un artefatto con uno scopo fondamentale: obbligare un punto o un segmento, o una figura qualsiasi, a muoversi nello spazio a subire trasformazioni seguendo con esattezza una legge matematicamente determinata.

La macchina matematica si può vedere come caso particolare di "strumento matematico" definendo quest'ultimo, in senso lato, come un qualunque artefatto che aiuti a conseguire un risultato utile nell'ambito della attività matematica. Tra gli strumenti matematici possiamo considerare la geometria dinamica, come macchina matematica virtuale.

La prof.ssa Bartolini Bussi evidenzia poi come esistano casi, come quello delle macchine per la prospettiva, in cui l'attività con la macchina suggerisce la genesi di una teoria – la geometria proiettiva – e non la modellizzazione di un ambiente matematico già noto.

In questo mio lavoro intendo proporre un esempio di questa attività: l'uso di strumenti, tra cui i file di geometria dinamica, in un laboratorio di matematica nel quale si affronta proprio la genesi della geometria proiettiva e la concettualizzazione del punto all'infinito. Questo laboratorio, "Geometria della visione", è stato da me tenuto la prima volta nel 2005-2006 come responsabile scientifico per l'Università di Tor Vergata, nell'ambito del Progetto Nazionale Lauree Scientifiche e riproposto negli anni successivi. Le lezioni complete del laboratorio si trovano in rete all'indirizzo <http://www.mat.uniroma2.it/pls/varrone/varrone.html> (Catastini, 2006).

Un concreto strumento matematico – ma non macchina matematica – usato in questa occasione è stato il prospettimetro, col quale abbiamo lavorato sui concetti geometrici della visione diretta e della prospettiva, che portano in maniera armonica alla geometria proiettiva.

Il prospettimetro è uno strumento in legno e plexiglas, da me ideato, formato da tre piani: uno fisso in legno (*piano di terra* su cui possono essere disposti dei fogli per scrittura) e due in plexiglas rimovibili: il *piano dell'orizzonte* parallelo al piano di terra e il *piano di profondità* ad essi perpendicolare.

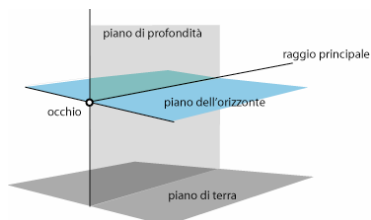


Figura 3



Figura 4

Figura3: gli elementi caratterizzanti il prospettimetro. Figura 4: Prospettimetro e supporto verticale al quale è stato fissato un filo che coglie il punto A nello spazio e che simula il raggio visivo uscente dall'occhio posto nella posizione del chiodo al quale è legato il capo fisso del filo.

Un chiodo al quale sono fissati alcuni grossi fili colorati simula il punto di vista e i fili i raggi visivi. Lo strumento è corredato da supporto verticale, in plexiglas, in modo da fornire un appoggio a cui, all'occorrenza, fissare i fili che collegano punti dello spazio che non stanno sul piano di terra o sul piano dell'orizzonte. Il supporto verticale è rimovibile e posizionabile a piacere.

Il nome che ho scelto per lo strumento, "prospettimetro", deriva dalla possibilità di effettuare misurazioni nell'ambito della "perspectiva naturalis", come veniva chiamata la visione diretta fino al quattrocento, epoca nella quale viene messa a punto la "perspectiva lineare", tecnica di rappresentazione pittorica il cui strumento principe sarà il prospettografo.

Il prospettimetro non è una macchina matematica nella quale leggi matematiche conosciute muovono le parti, ma uno strumento col quale *indagare* le leggi matematiche che, dato un insieme di punti, permettono di prevedere correttamente il loro "apparire". Il prospettimetro è un visualizzatore di forme e di misure, e quindi di concetti. C'è in gioco una trasformazione e lo strumento serve a concretizzarla.

Il suo uso permette una simulazione dinamica nello spazio che educa e potenzia scientificamente il pensiero immaginativo, nel senso che fornisce ricche descrizioni multisensoriali di oggetti matematici e le tante relazioni concrete tra essi, contribuendo a creare adeguati aloni inferenziali. L'educazione scientifica del pensiero immaginativo consiste nella continua verifica della corrispondenza rigorosa tra modelli e relative simulazioni che si costruiscono con il pensiero e le relazioni formali della teoria matematica all'interno delle quale si svolge il lavoro.



Figura 5. Studenti al lavoro con il prospettimetro

Di seguito illustreremo come il prospettimetro possa aiutare a costruire corretti e concreti modelli mentali del *piano proiettivo reale* con i suoi punti all'infinito, dando particolare rilievo agli aspetti cognitivi coinvolti e alla utilità della Geometria Dinamica in una fase del lavoro.

5. **Grandezza e posizione apparenti nella visione diretta**

Se si chiede a una persona qualsiasi come si vedono due binari che si stendono davanti a noi, sotto i nostri occhi, probabilmente risponderà senza problemi che si vedono congiungere in lontananza. Quasi nessuno però aggiungerà che si vedono anche “più in alto” mano a mano che la profondità aumenta.



Figura 6

Il fatto dipende in gran parte dalla elaborazione percettiva: in effetti le parti dei binari che si allontanano si alzano man mano nel nostro campo visivo, che è piatto, ma è anche vero che proprio per il loro convergere vengono interpretate come stese sul piano di terra, nelle tre dimensioni. Questa ultima “interpretazione” degli stimoli in entrata è molto forte e non lascia emergere la consapevolezza dell'alzarsi apparente dei binari, che pure è manifesto, come la convergenza.



Figura.7. Come evidenziato in questi quadri di Magritte, ciò che è lontano e che sta sotto l'orizzonte, che sia guardato direttamente o che venga disegnato su una tela, appare più in alto delle cose che sono più vicine all'osservatore.

Nell'Ottica di Euclide, trattato geometrico sulla visione diretta, questi aspetti vengono ampiamente trattati sulla base della nozione di “angolo visivo”. L'angolo visivo che sottende un oggetto permette valutazioni sulla sua grandezza apparente.

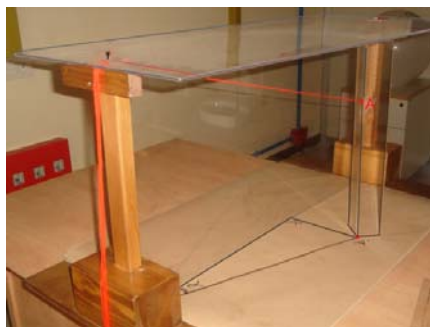
Tra i postulati iniziali dell'Ottica, (Euclide, *Ottica*. Nel CD in L. Catastini, F. Ghione (2004)) troviamo a questo riguardo la premessa 4: *le cose viste sotto angoli più grandi appaiono più grandi, quelle viste sotto angoli più piccoli più piccole, uguali quelle viste sotto angoli uguali*.

La geometrizzazione dell'atto visivo, cioè, porta a definire la dimensione apparente di un oggetto come funzione dell'angolo visivo che lo sottende.

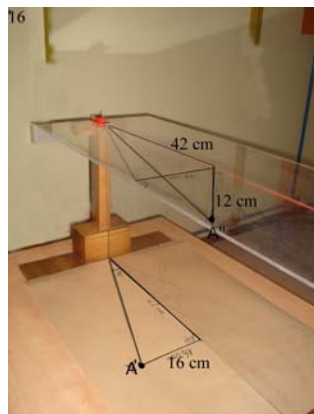
La determinazione della sua posizione apparente utilizza invece la nozione di “raggio visivo”, secondo le successive premesse 5-6: *le cose viste sotto raggi più alti appaiono più in alto, quelle viste sotto raggi più bassi più in basso, più a destra quelle viste con raggi più a destra, più a sinistra quelle viste sotto raggi più a sinistra*.

Dopo aver costruito linguisticamente definizioni rigorose e condivise delle varie posizioni menzionate nelle premesse 5 e 6, “apparire più alto, più basso, più a destra, più a sinistra”, con il prospettimetro si attuano figurazioni e misurazioni dei teoremi prospettici. Con lo strumento è possibile simulare la posizione dei punti nello spazio, l'incidenza dei raggi visivi sui punti osservati e la misurazione di segmenti o degli angoli che un raggio visivo, o una sua proiezione particolare (sul piano di profondità o sul piano dell'orizzonte), forma con altri elementi dello strumento, come ad esempio il raggio principale.

Le figure seguenti sintetizzano e illustrano alcuni iniziali momenti didattici nei quali si sono eseguite proiezioni, si sono calcolate lunghezze di segmenti e ricavato ampiezze di angoli calcolando le loro tangenti trigonometriche.



(1)

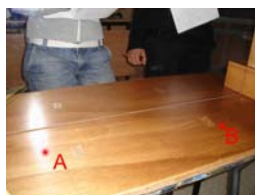


(2)

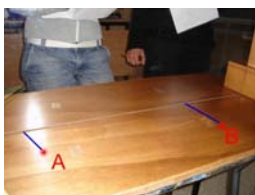
Figura 8. In (1) il raggio visivo che coglie il punto A viene proiettato sul piano di terra: l'angolo che si forma misura quanti gradi il punto è visto a destra. Tutti i punti sullo stesso raggio visivo formano lo stesso angolo e quindi sono identificati tra loro essendo visti ugualmente a destra. In (2) la proiezione sul piano di profondità permette di misurare, attraverso il calcolo della tangente, quanti gradi il punto A è visto basso. Come nel caso precedente tutti i punti dello stesso raggio, definendo lo stesso angolo, sono, dal punto di vista visivo, equivalenti tra loro, essendo visti ugualmente in basso. L'esperienza potrà aiutare gli studenti, in un futuro approccio universitario alla teoria, a pensare il raggio visivo come a un singolo punto del piano proiettivo.

Questa analisi mostra come la visione diretta non distingua il “più indietro” e il “più avanti” di un punto colto da un raggio visivo rispetto a un altro punto colto dallo stesso raggio e, non apparendo il “più avanti” e il “più indietro”, la visione geometrica diretta si può senz'altro definire una visione “piatta” dello spazio.

L'attività con lo strumento permette di simulare e concretizzare bene situazioni anti intuitive, come nell'esempio in figura, nel quale due punti A e B sono a distanze diverse dal piano di profondità – A è più vicino ad esso di B – ma vengono visti inversamente, cioè A è visto come più a destra, più lontano dal piano di profondità di B



(1)



(2)



(3)

Figura 9. [il prospettimetro è posizionato con “l'occhio”, da cui partono i raggi visivi, a sinistra] Disegnati i punti A e B sul piano di terra del prospettimetro (1), e misurate le loro rispettive distanze dal piano di profondità (2), si verifica che A è meno a sinistra del piano di profondità del punto B, in quanto la sua distanza dal piano di profondità è minore. In (3) si osserva che la proiezione sul piano di terra del raggio visivo che coglie il punto A forma col piano di profondità un angolo maggiore di quello formato in maniera analoga dal raggio che coglie il punto B, per cui A si vede più a sinistra di B.

6. Prospettimetro e DGS

Una delle regole basi della prospettiva è che segmenti paralleli (due o più segmenti) che vengono visti convergere verso uno stesso punto infinitamente lontano, sul quadro, dove la profondità è schiacciata nelle due dimensioni, si rappresentano come convergenti a un punto “al finito”, chiamato punto di fuga.

La visione di segmenti o rette parallele viene affrontata da Euclide nel Teorema 6: *Segmenti paralleli visti da lontano appaiono non paralleli*. La dimostrazione di questo teorema è molto importante perché il procedimento seguito permette di ritrovare le prime tracce di quello che poi sarà chiamato punto di fuga. Qui l'idea di parallelismo è legata, come nell'intuizione e come nel Rinascimento, all'idea di equidistanza: una retta parallela a una retta r è descritta da un punto P che si muove mantenendosi equidistante da r . Euclide dimostra che due rette parallele si vedono convergere perché l'angolo visivo che sottende un generico *segmento di distanza* AB (chiamiamo così un segmento perpendicolare alle rette, con gli estremi su di esse), con l'allontanarsi all'infinito del segmento, tende a zero.

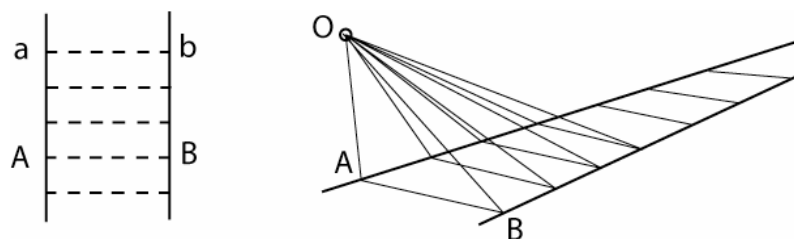


Figura 10. La misura degli angoli visivi che sottendono i segmenti di distanza, nel loro allontanarsi all'infinito tende a zero.

Questo contesto in qualche modo rafforza il concetto intuitivo di limite, indispensabile per il proseguimento della trattazione, ma contemporaneamente crea una forte rappresentazione spaziale che è di ostacolo al formarsi di una giusta immaginazione della distribuzione dei raggi visivi, distribuzione che è alla base della proiezione prospettica. Mentre infatti il diminuire della grandezza apparente dei segmenti di distanza e la conseguente apparente convergenza derivante dal diminuire dell'angolo visivo sono facili da concretizzare, la posizione apparente delle rette parallele, che nell'esempio si vedono *salire e convergere* a destra o a sinistra, dipende dal reale movimento compiuto dai raggi visivi che corrono su di esse, movimento che risulta difficile da immaginare guardando un disegno, come, ad esempio, la Figura 10. La difficoltà consiste nel fatto che i raggi visivi corrono lungo i segmenti paralleli e colgono gli estremi dei segmenti di distanza, costanti nella realtà, e questo loro essere fissati a punti inesorabilmente separati da una

lunghezza fissa non si concilia, nell'immaginazione, con il loro effettivo tendere a un unico raggio di fuga. Separati inesorabilmente, per quanto lontano si vada, come fanno a sovrapporsi, tutti, all'infinito, a un raggio comune? Provate a immaginarlo....

I segmenti di distanza costituiscono così un grave ostacolo epistemologico.

L'uso del prospettimetro permette di misurare l'alzarsi e lo stringersi dei raggi visivi verso il raggio di fuga. Montati sul prospettimetro alcuni raggi visivi che colgono due segmenti paralleli, come in Figura 11, la misurazione conferma come questi raggi tendano tutti, man mano che i punti si allontanano, a un unico raggio visivo, che ho chiamato *raggio di fuga*, che si trova sul piano dell'orizzonte ed è parallelo ai due segmenti dati

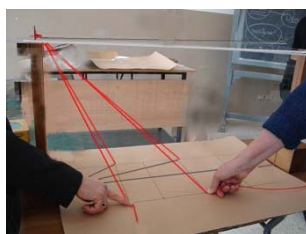


Figura 11. Raggi visivi che colgono due segmenti paralleli situati sul piano di terra, perpendicolari alla linea di terra.

ma le dimensioni dello strumento non permettono di andare abbastanza in profondità per rendere visivamente evidente il fenomeno, tanto da disattivare l'ostacolo "segmenti di distanza". Gli studenti faticano a crearsi un modello mentale della situazione.

Questo è un momento delicato per il pensiero matematico perché implica una *categorizzazione*: qual è la forma complessiva dell'insieme dei raggi visivi che percorrono una retta? Nel decidere una cosa del genere, le due parti della corteccia cerebrale non hanno lo stesso ruolo. In linea di massima il cervello sinistro sarebbe coinvolto nell'elaborazione categoriale dei componenti particolari, designati mediante parole, mentre il cervello destro elabora la forma complessiva dell'oggetto, intesa come la complessa rete di relazioni spaziali tra i componenti.

Se la forma complessiva non riesce ad emergere chiaramente – come nel caso dei raggi visivi in questione – il cervello inibisce l'elaborazione fondata sulla percezione visuo-spaziale (Berthoz, 2004) e si affida alla gestione delle categorie "verbali" – tra cui i numeri – elaborando il materiale in quel registro. Gli studenti trovano nella misurazione degli angoli visivi e nel ragionamento "per numero" argomenti sufficienti a rispondere alle prime domande che si possono porre sull'argomento, cosa che aiuta ancor più ad allontanarli da una difficile attività visuo-spaziale.

È utile a questo punto, per contrastare questo impoverimento dell'attività di apprendimento, presentare delle immagini di geometria dinamica che, insieme all'introduzione del piano del quadro, evidenzino l'effettivo movimento del raggio visivo, anche applicato a punti molto lontani. Eccone un esempio:

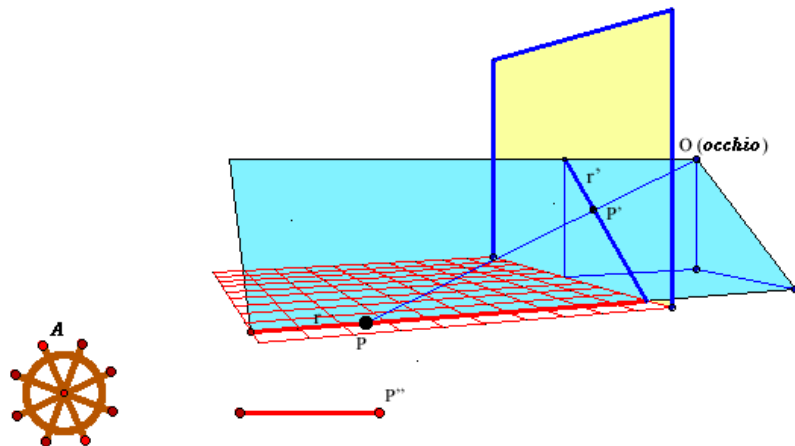


Figura 12. Rappresentazione dinamica dello scorrere di un raggio visivo lungo una retta ortogonale alla linea di terra.

Afferrando il punto A del timone è possibile ruotare l'immagine per osservarla da diversi punti di vista.

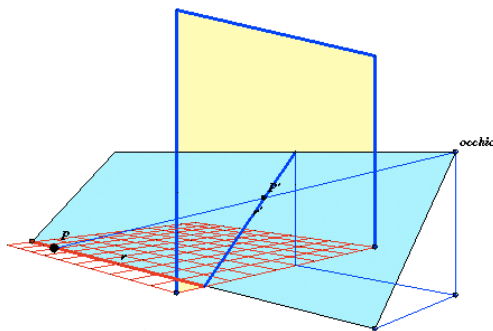


Figura 13

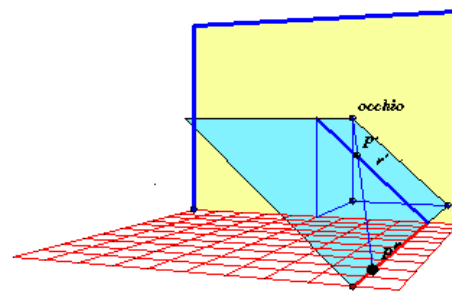


Figura 14

Afferrando invece il punto P'' sulla barra rossa e facendolo scorrere, si visualizza il movimento del raggio visivo OP che parte dall'occhio e coglie la retta r sul piano di terra, perpendicolare al piano del quadro. ([Cinderella](#))

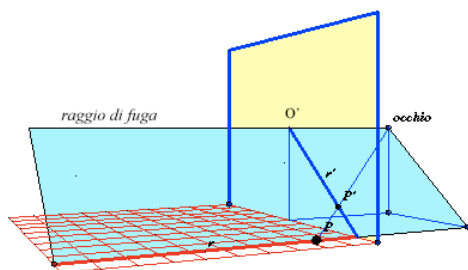


Figura 15

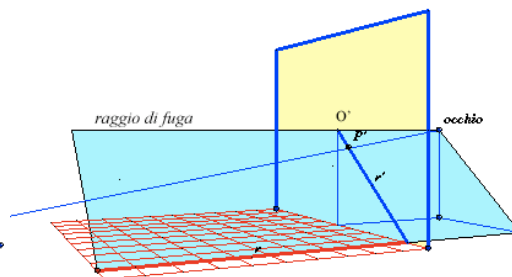


Figura 16

Il movimento evidenzia efficacemente come a ogni raggio visivo corrisponda un punto P sulla retta r del piano di terra e un punto P' - il suo proiettato - sul piano del quadro. Rende anche plausibile la domanda cruciale: quale punto di r ha come proiettato, sul piano del quadro, il punto O' del raggio di fuga?

Il “piano azzurro” diventerà un riferimento importante nell’attività visuo-spaziale degli studenti e permetterà di guidare l’immaginazione della forma complessiva del movimento dei raggi visivi.

Molte altre animazioni, proposte con lo stesso intento didattico di concretizzare nel pensiero una situazione sconosciuta, si possono trovare in rete nelle lezioni del Laboratorio “La geometria della visione” (Catastini, 2006) o nel CD allegato al volume di Catastini, Ghione, 2004.

Lo spostamento momentaneo del lavoro dal prospettimetro alla cattedra e al proiettore permette anche di introdurre da un punto di vista storico la nascita della prospettiva, presentando il piano del quadro come fosse un “vetro traluceante”, sul quale si proietta la scena che si svolge al di là di esso, metafora che permette una felice interazione, nel pensiero, tra le simulazioni già esistenti sulla visione diretta e quelle in via di assestamento sulla costruzione prospettica.

Lo studio di Alberti permette di affrontare storicamente lo stato della scienza nel Rinascimento, e il motivo per cui quel periodo oggi si chiami così. Amo citare agli studenti, dal *De Pictura*, Libro III, (nel CD, Catastini, Ghione, 2004) questa sua affermazione:

Piacemi il pittore sia dotto, in quanto e' possa, in tutte l'arti liberali; ma in prima desidero sappi geometria. Piacemi la sentenza di Panfilo, antiquo e nobilissimo pittore, dal quale i giovani nobili cominciarono ad imparare dipignere. Stimava niuno pittore potere bene dipignere se non sapea molta geometria. I nostri dirozzamenti, dai quali si esprime tutta la perfetta, assoluta arte di dipignere, saranno intesi facile dal geometra. Ma chi sia ignorante in geometria, né intenderà quelle **né alcuna altra ragione di dipignere**. (il grassetto è mio).

Queste osservazioni permettono di mettere in luce il significato straordinario di “uomo rinascimentale” contrapposto allo stato degli apprendisti delle botteghe artigianali dell’epoca, a cui Alberti si riferiva con le sue parole, nelle quali si

imparavano per pratica diretta metodi di composizione pittorica ma non le basi culturali su cui tali metodi si fondavano.

Concordo con Enriques (Enriques, 2003) che chiedeva cautela a spostare troppo l'insegnamento della matematica verso la trasmissione di tecniche "utilitaristiche" – come alcuni chiedevano nel periodo fascista – invitando a valutare la questione con equilibrio. Credo che proprio la natura fortemente teorica della disciplina impegni il pensiero in una ~~impegnativa~~ ^{impegnativa} opera di concretizzazione che chiede la collaborazione di vaste aree cerebrali e che anche in questo risieda quel carattere formativo che ha grande influenza nello sviluppo di un pensiero critico, libero e creativo.

Sappiamo che il tempo reale a disposizione in classe per lo svolgimento del programma è poco e che le integrazioni didattiche lo riducono ulteriormente, ma, a questo proposito, la geometria dinamica può, veramente in poco tempo, offrire ottimi momenti di sintesi e di visualizzazione di fondamentali paradigmi storici, con una importante resa cognitiva.

7. Conclusione del laboratorio

Dopo la presentazione delle immagini dinamiche si riprende lo studio sul prospettimetro: tolti i piani in plexiglas viene appoggiata sul piano di terra una cornice vuota, che simula il piano del quadro, attraverso la quale passano i raggi visivi.

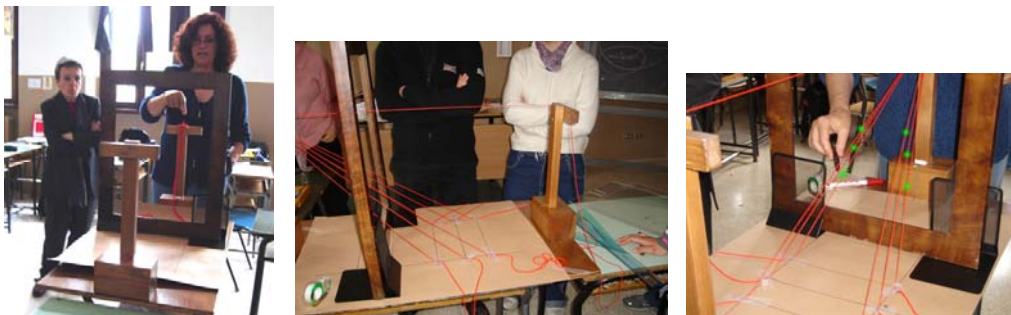


Figura 15. Il prospettimetro con la cornice che individua il piano del quadro e l'individuazione delle intersezioni del piano ideale con i raggi visivi

Ricordando l'equivalenza visiva tra tutti i punti di uno stesso raggio si deduce che è equivalente vedere i punti appartenenti ai segmenti paralleli tracciati sul piano di terra o vedere sul piano del quadro le loro tracce che convergono verso il punto di fuga. Le inferenze prodotte non sono di carattere induttivo, come potrebbe accadere nella osservazione di un esperimento ripetuto che suggerisce una legge generale, ma di puro carattere deduttivo: da una situazione ben definita in partenza (i postulati dell'ottica di Euclide) si traggono inferenze logicamente

corrette.

Dopo la presentazione del “*piano azzurro*” effettuata tramite il GDS, la pratica diretta porta una illuminante consapevolezza negli studenti, che discutono tra loro, a parole ma anche a gesti iconico-rappresentazionali, la scoperta dell’effettivo distribuirsi dei raggi visivi.



Figura 16. A sinistra: Le studentesse, discutendo tra loro, figurano con le mani e con le dita l’andamento parallelo dei segmenti e (a destra) la contemporanea distribuzione dei raggi visivi che li colgono, verificando le loro verbalizzazioni con quanto vedono e misurano sul prospettimetro.

Questa esperienza percettivo-motoria favorisce la produzione di dinamiche rappresentazioni mentali che supporteranno simulazioni ben formate e ragionamenti successivi. Le misurazioni effettuate con lo strumento aiutano concettualmente, *per numero*, a constatare come i raggi visivi effettivamente si portino in alto e si stringano al raggio di fuga, secondo la definizione data, mentre il vedere sul piano del quadro come i punti proiettati tendano al punto di fuga – e il correlato tendere, nello spazio, dei raggi visivi al raggio di fuga – affianca e supporta “*per spazio*” la concettualizzazione. Le inferenze prodotte non sono di carattere induttivo, come potrebbe accadere nella osservazione di un esperimento ripetuto che suggerisce una legge generale, ma di puro carattere deduttivo: da una situazione ben definita in partenza (i postulati dell’*Ottica di Euclide*) si traggono deduzioni logicamente corrette. Si dovrebbe sciogliere quindi la preoccupazione di una impropria contaminazione induttiva nei confronti della materia dal momento che l’attività di laboratorio tende proprio alla costruzione di corretti aloni inferenziali legati a profondi concetti matematici.

Dopo un breve inquadramento storico della figura di Desargues, presentiamo il suo assioma: “ogni fascio di rette ha un “*but*” (*scopo, bersaglio, destinazione*) comune”. Il termine «*but*» rendeva conto, nel caso di rette parallele, di un elemento estraneo agli enti euclidei (Catastini, 2004), che non era astrazione di un oggetto concreto, il punto materiale, ma di un’astrazione anch’essa, la direzione, ed è stato successivamente sostituito dai matematici con il termine «punto all’infinito», contribuendo a rendere tutta la questione ancor più difficile e anti

intuitiva per menti che si stanno formando alla matematica. “Rette parallele hanno un punto comune, all’infinito” così recitano di solito gli studenti, rinunciando a capire il mistero e tenendo alla fine per sé la sensazione di arbitrarietà della questione.

Proponiamo quindi di associare al raggio di fuga la direzione del fascio di rette considerate, aggiungendo questo astratto elemento al piano euclideo. Questo primo passo, facilmente completabile con l’aggiunta di un “but” per ogni direzione del piano, crea un nuovo oggetto matematico, il piano proiettivo, diverso da quello euclideo, che porta interessanti e feconde informazioni sulla trasformazione visiva, diretta e inversa. (Per una trattazione esaustiva dell’argomento vedere Catastini, 2009).

Solo dopo un adeguato numero di esercizi sull’argomento (ad esempio la ricerca del punto di distanza) il termine desarguesiano sarà abbandonato, spiegando come questo astratto elemento comune abbia preso poi il nome di *punto all’infinito* per adeguarsi al linguaggio della trasformazione puntuale. Nel piano proiettivo, questo nuovo mondo matematico, le rette diventano “attualmente” infinite, abbandonando lo stato potenziale di segmento prolungabile a piacere che la trattazione euclidea assegna loro. L’intreccio tra l’esposizione storica della genesi del concetto di “but” e la pratica matematica che in qualche modo la ripercorre ha costituito per gli studenti un incontro fecondo tra aspetti culturali e ha reso loro queste attività, oltre che cognitivamente, anche culturalmente significative.

Bibliografia

- Arnheim, R. (1974). *Il pensiero visivo*, Einaudi, Torino.
- Berthoz, A. (1998). *Il senso del movimento*, McGraw-Hill, Milano.
- Berthoz, A. (2004). *La scienza della decisione*, Codice edizioni, Torino.
- Catastini, L. (2004). Il Giardino di Desargues, *La matematica nella Società e nella Cultura*, Bollettino UMI (8), 7-A, pp. 321-345.
- Catastini, L. & Ghione, F. (2004). *Le geometrie della visione*, Springer-Verlag Italia.
- Catastini, L. (2009). Concretamente astratto, anzi, simulabile, *La Matematica nella Società e nella Cultura*, Bollettino UMI, Serie I, Vol.2., pp. 31-69.
- Enriques, F. (2003). *Insegnamento dinamico*, con scritti di F.Ghione e M.Moretti, Agorà, La Spezia.
- Norman, D. A. (1990). *La caffettiera per masochisti*, Giunti, Firenze.
- Rolland, R. (1923). *Vie de Beethoven*, Achette, Paris.

Riferimenti web

- Catastini, L. (2006). Lezioni del Laboratorio “Geometria della visione” (PLS) <http://www.mat.uniroma2.it/pls/varrone/varrone.html>